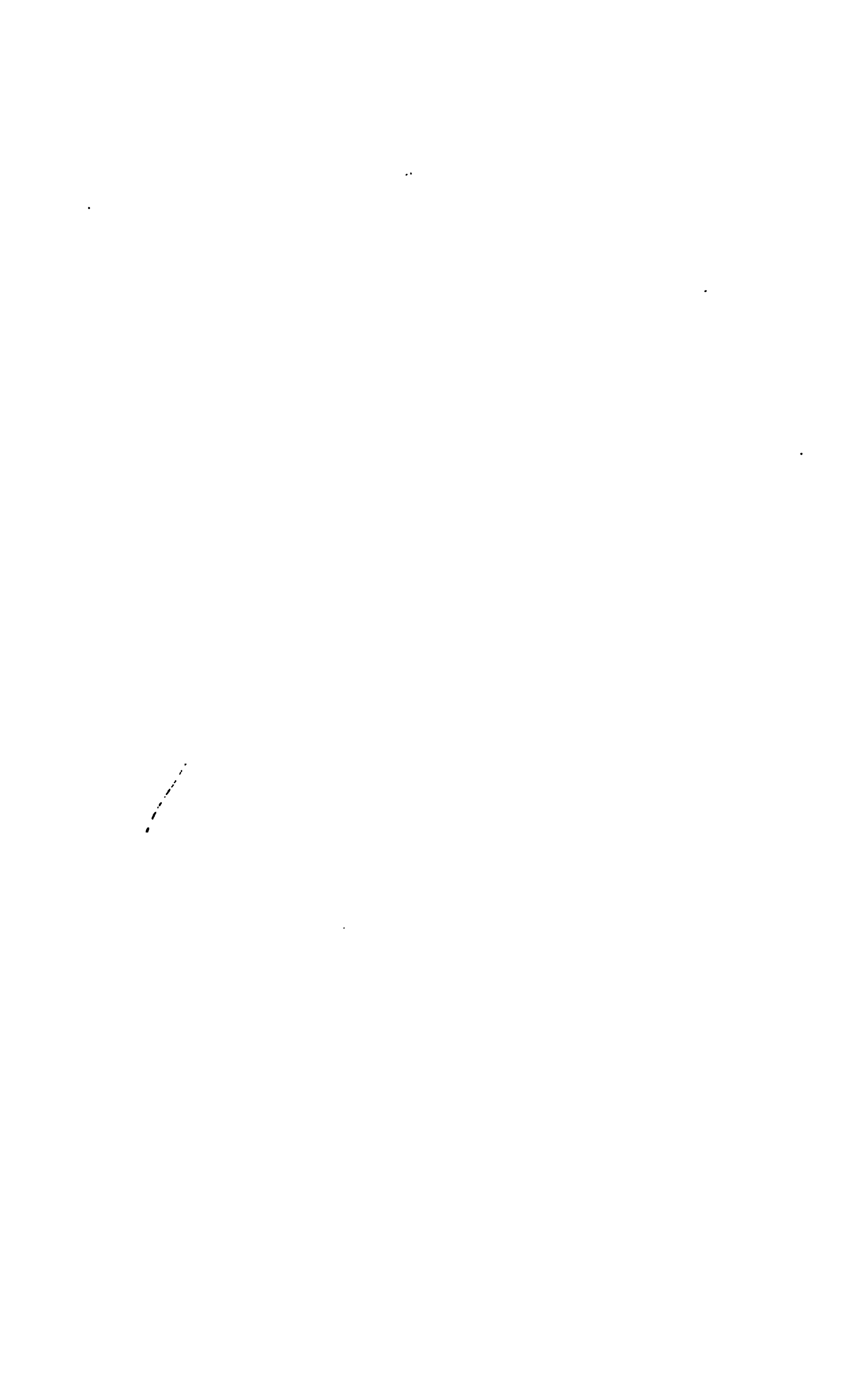
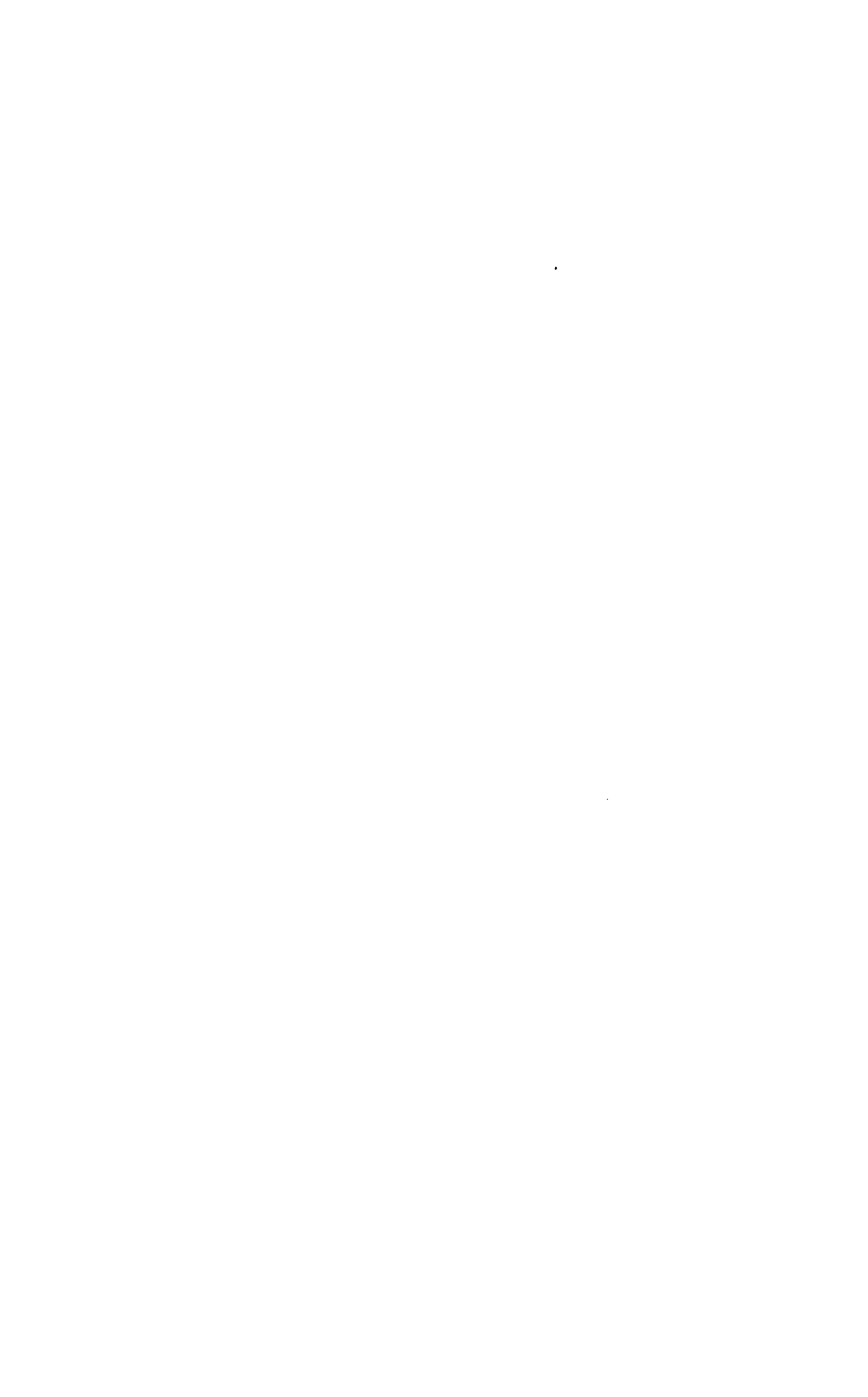








ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE.

BAND 4.

ANNALEN
DER
PHYSIK.

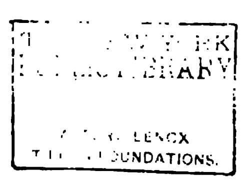
BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. UND E. WIEDEMANN.

VIERTE FOLGE.

BAND 4.

DER GANZEN REIHE 309. BAND.



KURATORIUM:

F. KOHLRAUSCH, M. PLANCK, G. QUINCKE,
W. C. RÖNTGEN, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

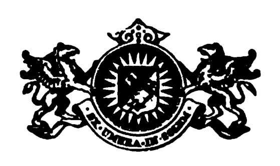
UND INSBESONDERE VON

M. PLANCK

HERAUSGEGEBEN VON

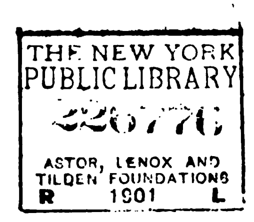
PAUL DRUDE.

MIT NEUN FIGURENTAFELN.



LEIPZIG, 1901.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.



Inhalt.

Vierte Folge. Band 4.

Erstes Heft.

Ausgegeben am 4. Januar 1901.

Zweites Heft.

Ausgegeben am 1. Februar 1901.

Drittes Heft.

Ausgegeben am 1. März 1901.

Viertes Heft.

Ausgegeben am 2. April 1901.

Nachweis zu den Figurentafeln.

Die Redaktion der „Beiblätter zu den Annalen der Physik" wird vom 25. Bande ab (Januar 1901) Herr Professor Dr. Walter König in Greifswald übernehmen.

Ich bitte deshalb, alle Zusendungen für die Redaktion der „Beiblätter" in Zukunft an Herrn Professor Dr. König zu richten, entweder durch meine Vermittelung oder direkt nach Greifswald, Bismarckstrasse 21.

Hochachtungsvoll

Johann Ambrosius Barth.



1901. № 1.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 4.

1. *Doppelbrechung in transversal schwingenden Glasplatten; von W. König.*

(Hierzu Taf. I, Figg. 1—11 und Taf. II.)

Wenn eine längliche Glasplatte oder ein vierkantiger Glasstab transversale Schwingungen mit freien Enden und zwei oder mehr Knotenlinien ausführt, so wird in den Schwingungsbäuchen, entsprechend den periodischen Verbiegungen, die die Platte hier erfährt, eine periodische Doppelbrechung von der gleichen Art auftreten, wie sie dauernd durch eine statische Durchbiegung der Platte hervorgebracht werden kann. Man kann die Frage aufwerfen, ob auch an den Knotenstellen eine Beeinflussung der Lichtschwingungen durch die elastischen Schwingungen der Platte oder die damit verknüpften elastischen Verbiegungen der Platte vorhanden ist. Einige orientirende Versuche ergaben ohne Schwierigkeit, dass in den Knotenstellen in der That eine Doppelbrechung von eigentümlicher Natur auftritt. Sie erinnert in ihrer Art an die Doppelbrechung, welche Kundt in bewegten reibenden Flüssigkeiten beobachtet hat, und schien mir einer genaueren Prüfung ihrer Gesetze und ihres Ursprunges wert zu sein. Eine solche erforderte aber auch eine genaue Untersuchung der Erscheinungen im Schwingungsbauche, um beide Vorgänge quantitativ miteinander vergleichen zu können. So entstand die nachfolgende Untersuchung. Ihr experimenteller Teil ist schon vor einer Reihe von Jahren im Institut des Physikalischen Vereins zu Frankfurt a. M. ausgeführt worden; auch habe ich auf der Lübecker Naturforscherversammlung über die experimentellen Ergebnisse kurz berichtet.[1]) In der theoretischen Deutung der Versuche stiess ich anfangs auf eine Schwierigkeit, die

1) W. König, Verhandl. d. Gesellsch. d. Naturf. u Aerzte, Lübeck 1895. II. Teil. 1. Hälfte. p. 54.

weitere experimentelle und theoretische Studien veranlasste und dadurch zur Folge hatte, dass sich die ausführliche Mitteilung der Untersuchung bis jetzt verzögert hat.

1. Beschreibung der Apparate.

a) *Die Glasplatte und ihre Aufstellung.* Die untersuchte Glasplatte hatte eine Länge l von 70 cm, eine Breite b von 7 cm und eine Dicke d von 7 mm. Die Beschaffung einer Platte von dieser Grösse aus gut gekühltem, völlig spannungsfreiem Glase hätte enorme Kosten verursacht. Ich habe mich daher bei diesen Versuchen, die eigentlich nur als vorläufige Versuche betrachtet wurden, mit einer Platte begnügt, die aus gutem Spiegelglas geschnitten war. Die schmalen Längsflächen waren gut polirt, um eine gute Durchsicht in Richtung der Breite b durch die Platte zu gestatten. Die Verwendung einer derartigen Platte hatte natürlich den Uebelstand, dass die Platte schon in unverbogenem Zustande eine gewisse Doppelbrechung zeigte. Stellte man sie mit ihrer Fläche senkrecht auf die lange, schmale Seitenfläche und blickte zwichen gekreuzten Nicols, deren Polarisationsrichtungen mit der Längsrichtung der Platte Winkel von 45° bildeten, senkrecht durch die Platte in Richtung ihrer Breite hindurch, so erschien sie nicht vollkommen dunkel, sondern zeigte, parallel zu ihren Flächen, helle und dunkle Streifen, entsprechend doppelbrechenden und neutralen Schichten. Der Charakter der Doppelbrechung stimmte durchaus mit den von Czapski an schnell gekühlten Glasplatten gemachten Beobachtungen[1]) überein; die Glasmasse verhielt sich in der Nähe der Flächen wie gepresstes, in der Mitte zwischen den Flächen wie gedehntes Glas, wobei Zug- und Druckrichtung parallel zu den Flächen zu denken sind. Diese Doppelbrechung war nicht stark. Trotz des 7 cm langen Weges, den das Licht in der Platte zu durchlaufen hatte, ging die Interferenzfarbe nicht über das Grau der ersten Ordnung hinaus; eine Glimmerplatte, die das Violett des Ueberganges von der ersten zur zweiten Ordnung zeigte, gab an den hellsten Stellen als Additionsfarbe Blau, als Subtractionsfarbe Rot; danach würde die Gangdifferenz im Maximum

---

1) S. Czapski, Wied. Ann. **42.** p. 319—331. 1891.

nicht über $\lambda/7$ betragen haben. Immerhin bildete diese Eigenschaft der Platte ein störendes Moment, welches die Genauigkeit der Messung der durch Verbiegung hervorgerufenen Doppelbrechung bis zu einem gewissen Grade beeinträchtigte. Eine Berücksichtigung dieses Umstandes in Form einer Correction an den Messungen wäre wohl möglich, aber sehr umständlich gewesen. Bei zweckmässiger Combination verschiedener Messungen gleicht sich der Fehler einigermaassen aus.

Um die beabsichtigten Messungen der Doppelbrechung an vollkommen frei schwingenden Plattenteilen auszuführen, wurde die Platte in solcher Weise zum Schwingen erregt, dass sich vier Knotenlinien auf ihr bildeten, die Platte also ihren dritten Transversalton gab. Nach der Rechnung von Strehlke, unter Berücksichtigung der von Seebeck[1]) angegebenen Correction, würden diese Knotenlinien für die gegebene Platte von 700 mm Länge folgende Abstände von dem einen Ende der Platte haben: Nr. 1 66,08. Nr. 2 249,06. Nr. 3 450,94, Nr. 4 633,92. Die Beobachtung, durch Aufstreuen von Sand auf die Platte, ergab die Werte: 66,0, 247,0. 449,0, 633,0. Zur Hervorbringung dieser Schwingungsform wurde die Platte in dem ersten und vierten Knoten unterstützt und an dem einen Ende mit dem Bogen angestrichen. Die Beobachtungen wurden dann in dem einen der vollkommen freien Knoten Nr. 2 oder Nr. 3 ausgeführt. Die Erscheinungen im Schwingungsbauch wurden im mittelsten Bauch, zwischen den Knoten 2 und 3, also in der Mitte der ganzen Platte beobachtet.

Wurde die Platte horizontal auf zwei Leisten gelegt, die sie in den Knoten 1 und 4 unterstützten, so bog sie sich durch ihr eigenes Gewicht ein wenig durch und zeigte eine dementsprechende Doppelbrechung, mit neutraler Mittellinie und beiderseits nach den Oberflächen hin zunehmender Stärke, von negativem Charakter auf der oberen, concaven, zusammengedrückten Hälfte, und von positivem Charakter auf der unteren, convexen, gedehnten Hälfte. Diesem Uebelstande wurde dadurch abgeholfen, dass die Platte nicht in horizontaler, sondern in verticaler Lage befestigt wurde, und zwar so, dass die langen, schmalen Seiten horizontal, die kurzen vertical standen,

1) A. Seebeck, Abhandl. d. K. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch., Mathem.-phys. Klasse 1. p. 131—168. 1852.

das Licht also in verticaler Richtung die Platte durchsetzen musste (vgl. Fig. 2). Zu dieser Befestigung, die natürlich nur in den Knotenlinien 1 und 4 erfolgen durfte, waren besondere Vorrichtungen erforderlich, die in Fig. 1 abgebildet sind. Sie bestanden in zwei kleinen, aus starkem Holze gefügten Rahmen, von denen *A* eine Seitenansicht, *B* eine Durchsicht darstellt. Zwei gegenüberliegende Seitenwände des Rahmens enthielten einen breiten Schlitz, der zwei Holzleisten *a, a* als Führung diente. Zwischen diese, die sich in zwei flachen Kanten gegenüberstanden, wurde die Glasplatte *g* so weit eingeschoben, dass die Knotenlinie gerade zwischen den Kanten lag; mit Hülfe der Schraube *s* konnte dann die obere Leiste niedergedrückt und die Platte festgeklemmt werden, wobei zum

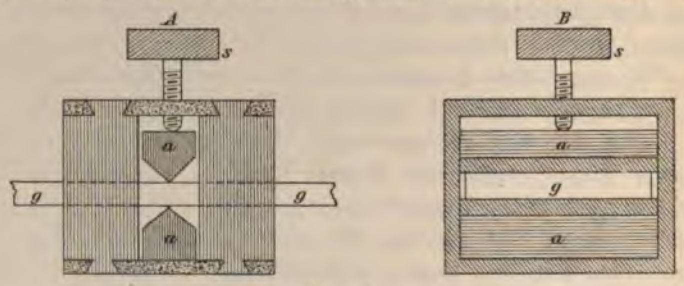


Fig. 1.

Schutze der Platte noch Lederstreifen zwischen die Holzkante und das Glas gelegt wurden. Nachdem diese Einstellung und Befestigung bei horizontaler Lage der Platte ausgeführt war, wurden die Rahmen mit der Platte auf die hohe Kante gestellt und mit Schraubzwingen auf der Unterlage befestigt. In dieser Weise konnte der Platte eine ganz feste Lage gegeben werden, ohne dass ihre Schwingungsfähigkeit dadurch beeinträchtigt worden wäre.

Der Vollständigkeit halber erwähne ich noch, dass sich für den dritten Transversalton der Platte aus den weiter unten besprochenen photographischen Aufnahmen und der Geschwindigkeit des dabei benutzten Fallpendels (113 cm/sec) eine Schwingungszahl von 411 ganzen Schwingungen in der Secunde ergab. Eine genaue Bestimmung dieser Grösse wurde nicht ausgeführt, da sie für das Folgende nicht weiter in Betracht kam.

b) *Die subjective Beobachtungsmethode.* Die gesuchten Erscheinungen wurden zunächst direct mit dem Auge beobachtet.

Zur bequemeren Anordnung der Apparate wurde die Platte dabei in horizontaler Lage belassen. Das Licht eines Auerbrenners fiel durch ein grosses Nicol'sches Prisma senkrecht auf die lange Schmalseite der Platte, ging in Richtung der Breite durch die Platte und wurde durch den Analysator hindurch vom Auge aufgefangen. Um aber die Erscheinungen in ihrer zeitlichen Veränderlichkeit beobachten zu können, wurde durch einen verticalen Spalt, der zwischen Platte und Analysator ganz dicht vor der Platte stand, ein schmales Bündel des Lichtes ausgeblendet und in einem rotirenden Spiegel oder einfacher durch eine Linse betrachtet, die senkrecht zur Richtung des Spaltes hin und her bewegt wurde. Sehr zweckmässig erwies sich auch hierbei wieder die von mir construirte rotirende Linsenscheibe, die schon von Hrn. G. Klinkert in seiner Arbeit über die Saitenschwingungen[1]) beschrieben worden ist. Es war mit diesen Hülfsmitteln möglich, nicht bloss die Erscheinungen im Schwingungsbauch und im Schwingungsknoten einzeln zu analysiren, sondern auch beide wenigstens in ihrer Phasenbeziehung miteinander zu vergleichen, indem mittels geeigneter Spiegelvorrichtungen zwei Lichtbündel gleichzeitig, das eine im Bauch, das andere im Knoten durch die Platte hindurchgeschickt und dann übereinander auf denselben Spalt projicirt wurden. Eine quantitative Vergleichung aber war wegen der Flüchtigkeit der Wahrnehmungen bei dieser Methode ausgeschlossen. Zu diesem Zweck mussten die Erscheinungen photographisch festgehalten werden.

c) *Die photographische Aufnahme der Erscheinungen.* Zur dauernden Fixirung der periodischen Vorgänge wurde das Bild des Spaltes auf eine bewegte photographische Platte projicirt. Hierfür wurde das grosse Fallpendel des Instituts benutzt, das ursprünglich für die Untersuchung des Hrn. Klinkert construirt worden war und inzwischen auch von Hrn. W. Hess bei seiner Untersuchung elektrischer Schwingungen in Inductorien[2]) benutzt worden ist. Es ist von Hrn. Klinkert genau beschrieben worden[3]), und ich kann mich daher be-

---

1) G. Klinkert, Wied. Ann. **65.** p. 851. 1898.

2) W. Hess, Wied. Ann. **66.** p. 980—998. 1898.

3) G. Klinkert, Wied. Ann. **65.** p. 850. 1898.

gnügen, zu erwähnen dass das Pendel 2 m lang ist, dass es an seinem unteren Ende eine grössere, bleibeschwerte Platte trägt, die mit einem Ausschnitt und einer Vorrichtung zum Einschieben einer Mattscheibe oder einer photographischen Cassette versehen ist, dass es seine Schwingungen in einem von allen Seiten lichtdicht abgeschlossenen Raume ausführt und in diesem Raume in abgelenkter Lage arretirt und durch eine Zugvorrichtung von aussen her im geeigneten Augenblick losgelassen werden kann. Fig. 2 stellt die ganze Versuchsanordnung in einem senkrechten Durchschnitt dar. Als Licht-

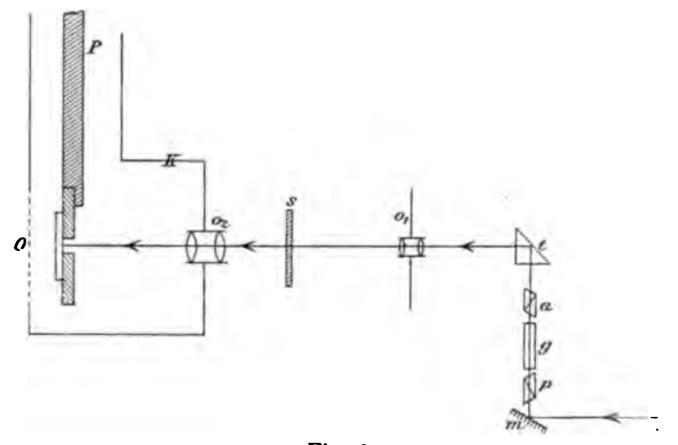


Fig. 2.

quelle wurde die Sonne benutzt. Ein Uhrwerkheliostat lenkte die Sonnenstrahlen auf den Spiegel *m*. Dieser reflectirte sie senkrecht nach oben; sie durchsetzten den Polarisator *p*, die senkrecht stehende Glasplatte *g* in Richtung ihrer Breite und den Analysator *a* und wurden dann von dem total reflectirenden Prisma *t* wieder in horizontale Richtung übergeführt. Das photographische Objectiv O_1 entwarf von der oberen Fläche der Glasplatte ein deutliches Bild auf der Blende *s*; diese trug einen senkrechten Spalt, der aus dem Bilde der Glasfläche senkrecht zu deren Längserstreckung eine feine Linie herausschnitt. Diese Lichtlinie endlich wurde von dem Objectiv O_2 auf die photographische Platte projicirt oder richtiger auf diejenige Stelle, welche die am unteren Teil des Fall-

pendels P angebrachte photographische Platte bei der Schwingung des Pendels passirte. K ist der untere, kastenartige Teil des Dunkelraumes, der in seiner vorderen Wand das Objectiv O_2 trägt; O ist eine durch einen überfallenden Sack lichtdicht verschliessbare Oeffnung in der hinteren Wand des Dunkelraumes, die zur Bedienung des Pendels bestimmt ist.

Die Hauptschwierigkeit lag in der richtigen Führung des Lichtes, nicht bloss um die erforderliche Helligkeit, sondern vor allem um die grösste Deutlichkeit der Interferenzerscheinungen in dem Bilde der Glasfläche am Ort des Spaltes s zu erreichen. Die Bedingung hierfür ist offenbar die, dass die Lichtstrahlen die Glasplatte als ein Parallelstrahlenbündel parallel zu den beiden Plattenoberflächen durchsetzen. Die mangelhafte Beschaffenheit der Glasplatte erschwerte die Erfüllung dieser Bedingung. Es erwies sich als vorteilhaft, die Sonnenstrahlen nicht direct auf den Polarisator und die Platte fallen zu lassen, sondern sie vorher durch eine grosse, schwache Convexlinse zu concentriren und ihnen dann mittels einer starken Concavlinse, die unmittelbar vor dem Spiegel m stand, den erforderlichen Grad von Parallelität wieder zu verleihen. Durch Verschiebung dieser in Fig. 2 nicht mit gezeichneten Linsen konnte die Lichtführung so geregelt werden, dass im Bilde der Glasfläche auf dem Spalt s der Querschnitt der Platte gleichmässig erhellt erschien und die Interferenzstreifen bei Verbiegung der Platte zwischen gekreuzten Nicols in voller Schärfe hervortraten.

Indem man die Glasplatte in ihrer eigenen Ebene verschob, konnte man nach Belieben die Erscheinungen im Schwingungsbauch oder im Schwingungsknoten aufnehmen. Schwieriger war das Problem, beide Erscheinungen gleichzeitig, unmittelbar übereinander auf den Spalt s zu projiciren, um ihre Phasen- und Grössenbeziehung ausmessen zu können. In diesem Falle wurde die Platte so verschoben, dass die Verticalebene der ganzen Aufstellung die Platte genau in der Mitte zwischen Bauch und Knoten schnitt. Das einfallende Lichtbündel wurde durch Spiegel in zwei Teile geteilt und auf getrennten Wegen weiter geleitet, der eine Teil durch den Knoten, der andere durch den Bauch; jedes der beiden Bündel passirte unter und über der Glasplatte seinen eigenen Polarisator und Analysator.

Ueber den Analysatoren befanden sich total reflectirende Prismen, welche die beiden Lichtbündel wieder auf horizontale Richtung brachten, sie aber senkrecht zur Verticalebene der Aufstellung aufeinander zu reflectirten. In der Mitte zwischen diesen Prismen befanden sich zwei weitere total reflectirende Prismen, mit gekreuzten Hypotenusenflächen unmittelbar nebeneinander liegend und so angeordnet, dass jedes von ihnen eines der beiden Strahlenbündel wieder senkrecht nach oben reflectirte. Hier wurden dann endlich beide Bündel von einem fünften, total reflectirenden Prisma aufgefangen, das sie wieder in horizontale Richtung überführte und auf das Objectiv O_1 warf. Bei richtiger Einstellung der fünf Prismen entstanden dann auf dem Spalt s zwei unmittelbar übereinander gelegene Bilder der Glasfläche, von denen das eine vom Schwingungsbauch, das andere vom Schwingungsknoten herrührte. Die gleichmässige, richtige Erhellung der beiden Bilder hatte aber in diesem Falle grosse Schwierigkeiten.

Nachdem die richtige Einstellung des ganzen optischen Apparates erreicht war, wurden die Aufnahmen in folgender Weise ausgeführt: Bei geschlossenem Objectiv O_2 wurde die Cassette in den Rahmen am Fallpendel eingeschoben, das Fallpendel in die Auslösungsvorrichtung eingehakt und die Cassette dann geöffnet. Darauf wurde das Objectiv O_2 geöffnet; ein Gehülfe strich die Glasplatte mit dem Bogen an und zugleich wurde das Pendel ausgelöst. Unmittelbar darauf wurde das Objectiv O_2 wieder verdeckt, damit beim Rückschwingen des Pendels das Licht die photographische Platte nicht ein zweites Mal traf. Eine Auswahl der auf diesem Wege erzielten Aufnahmen ist auf Taf. I vereinigt.

Bevor ich auf die Discussion der Versuchsergebnisse eingehe, wird es nützlich sein, die wichtigsten Formeln über den Schwingungszustand der Glasplatte, von denen ich im Folgenden Gebrauch zu machen habe, zusammenzustellen.

2. Theorie der Transversalschwingungen der Platte.

Die Längsrichtung der Platte werde als x-Axe, die Richtung ihrer Dicke als y-Axe angenommen. Macht man die Voraussetzung, dass die Dicke klein ist gegen die Länge, und beschränkt man sich auf kleine Deformationen, so kann man

die eintretenden Verschiebungen in erster Annäherung als rein transversal, d. h. nur in Richtung der y-Axe erfolgend, und daher für alle Punkte desselben Querschnittes der Platte als gleich betrachten. Die Bewegungsgleichung der Platte lässt sich dann in der Form ansetzen:[1])

$$\mu \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = - \frac{\partial P}{\partial x}, \tag{1}$$

wenn unter μ die Dichte des Glases, unter P die im Querschnitt wirkende tangentiale Kraft, bezogen auf die Flächeneinheit, verstanden wird. Mit den Verbiegungen der Platte steht diese Kraft im Zusammenhang durch die Beziehung:

$$P = \frac{E \cdot d^2}{12} \cdot \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}, \tag{2}$$

wobei d die Dicke, E den Elasticitätscoefficienten des Glases bedeutet. Unter Benutzung dieser Gleichung geht die Bewegungsgleichung der Platte über in die Form:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = - \frac{E \cdot d^2}{12 \cdot \mu} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}. \tag{3}$$

Wenn der Stab einen einfachen Ton von der Schwingungszahl n giebt, so lässt sich seine Bewegung darstellen durch die Gleichung:

$$y = u \cdot \sin 2 \pi n t, \tag{4}$$

worin die Amplitude u eine Function von x ist und der Differentialgleichung:

$$\frac{d^4 u}{d x^4} = \frac{(2 \pi n)^2 \cdot 12 \cdot \mu}{E \cdot d^2} \cdot u \tag{5}$$

zu genügen hat. Um die Lösung in einfacherer Form schreiben zu können, setze ich mit Kirchhoff[2]) den Factor:

$$\frac{(2 \pi n)^2 \, 12 \cdot \mu}{E \cdot d^2} = \left(\frac{p}{l}\right)^4. \tag{6}$$

Dann lautet das allgemeine Integral der Gleichung (5):

$$\left\{ \begin{aligned} u &= A \cos \frac{p x}{l} + B \cdot \sin \frac{p x}{l} \\ &\quad + C \frac{e^{\frac{p x}{l}} + e^{-\frac{p x}{l}}}{2} + D \frac{e^{\frac{p x}{l}} - e^{-\frac{p x}{l}}}{2}. \end{aligned} \right. \tag{7}$$

1) J. Violle, Lehrbuch der Physik, deutsche Ausgabe 2. (1) p. 199.
2) G. Kirchhoff, Mechanik, 4. Aufl. p. 440. 1897.

Die Grenzbedingungen, dass beide Enden der Platte $x=0$ und $x=l$ frei schwingende Enden sein sollen, ergeben folgende Gleichungen:

$$C = A, \quad D = B,$$

$$A\left(\frac{e^p + e^{-p}}{2} - \cos p\right) + B\left(\frac{e^p - e^{-p}}{2} - \sin p\right) = 0,$$

$$A\left(\frac{e^p - e^{-p}}{2} + \sin p\right) + B\left(\frac{e^p + e^{-p}}{2} - \cos p\right) = 0.$$

Daraus folgt für p die Gleichung:

$$\cos p \cdot \frac{e^p + e^{-p}}{2} = 1 \tag{8}$$

oder

$$\frac{e^p - e^{-p}}{2} = \mp \operatorname{tg} p,$$

wobei das obere oder das untere Zeichen abwechselnd für die aufeinander folgenden Wurzeln p_1, p_2, p_3, p_4 etc. der Gleichung zu nehmen ist. Diese Wurzeln haben die Werte

$$p_1 = 3{,}011\,\frac{\pi}{2}, \quad p_2 = 5{,}000\,\frac{\pi}{2}, \quad p_3 = 7{,}000\,\frac{\pi}{2}, \quad p_4 = 9{,}000\,\frac{\pi}{2}$$

und entsprechen Schwingungen der Platte mit 2, 3, 4, 5 Knoten. Uns interessirt im vorliegenden Falle ausschliesslich die Wurzel

$$p_3 = 7\,\frac{\pi}{2}.$$

Unter Berücksichtigung der Gleichungen für p lässt sich das Verhältnis A/B auf eine einfache Form bringen. Denn es ist:

$$\frac{A}{B} = -\frac{\dfrac{e^p + e^{-p}}{2} - \cos p}{\dfrac{e^p - e^{-p}}{2} + \sin p},$$

$$= -\frac{\dfrac{1}{\cos p} - \cos p}{\mp \operatorname{tg} p + \sin p},$$

$$= -\frac{\sin p}{\mp 1 + \cos p};$$

$$\frac{A}{B} = \begin{cases} + \operatorname{ctg} \dfrac{p}{2} & \text{für } p_1, p_3, \ldots \\ - \operatorname{tg} \dfrac{p}{2} & \text{für } p_2, p_4, \ldots \end{cases} \tag{9}$$

Daraus folgt, unter Berücksichtigung der oben angegebenen Werte der Wurzeln p_1, p_2 etc., dass für alle Töne des Stabes sehr angenähert die Bedingung erfüllt ist:

$$B = -A.$$

Dann hat die Amplitude den angenäherten Wert:

$$u = A\left\{\cos\frac{px}{l} - \sin\frac{px}{l} + e^{-\frac{px}{l}}\right\} \tag{10}$$

und demgemäss haben die Verrückungen selbst und ihre Ableitungen die Näherungswerte:

$$y = A\left\{\cos\frac{px}{l} - \sin\frac{px}{l} + e^{-\frac{px}{l}}\right\}\sin 2\pi n t, \tag{11}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -A\frac{p}{l}\left\{\cos\frac{px}{l} + \sin\frac{px}{l} + e^{-\frac{px}{l}}\right\}\sin 2\pi n t, \tag{12}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -A\frac{p^2}{l^2}\left\{\cos\frac{px}{l} - \sin\frac{px}{l} - e^{-\frac{px}{l}}\right\}\sin 2\pi n t, \tag{13}$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = A\frac{p^3}{l^3}\left\{\cos\frac{px}{l} + \sin\frac{px}{l} - e^{-\frac{px}{l}}\right\}\sin 2\pi n t. \tag{14}$$

Für die nachfolgenden Anwendungen interessiren uns ausschliesslich die Vorgänge im mittleren Schwingungsbauch und im nächstgelegenen Schwingungsknoten für den Fall des dritten Tones, d. h. für $p = 7\pi/2$.

a) Für die Mitte der Platte ist $x = l/2$, folglich ganz allgemein für alle Werte von p:

$$u = A\left[\cos\frac{p}{2} + \frac{e^{\frac{p}{2}} + e^{-\frac{p}{2}}}{2}\right] + B\left[\sin\frac{p}{2} + \frac{e^{\frac{p}{2}} - e^{-\frac{p}{2}}}{2}\right].$$

Aus Gleichung (8) lassen sich leicht die Beziehungen herleiten:

$$e^{\frac{p}{2}} + e^{-\frac{p}{2}} = \pm\frac{2\cos\frac{p}{2}}{\sqrt{\cos p}} \quad \begin{cases} + \text{ für } p_3,\ p_4,\ p_7,\ p_8 \cdots \\ - \text{ für } p_1,\ p_2,\ p_5,\ p_6 \cdots \end{cases}$$

$$e^{\frac{p}{2}} - e^{-\frac{p}{2}} = \pm\frac{2\sin\frac{p}{2}}{\sqrt{\cos p}} \quad \begin{cases} + \text{ für } p_1,\ p_4,\ p_5,\ p_8 \cdots \\ - \text{ für } p_2,\ p_3,\ p_6,\ p_7 \cdots \end{cases}$$

Setzt man diese Ausdrücke ein, und berücksichtigt die Gleichung (9), so erhält man

$$\text{für } p_2,\, p_4,\, p_6,\, p_8 \ldots \quad u = 0,$$

d. h. in der Mitte einen Knoten,

für $p_1,\, p_3,\, p_5,\, p_7 \ldots$

$$u = \frac{A}{\cos\frac{p}{2}}\left[1 \mp \sqrt{\cos p}\right] \qquad \begin{cases} - \text{ für } p_1,\, p_5 \ldots \\ + \text{ für } p_3,\, p_7 \ldots \end{cases}$$

Für den dritten Ton der Platte wäre also der genaue Wert von u für die Mitte:

$$u_0 = \frac{A}{\cos\frac{p_3}{2}}\left[1 + \sqrt{\cos p_3}\right]. \tag{15}$$

Da die Wurzeln der Gleichung (8) sehr nahe gleich den ungeraden Vielfachen von $\pi/2$ sind, so ist $\cos p$ sehr nahe $=0$, $\cos p/2$ sehr nahe $= \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$. Bezeichnet man die Amplitude für den Mittelpunkt der Platte mit a, so ist die Bewegung des mittleren Qnerschnittes gegeben durch:

$$y = a \,.\, \sin 2\pi n t \tag{16}$$

und a in erster Annäherung bestimmt durch die Gleichung:

$$a = A \,.\, \sqrt{2}. \tag{17}$$

Für die im Schwingungsbauche auftretende Doppelbrechung ist die Krümmung der Platte maassgebend. Der reciproke Wert des Krümmungsradius $1/\varrho$ ist gleich

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{d^2 u}{d x^2} \sin 2\pi n t.$$

Berechnet man $d^2 u/d x^2$ in derselben Weise wie oben u aus dem vollständigen Ausdrucke für u, setzt $x = l/2$ und berücksichtigt dieselben Beziehungen, wie bei der Berechnung von u, so erhält man für $p = p_3$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{d x^2} &= -\frac{A}{\cos\frac{p_3}{2}} \frac{p_3^2}{l^2}\left(1 - \sqrt{\cos p_3}\right), \\ &= -u_0 \frac{p_3^2}{l^2} \frac{1 - \sqrt{\cos p_3}}{1 + \sqrt{\cos p_3}}, \\ &= -u_0 \frac{p_3^2}{l^2}\left(1 - 2\sqrt{\cos p_3}\right), \end{aligned}$$

wenn man die höheren Potenzen von $\sqrt{\cos p}$ vernachlässigt. Lässt man das ganze Correctionsglied fort, wie bei den nachfolgenden Anwendungen erlaubt ist, so hat man die einfache Beziehung:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -a\left(\frac{7\pi}{2l}\right)^2 \cdot \sin 2\pi n t. \tag{18}$$

Man erhält die Formeln (16) und (18) auch unmittelbar aus den Formeln (11) und (13), wenn man in diesen

$$x = \frac{l}{2} \quad \text{und} \quad p = 7\frac{\pi}{2}$$

setzt, und den letzten Summanden $e^{-p/2}$ als kleine Grösse vernachlässigt.

b) Die Lage der Schwingungsknoten ist bestimmt durch die Bedingung $u = 0$. Von Interesse für das Folgende ist die Grösse der tangentialen Kraft im Knoten, die durch Gleichung (2) als Function von $\partial^3 y/\partial x^3$ definirt war. Die vollständige Durchrechnung des Ausdruckes $d^3 u/d x^3$ führt in diesem Falle, wegen der complicirteren Bedingung für den Wert von x, auf keine in dem Grössenverhältnis ihrer Glieder leicht zu überblickende Endformel. Wir begnügen uns daher von vornherein mit dem den Formeln (11) bis (14) zu Grunde liegenden Grade der Annäherung. Die Bedingung $y = 0$ ergiebt aus (11) die Gleichung:

$$e^{-\frac{p x}{l}} = \sin\frac{p x}{l} - \cos\frac{p x}{l},$$

und dies in Gleichung (14) eingesetzt, ergiebt:

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 2A\frac{p^3}{l^3}\cos\frac{p x}{l} \cdot \sin 2\pi n t.$$

Setzt man für p den Wert $7\pi/2$ ein, so ist für die beiden mittleren Knoten nach den Rechnungen von Strehlke und Seebeck

$$\frac{p x}{l} = 1{,}2453\,\pi \quad \text{bez.} \quad = 2{,}2547\,\pi,$$

$\cos p x/l$ also sehr nahe gleich $\mp\sqrt{\tfrac{1}{2}}$. Daraus folgt:

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = a\left(\frac{7\pi}{2l}\right)^3 \sin 2\pi n t. \tag{19}$$

Nach Feststellung dieser Grössenbeziehungen gehe ich dazu über, die durch die Schwingungen der Platte hervorgerufene Doppelbrechung an der Hand der photographischen Aufnahmen zu besprechen.

3. Die Erscheinungen im Schwingungsbauch.

a) *Allgemeiner Charakter der Erscheinung.* Die im Schwingungsbauch auftretende Doppelbrechung ist von derselben Art, wie sie durch eine statische Durchbiegung der Platte hervorgebracht werden kann. Von der unverändert bleibenden Mitte der Platte aus gerechnet wird das Glas auf der concaven Seite der gebogenen Platte zusammengedrückt, auf der convexen gedehnt. Zug- und Druckrichtung fallen in die Längserstreckung der Platte. Die Hauptaxen der entstehenden Doppelbrechung liegen daher parallel und senkrecht zur Plattenoberfläche, und die Nicol'schen Prismen müssen mit ihren Polarisationsebenen unter 45^0 zur Längsrichtung der Platte eingestellt werden, um die Interferenzen in ihrer grössten Deutlichkeit hervortreten zu lassen.

Die Stärke der Doppelbrechung wächst von der neutralen Mittellinie an nach den Oberflächen der Platten zu, und ist dem Abstand von der Mittellinie proportional. Im parallelen Lichte beobachtet man daher eine von der dunklen Mittellinie aus nach beiden Seiten stetig wachsende Phasendifferenz. Die Linien gleicher Phasendifferenz sind, wenigstens in der Nähe des Schwingungsbauches, Linien, die der neutralen Mittellinie parallel laufen. Ihr Abstand von der Mittellinie wird um so kleiner, je stärker die Platte gekrümmt wird. Schwingt der mittlere Querschnitt der Platte nach dem Gesetz der Gleichung (16), so ist die Doppelbrechung in ihm gleich Null in den Augenblicken, in denen die Platte durch ihre Ruhelage geht; mit wachsender Elongation nähern sich die Linien gleicher Phasendifferenz der Mittellinie, erreichen ihren kleinsten Abstand im Augenblick der grössten Ausweichung, und entfernen sich dann wieder; sie schwingen also während einer halben Schwingung der Platte einmal hin und zurück.

Diese Schwingungen der isochromatischen Curven sind in der im Abschnitte 1 beschriebenen Weise zeitlich analysirt

und photographisch aufgenommen. Figg. 1—4 der Taf. I geben diese Aufnahmen für vier verschieden starke Schwingungszustände der Platte wieder. Die Amplitude a der Plattenschwingungen ist an den Aufnahmen unmittelbar aus den Sinuslinien zu entnehmen, welche die beiden Plattenränder gezeichnet haben. Dieselbe Sinuscurve beschreibt natürlich auch die neutrale Mittellinie, wie namentlich an den Aufnahmen mit grosser Amplitude ersichtlich ist. Die neutrale Mittellinie wird in gleichmässigen Abständen von senkrecht zu ihr verlaufenden dunklen Linien gekreuzt. Diese treffen die Plattenränder genau in der Mitte zwischen Berg und Thal der Sinuscurven; sie entsprechen denjenigen Augenblicken, in denen die Platte durch die Ruhelage ging und ohne Doppelbrechung war. Innerhalb jeder der so gebildeten Abteilungen sieht man die Punkte gleicher Phasendifferenz, indem sie an die neutrale Zone heran und wieder fortschwingen, eine eigentümliche Curve beschreiben. Die dunklen Curven in den Figuren entsprechen den Gangdifferenzen λ, 2λ, 3λ, die Mitten der hellen Zwischenräume zwischen ihnen den Gangdifferenzen $\lambda/2$, $3\lambda/2$, $5\lambda/2$. Dabei ist unter λ die mittlere Wellenlänge des photographisch wirksamen Lichtes verstanden; sie ist in einer früheren Arbeit zu 0,000428 mm ermittelt worden.[1] Es soll nun zunächst das Gesetz dieser eigentümlichen, isochromatischen Curven entwickelt werden.

b) *Die Gleichung der isochromatischen Curven.* Wir können die Stärke der Doppelbrechung der Grösse der elastischen Deformation proportional setzen. Es sei s die Länge eines Elementes der Platte in Richtung ihrer Längserstreckung; durch Verbiegung der Platte geht s über in $s + \delta s$. Dann können wir die Phasendifferenz Δ ansetzen in der Form:

$$\Delta = C \cdot \frac{\delta s}{s}, \tag{20}$$

eine Gleichung, die auch dem Vorzeichen nach richtig sein soll, indem wir die bei einer Verlängerung auftretende Doppelbrechung als positiv, die bei einer Verkürzung auftretende als negativ bezeichnen. Bedeutet η den Abstand des be-

1) W. König, Wied. Ann. **69**. p. 1—11. 1899.

treffenden Elementes von der neutralen Mittellinie, in der das Element bei der Verbiegung seine Länge s unverändert beibehalten würde, und bezeichnet ϱ den Krümmungsradius der Mittellinie, so besteht die Beziehung:

$$\frac{s + \delta s}{s} = \frac{\varrho - \eta}{\varrho}$$

oder

$$\frac{\delta s}{s} = -\frac{\eta}{\varrho}, \tag{21}$$

wobei der Krümmungsradius negativ zu rechnen ist, wenn er auf Seite der negativen y-Werte liegt. Für die Phasendifferenz folgt dann:

$$\varDelta = -C\frac{\eta}{\varrho},$$

und unter Benutzung von (18)

$$\left\{\begin{aligned} \varDelta &= C a \cdot \left(\frac{7\pi}{2l}\right)^2 \cdot \eta \cdot \sin 2\pi n t, \\ &= D \,.\, \eta \,.\, \sin 2\pi n t, \end{aligned}\right. \tag{22}$$

wenn man

$$D = C \cdot a \cdot \left(\frac{7\pi}{2l}\right)^2$$

setzt. Der Abstand der Punkte gleicher Phasendifferenz von der Mittellinie variirt also nach dem Gesetze:

$$\eta = \frac{\varDelta}{D \,.\, \sin 2\pi n t}.$$

Für die aufgenommenen Curven sind die Abscissen der Zeit proportional; unter passender Wahl des Maassstabes kann man setzen

$$x = 2\pi n t.$$

Die Ordinaten der Curven aber sind nicht einfach $= \eta$; es ist vielmehr zu berücksichtigen, dass die Mittellinie selber eine auf- und abschwingende Bewegung nach Gleichung (16) ausführt. Daher sind die Ordinaten der Curve

$$y = \eta + a \,.\, \sin 2\pi n t,$$

und die vollständige Gleichung der isochromatischen Curven ist:

$$y = \frac{\varDelta}{D \,.\, \sin x} + a \,.\, \sin x. \tag{23}$$

Dabei ist a die Amplitude der Plattenschwingung, D eine von a abhängige Grösse; beides also sind für eine gegebene Plattenschwingung Constante. Δ ist für jede Curve eine bestimmte Constante. Indem man diesem Parameter alle möglichen positiven oder negativen Werte erteilt, erhält man die ganze Schaar der isochromatischen Curven. Für die Mitte der dunklen Curven auf den Aufnahmen hat Δ ganzzahlige Werte, für die Mitte der hellen ist Δ gleich ungeraden Vielfachen von $\frac{1}{2}$; $\Delta = 0$ ergiebt die neutrale Mittellinie und die zu ihr senkrechten, dem Fehlen aller Doppelbrechung entsprechenden Geraden $x = 0, \pi, 2\pi$ etc.

Diese Geraden sind zugleich die Asymptoten für sämtliche isochromatischen Curven; denn für $x = 0, \pi, 2\pi$ etc. wird $y = \infty$ für alle endlichen Werte von Δ. Sie teilen das ganze Gebiet in lauter gleiche Abteilungen. Für ein bestimmtes Δ wechselt das Vorzeichen von y von einer Abteilung zur nächsten. Die isochromatischen Curven bestehen daher aus lauter getrennten Aesten, die innerhalb jeder Abteilung asymptotisch zu den beiden Grenzlinien verlaufen und abwechselnd über und unter der Nulllinie liegen, mit symmetrischem Verlauf zu dieser.

Um ein besseres Bild von der Beschaffenheit dieser Curven zu geben, habe ich von einer der Aufnahmen nach dem Originalnegative ein etwa 20 mal vergrössertes Diapositiv hergestellt, das in Taf. II wiedergegeben ist. Leider ist die Reproduction nicht in der wünschenswerten Deutlichkeit ausgefallen, wie auch die Lichtdruckbilder der Taf. I die grosse Schärfe der Originalaufnahmen nur unvollkommen wiedergeben. Für diese vergrösserten Curven wurden die Constanten der Formel durch folgende Messungen festgelegt.

1. Die Breite jeder Abteilung von $x = 0$ bis $x = \pi$ beträgt 25,5 mm.

2. Die Ordinatendifferenz zwischen Berg und Thal der vom Rande der Glasplatte beschriebenen Sinuscurve, also die doppelte Amplitude der Schwingung, $2a$, beträgt 6,5 mm.

3. Der kleinste Abstand der Curven $\Delta = +1$ und $\Delta = -1$ voneinander, d. h. die Grösse $2/D$, beträgt 37 mm.

Folglich ist die Gleichung der Curven:

$$y = \frac{18{,}5 \,.\, \Delta}{\sin 7{,}059\, x} + 3{,}25 \sin 7{,}059\, x,$$

wobei x und y in mm zu messen sind und das Argument des sin in Graden ausgedrückt ist. Nach dieser Gleichung sind die Curven für $\Delta = 0$, $\pm \frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$ und 3 berechnet und auf Millimeterpapier eingezeichnet worden. Diese Zeichnung ist dann in richtiger Lage auf das Diapositiv gelegt und mit diesem zugleich abcopirt worden. Man sieht auf der Taf. II die hellen feinen Linien der Zeichnung auf den helleren oder dunkleren Partien der photographischen Aufnahme verlaufen und überzeugt sich leicht, dass Form und Lage der isochromatischen Curven durch die obige Gleichung im wesentlichen richtig dargestellt wird. Wenn in einigen Fällen die berechneten Curven nicht genau in der Mitte der hellen und dunklen Curven der Aufnahme verlaufen, so kann diese Abweichung durch die im ersten Abschnitt besprochene Doppelbrechung, welche die Platte schon im natürlichen Zustande aufweist, bedingt sein. Ausserdem ist die richtige Uebereinanderlagerung bei der Lichtdruck-Wiedergabe nicht vollkommen gelungen.

c) *Das Vorzeichen der Doppelbrechung.* Schwingt die Platte nach oben im Sinne der Bilder, so ist die Doppelbrechung in der oberen Hälfte positiv, in der unteren negativ, umgekehrt wenn sie nach unten schwingt. Benachbarte Abteilungen haben daher, ebenso wie die beiden Hälften einer jeden Abteilung, entgegengesetztes Vorzeichen der Doppelbrechung. Man kann dieses Verhalten dadurch sichtbar machen, dass man eine Viertelundulations-Glimmerplatte zwischen Glasplatte und Analysator einschaltet in solcher Lage, dass ihre Hauptaxen mit den Hauptaxen der Doppelbrechung in der Glasplatte zusammenfallen. Die Fig. 5 und 6 auf Taf. I sind in dieser Weise gewonnen, und zwar hat bei Aufnahme 5 die Glimmerplatte so gelegen, dass sich ihre Wirkung auf die Phasendifferenz zu der der negativen Doppelbrechung addirte, von der der positiven subtrahirte; bei Aufnahme 6 war die Glimmerplatte um 90° gedreht und ihre Wirkung subtrahirte sich für die negative und addirte sich für die positive Doppelbrechung. Die Gleichung der isochromatischen Curven für diese beiden Fälle lässt sich aus Gleichung (23) dadurch herleiten, dass man für Δ einführt $\Delta \pm \frac{1}{4}$, wobei das Pluszeichen für Aufnahme 5, das Minuszeichen für Aufnahme 6 gelten würde. Die beiden Aufnahmen sind gewissermaassen zu einander complementär,

indem die Gangdifferenzen in ihnen für gleiche Punkte sich um eine halbe Wellenlänge unterscheiden; hell und dunkel ist daher in Aufnahme 5 gegen Aufnahme 6 vertauscht. Für die neutrale Mittellinie und die zu ihr senkrechten Linien $x = 0$, π, 2π etc. würde in beiden Aufnahmen die Gangdifferenz $\frac{1}{4}$ betragen, also eine mittlere Helligkeit für diese Stelle bedingen. Gleichwohl erscheinen diese Stellen in Aufnahme 5 ziemlich dunkel — die Curven $\Delta = 0$ sind noch durch dunklere Stellen miteinander verbunden — während sie in Aufnahme 6 fast von gleicher Helligkeit wie die hellen Maxima erscheinen. Diese Abweichung hat offenbar ihren Grund in der ursprünglichen Doppelbrechung der Platte, die, wie ich im 1. Abschnitt erwähnt habe, in der Mitte der Platte positiv ist. Die Gangdifferenz ist daher in der Nähe der neutralen Mittellinie bei Aufnahme 5 nicht $\lambda/_4$, sondern etwas kleiner, und bei Aufnahme 6 nicht $\lambda/_4$, sondern etwas grösser.

d) *Der Betrag der specifischen Doppelbrechung.* Aus den Aufnahmen lässt sich endlich das Verhältnis der Phasendifferenz zur elastischen Deformation, d. h. die Constante C der Formel (20), ermitteln. Allein die Phasendifferenz ist nur ein relatives Maass der Doppelbrechung. Sie ist ausserdem abhängig von dem Verhältnis der Dicke der durchstrahlten Schicht zur Wellenlänge. Um auf Zahlen zu kommen, die für das benutzte Glas unabhängig von seinen Dimensionen gelten, führe ich als Maass der Doppelbrechung die durch die Verbiegung erzeugte Differenz der Brechungsexponenten der beiden Strahlen im Glase ein:

$$\nu = n_1 - n_2.$$

Dann ist

$$\Delta = \frac{\nu b}{\lambda} = C \frac{\delta s}{s}$$

und folglich

$$\nu = \frac{C \lambda}{b} \cdot \frac{\delta s}{s} = G \cdot \frac{\delta s}{s}\,. \tag{24}$$

Die hier neu eingeführte Grösse G ist das Verhältnis der Doppelbrechung zur Deformation oder das „Maass der specifischen Doppelbrechung“ für den hier vorliegenden Fall einer Dehnung oder Zusammendrückung in einer Richtung. Sie ist eine charakteristische Constante des Glases, vorausgesetzt, dass

strenge Proportionalität zwischen der Doppelbrechung und der Deformation besteht. Ich berechne G aus der maximalen Doppelbrechung, die im Schwingungsbauche bei der grössten Ausweichung der Platte stattfindet. Für diese ist nach (22):

$$\Delta = G \cdot \frac{b}{\lambda} \cdot a \cdot \left(\frac{7\pi}{2l}\right)^2 \cdot \eta .$$

also:

$$G = \frac{4\lambda l^2}{49 \cdot \pi^2 b} \cdot \frac{\Delta}{a\eta} . \tag{25}$$

Der die Veränderlichen eines jeden Versuches enthaltende Factor $\Delta / a\eta$ ist aus einer Reihe verschiedener Aufnahmen in der Weise abgeleitet worden, dass an den Originalnegativen mit Hülfe eines Quincke'schen Kathetometermikroskopes mit Ocularmikrometer folgende Grössen gemessen wurden: 1. die Ordinatendifferenz von Berg und Thal der Sinuscurven des Plattenrandes, also die doppelte Amplitude $2a$ und 2, der kürzeste Abstand 2η zweier Curven derselben Abteilung von entgegengesetzt gleicher Phasendifferenz, und zwar für $\Delta = \pm 1, \pm 2, \pm 3$. Die nachfolgende Tabelle enthält die gemessenen Werte von $2a$ und 2η in Teilen der Ocularscala und die daraus berechneten Werte von $\Delta / a\eta$. Sie hat den Zweck zu zeigen, bis zu welchem Grade sich $\Delta / a\eta$ als Constante aus diesen Messungen ergiebt. Wenn man von der letzten

Tabelle 1.

Ausmessung der Interferenzen im Schwingungsbauch.

$2a$	2η			$\Delta/a\eta$		
	$\Delta = 1$	$\Delta = 2$	$\Delta = 3$	$\Delta = 1$	$\Delta = 2$	$\Delta = 3$
3,5	17,5	35,5	53,0	0,0653	0,0644	0,0647
3,5	16,0	32,5	—	714	703	—
3,4	17,5	35,0	—	672	672	—
3,2	17,5	35,5	—	714	704	—
3,1	19,0	39,0	—	679	662	—
3,0	21,0	42,5	—	635	628	—
3,0	20,0	40,5	—	667	658	—
2,25	27,5	56,0	—	647	635	—
2,2	27,5	55,0	—	661	661	—
2,0	33,0	—	—	606	—	—

Zahl absieht, die offenbar zu klein ausgefallen ist, gruppiren sich die Zahlen unregelmässig um den Mittelwert 0,0663. Dass die Schwankungen beträchtlich sind, rührt wesentlich von der Unsicherheit der Messung der kleinen Grösse $2a$ her; der Plattenrand erscheint in der Vergrösserung des Mikroskopes nicht hinreichend scharf, um eine ganz exacte Messung der Schwingungsamplitude zu gestatten. Leider ist für diese Zahlen eine Umrechnung auf Millimetermaass nicht möglich, weil ich es seinerzeit verabsäumt hatte, das Grössenverhältnis zwischen dem Bild auf der Platte und dem Object durch besondere Messungen für diese Aufnahmen festzustellen. Derartige Messungen liegen aber für andere Aufnahmen vor, die unter etwas anderen Verhältnissen angestellt waren, sodass der für sie gefundene Reductionsfactor auf die obigen Aufnahmen nicht übertragen werden konnte. Ich komme auf diese Aufnahmen, die im besonderen zum Zweck quantitativer Vergleichungen der Vorgänge im Bauch und im Knoten gemacht wurden, und von denen einige in Fig. 10 und 11 der Taf. I wiedergegeben sind, weiter unten ausführlicher zu sprechen. Hier will ich nur die Zahlen angeben, die sich für die Grössen a und η aus den Interferenzcurven des Schwingungsbauches ergeben haben. Ich drücke sie in diesem Falle gleich in mm aus. Aufnahme 10 ergiebt mit ihrer sehr kleinen Amplitude sehr unsichere Werte. Aus Aufnahme 11 ergiebt sich im Mittel aus drei Messungen:

$$a = 0{,}13\,\text{mm}, \quad \eta = 1{,}14\,\text{mm für } \Delta = 1, \quad \text{also } \frac{\Delta}{a\,\eta} = 6{,}75.$$

Zwei andere Aufnahmen, die auf der Tafel nicht wiedergegeben sind, ergeben:

$$a = 0{,}18\,\text{mm}, \quad \eta = 0{,}95\,\text{mm für } \Delta = 1, \quad \text{also } \frac{\Delta}{a\,\eta} = 5{,}85$$

$$a = 0{,}23\,\text{mm}, \quad \eta = 0{,}62\,\text{mm für } \Delta = 1, \quad \text{also } \frac{\Delta}{a\,\eta} = 7{,}01.$$

Im Mittel folgt daraus für $\Delta/a\,\eta : 6{,}53$. Der constante Factor in Formel (25) ergiebt sich mit $\lambda = 0{,}000428$, $l = 700$, $b = 70$ mm zu 0,0248, und danach

$$G = 0{,}162.$$

Ich vergleiche schliesslich dieses Ergebnis mit dem Resultat von Messungen, die an derselben Platte bei statischer Durchbiegung angestellt wurden.

e) *Bestimmung von G auf statischem Wege.* Die Platte wurde in der Weise verbogen, dass sie in der Nähe ihrer Enden unterstützt, in der Mitte belastet wurde. Um dabei die Grösse der Durchbiegung unabhängig von einem Nachgeben der Auflager bestimmen zu können, wurde der Kunstgriff benutzt, den schon F. Neumann bei seinen Messungen über die Doppelbrechung in gebogenen Glasplatten benutzt hat.[1]) Es wurde eine zweite Glasplatte von genau gleichen Dimensionen beschafft; beide wurden, in der Nähe ihrer Enden durch Messingstäbe getrennt, übereinander gelegt und nun in der Mitte zusammengepresst, indem bei wagerechter Lage die untere Platte in der Mitte unterstützt, die obere in der Mitte mit Hülfe eines übergelegten Stabes mit angehängten Gewichten belastet wurde. Bei dieser Anordnung biegen sich beide Platten durch die angehängten Gewichte in gleichem Maasse durch. Die mit dem Kathetometermikroskop gemessene Verminderung ihres Abstandes war gleich der doppelten Durchbiegung jeder einzelnen Platte. Bei einem Abstand l' der Auflager von 568,5 mm ergaben sich im Mittel aus 4 verschiedenen Messungsreihen für die Abstandsänderung der beiden Platten folgende Werte:

für	1	2	3 kg Belastung
	0,47	0,99	1,47 mm

also im Mittel für je ein Kilo Belastung 0,488 mm. Die Durchbiegung jeder einzelnen Platte oder die Senkung α ihrer Mitte gegen die Lage im unbelasteten Zustande würde demnach für jedes Kilo Belastung 0,244 mm betragen.

Um die Interferenzen für genau die gleichen Wellenlängen zu erhalten, wie oben bei den Schwingungsversuchen, wurde die Doppelbrechung auch bei diesen statischen Versuchen nicht direct beobachtet, sondern photographisch aufgenommen, und zwar sowohl bei gekreuzten, wie bei parallelen Nicols für die Belastungen 0, 1, 2 und 3 kg. An den Platten wurden

---

1) F. Neumann, Abhandlungen d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin 1841. II. Teil. p. 45.

wieder mit einem Kathetometermikroskop folgende Grössen ausgemessen: 1. die Abstände der isochromatischen Linien von der Mittellinie für $\Delta = \pm 1, 2, 3$ und 2. die Abstände der Platten voneinander. Ich gebe in der Tab. 2 die aus diesen Messungen gewonnenen Mittelwerte, und zwar bedeutet η (η_0 bis η_3 für die Belastungen 0—3 kg) den Abstand des Interferenzstreifens ($\Delta = 1$) von der neutralen Mittellinie, und a (a_1, a_2, a_3) die durch die Belastung hervorgebrachte Durchbiegung der Platten, beide Grössen in Scalenteilen des Ocularmikrometers ausgedrückt. Für die Berechnung ist aber zu berücksichtigen, dass die Grössen a_1 bis a_3 nicht die vollständigen Durchbiegungen der Platten angeben, da die Platten schon bei der Belastung Null infolge der gewählten Versuchsanordnung eine gewisse Durchbiegung erfahren. Bezeichnet man diese mit α_0, so sind die wahren Durchbiegungen der Platten bei den Belastungen 1, 2 und 3 kg

$$\alpha_1 = \alpha_0 + a_1, \quad \alpha_2 = \alpha_0 + a_2, \quad \alpha_3 = \alpha_0 + a_3.$$

Die Platten zeigen daher auch schon bei der Belastung Null eine gewisse Doppelbrechung und geben einen messbaren Wert η_0 für η. Wenn man berücksichtigt, dass $\eta \times \alpha$ constant sein muss, so lässt sich α_0 aus den Beobachtungen berechnen, indem man die Gleichungen ansetzt:

$$\eta_0 \alpha_0 = \eta_1 (\alpha_0 + a_1) = \eta_2 (\alpha_0 + a_2) = \eta_3 (\alpha_0 + a_3).$$

Den aus diesen Beziehungen im Mittel sich ergebenden Wert von α_0 und die daraus berechneten Beträge der wahren Durchbiegungen α_1, α_2, α_3 enthält die vierte Columne der Tabelle; die fünfte giebt die Producte $\eta \times \alpha$, um zu zeigen, wie weit dieselben constant sind.

Tabelle 2.

Ausmessung der Interferenzen bei statischer Biegung.

Belastung	η	a	α	$\alpha \cdot \eta$
0 kg	7,20 sc.	— sc.	1,71 sc.	12,31
1	4,76	0,88	2,59	12,33
2	3,54	1,75	3,46	12,25
3	2,90	2,54	4,25	12,32

Um auf Millimeter umzurechnen, berücksichtigt man, dass die mittlere Durchbiegung für je 1 kg Belastung 0,862 Sct. beträgt. Für diese Grösse hatte die directe Beobachtung 0,244 mm bei einem Werte von $l' = 568{,}5$ mm ergeben. Bei den Versuchen über die Doppelbrechung war l' etwas kleiner, 566,5 mm, demgemäss würden 0,862 Sct. gleich 0,242 mm sein, oder 1 Sct. gleich 0,280 mm. Multiplicirt man den Mittelwert von $\alpha \times \eta$ (12,30) mit dem Quadrat dieses Reductionsfactors, so erhält man in Millimetermaass $\alpha \times \eta = 0{,}969$.

Um daraus G zu berechnen, muss der Krümmungsradius der Platte aus der Gleichung ermittelt werden, welche die Gestalt des durchgebogenen Stabes bestimmt. Liegt der Stab auf den beiden Lagern im Abstande l' auf und wird in der Mitte mit dem Gewicht P belastet, so ist seine Gestalt durch die Gleichung gegeben:

$$y = -\frac{P}{8 \,.\, E \,.\, b\, d^3}\{\pm 8\, x^3 - l'^3 - 3\, l' (4\, x^2 - l'^2)\},$$

wobei der Nullpunkt der Abscissen in der Mitte des Stabes liegt und das obere Zeichen im ersten Klammergliede für die positiven, das untere für die negativen Abscissen gültig ist. Für die Mitte ergiebt sich daraus die Senkung:

$$\alpha = -\frac{P\, l'^3}{4\, E\, b\, d^3}$$

und der Krümmungsradius

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d^2 y}{d\, x^2} = \frac{3\, P\, l'}{E\, b\, d^3} = \frac{12\, \alpha}{l'^2}.$$

Daraus folgt

$$G = \frac{\lambda \,.\, l'^2}{12 \,.\, b} \cdot \frac{\Delta}{\alpha \,.\, \eta}, \tag{26}$$

worin λ wieder $= 0{,}000\,428$, $l' = 566{,}5$, $b = 70$ mm zu setzen ist. Dann giebt der obige Wert von $\alpha \,.\, \eta$

$$G = 0{,}169.$$

Eine andere Beobachtungsreihe, bei der die Interferenzen sowohl in der oberen, als in der unteren Platte ausgemessen wurden, ergab für die obere Platte $G = 0{,}174$, für die untere $G = 0{,}170$. Die sehr nahe Uebereinstimmung dieser drei Werte dürfte wohl auf einem Zufall beruhen; denn die Einzelwerte der Messungen zeigen relativ grosse Schwankungen, besonders

in den kleinen Werten der Durchbiegung. Der kleinen Abweichung, welche die aus den Schwingungsbeobachtungen abgeleitete Zahl für G, 0,162, von den hier gefundenen Werten — im Mittel 0,170 — zeigt, dürfte daher eine bestimmte Bedeutung nicht beizulegen sein. Vielmehr glaube ich aus der nahen Uebereinstimmung der Zahlen den Schluss ziehen zu dürfen, dass die bei den Schwingungen im Bauche auftretende Doppelbrechung sich auch quantitativ aus der jeweiligen Verbiegung der Platte vollständig erklären lässt.

Der gefundene Wert von G steht übrigens in guter Uebereinstimmung mit den Werten, die von anderen Beobachtern für Glas gefunden worden sind. Die Doppelbrechung des Glases ist seit den ersten Beobachtungen, die Brewster[1]) darüber angestellt hat, mehrfach gemessen worden, so von F. Neumann in der schon genannten Arbeit, von Wertheim[2]), Mach[3]) und Pockels.[4]) Die von mir im Obigen eingeführte Grösse G entspricht dabei folgenden Grössen in der Bezeichnungsweise der verschiedenen Autoren:

bei F. Neumann und Mach $G = \frac{5}{4} \cdot \frac{p-q}{G^2}$,

bei Wertheim . . . . . $G = \frac{E}{C}$,

bei Pockels . . . . . . $G = n(1+\nu)\frac{p-q}{\omega^0}$.

Berechnet man hiernach die Grösse G aus den Angaben der verschiedenen Autoren, so findet man folgende Werte:

bei Brewster (nach der Berechnung von F. Neumann[5]) $G = 0{,}168$
bei F. Neumann . . . . $G = 0{,}157$
bei Wertheim für gewöhnliches Kronglas . . . . . $G = 0{,}179$
(bei anderen Glassorten liegen die Werte zwischen 0,1633 und 0,2182)
bei Mach . . . . $G = 0{,}168$
bei Pockels . . . . $G = 0{,}174$.

1) D. Brewster, Phil. Trans. Jahrgang 1816 (1. Teil) p. 156—178; Edinb. Trans. 8. p. 369. 1818.
2) W. Wertheim, Ann. chim. phys. (3) 40. p. 156—221. 1854.
3) E. Mach, Optisch-akustische Versuche. p. 16. Prag 1873.
4) F. Pockels, Wied. Ann. 37. p. 390—391. 1889.
5) F. Neumann, l. c. p. 49.

Danach liegt also G für gewöhnliches Glas zwischen 0,16 und 0,18 und zwischen diese Grenzen fallen auch die von mir gefundenen Werte.

4. Die Erscheinungen im Schwingungsknoten.

a) *Allgemeiner Charakter der Erscheinung.* Im freien Schwingungsknoten der Glasplatte tritt zwischen gekreuzten Nicols eine einfache Aufhellung ein, die sich ziemlich gleichmässig über die ganze Dicke der Platte zu erstrecken scheint. Sie ist am grössten, wenn die Schwingungsrichtungen der Nicols senkrecht und parallel zur Längserstreckung der Glasplatte liegen. Während also im Schwingungsbauche die Doppelbrechung von der neutralen Mitte aus nach den Rändern hin zunimmt und ihre Axen in die Längsrichtung der Platte und senkrecht zu ihr fallen, ist im Knoten die Doppelbrechung sehr nahe constant in der Dickenerstreckung der Platte und ihre Axen bilden mit der Längsrichtung der Platte Winkel von 45°. Die Grösse der Doppelbrechung ist gering; die Aufhellung geht auch bei den stärksten Schwingungen nicht über das Weiss der ersten Ordnung hinaus. Zerlegt man daher die Erscheinungen mit der Linsenscheibe, oder photographirt sie mit dem Fallpendel, wobei natürlich die Nicols auf die Lage der grössten Aufhellung eingestellt werden, so erhält man eine einfache Folge von hellen und dunklen Streifen (Fig. 7 der Taf. I). Die Abstände der Mitten der hellen oder der dunklen Streifen voneinander sind genau gleich der Breite der einzelnen Abteilungen der Bauchbilder; sie entsprechen also einer halben Schwingungsdauer der Platte, oder während einer ganzen Schwingung der Platte tritt zweimal Aufhellung und Wiederverdunkelung ein.

In zwei benachbarten Perioden dieser Erscheinung hat die Doppelbrechung entgegengesetzten Charakter. Man erkennt dies am besten, wenn man zwischen die Glasplatte und den Analysator noch einen Gypskeil einschiebt, der so geschnitten ist, dass seine Kante mit den Schwingungsrichtungen des Lichtes in der Gypsplatte Winkel von 45° bildet. Legt man einen solchen Gypskeil auf die Glasplatte im Knoten derart, dass die Interferenzstreifen des Keiles der Längsrichtung der Platte parallel laufen, so fallen die Axen der Doppelbrechung

im Gyps mit denen in der Glasplatte zusammen und es tritt je nach dem Vorzeichen der Doppelbrechung in der Glasplatte Addition oder Subtraction der Wirkung, also Verschiebung der Interferenzstreifen nach der einen oder der anderen Richtung ein. Bei der Aufnahme dieser Erscheinungen mit dem Fallpendel projicirt sich das Bild der Interferenzstreifen im Gypskeil zugleich mit dem Bilde der Glasplatte auf den Spalt *s* (Fig. 2) und zwar so, dass die Streifen senkrecht zum Spalt verlaufen. Macht man eine Aufnahme, ohne dass die Platte schwingt, so erhält man das Bild des ruhenden, unverschobenen Streifens (Fig. 8 auf Taf. I). Bei schwingender Platte aber verwandelt sich der geradlinige Streifen in eine Wellenlinie (Fig. 9 auf Taf. I), deren Periode der ganzen Periode der Plattenschwingung entspricht, indem der Streifen bei der einen Aufhellungsperiode nach oben, bei der nächsten nach unten verschoben wird.

Aufnahmen dieser Art geben zugleich ein Mittel an die Hand, um die Stärke der maximalen Doppelbrechung im Knoten zu messen. Die Amplitude der Wellencurve des Interferenzstreifens — die halbe Ordinatendifferenz von Berg und Thal der Curve — giebt die maximale Verschiebung des Streifens aus seiner Ruhelage. Misst man ausserdem auf den Aufnahmen den Abstand zweier benachbarter Streifen des Gypskeiles, deren Phasendifferenz eine ganze Schwingungsdauer beträgt, so bedeutet das Verhältnis beider Grössen die von der Glasplatte bewirkte maximale Phasendifferenz in Bruchteilen der Schwingungsdauer des Lichtes. Doch haben diese Messungen kein Interesse, wenn nicht zugleich die Amplitude der Plattenschwingung oder die gleichzeitige Stärke der Doppelbrechung im Schwingungsbauche festgestellt werden kann. Es war daher nötig, gleichzeitige Aufnahmen der Vorgänge im Bauch und im Knoten auszuführen. Die Anordnung dieser Versuche ist bereits auf p. 7 u. 8 beschrieben. Zwei Beispiele derartiger Aufnahmen enthält Taf. I unter Figg. 10 u. 11. Bevor ich jedoch auf die quantitative Vergleichung der beiden Arten von Doppelbrechung eingehe, empfiehlt es sich, die Beziehungen festzustellen, die in Bezug auf die Phasen und die Vorzeichen zwischen ihnen bestehen.

b) *Die Phase der Periode.* Die Doppelaufnahmen lassen ohne weiteres erkennen, dass die Maxima der Doppelbrechung

in den Knoten gleichzeitig mit denen in den Bäuchen eintreten. Die Doppelbrechung in den Knoten ist gleich Null in denjenigen Zeitpunkten, in denen auch die Doppelbrechung in den Bäuchen gleich Null ist, d. h. in denjenigen Zeitpunkten, in denen die Platte durch ihre Ruhelage hindurchgeht und ihre Deformation gleich Null ist. Die Doppelbrechung in den Knoten hat also nichts mit der Bewegung der Platte als solcher zu thun —, ein Gedanke, auf den vielleicht der Vergleich mit der gleichartigen Doppelbrechung in reibenden Flüssigkeiten führen könnte — sondern sie ist wie diejenige in den Bäuchen bedingt durch die in jedem Augenblicke vorhandene Deformation der Platte. Diese Deformation ist in den Bäuchen eine Biegung mit Dehnung und Zusammendrückung, wie sie oben genauer formulirt worden ist; in den Knoten ist die Deformation eine Scheerung. Die scheerende Kraft steht senkrecht auf der Längserstreckung der Platten und ist in erster Annäherung die gleiche für den ganzen Querschnitt. Bei einer solchen Deformation liegen die Axen der grössten Dehnung und der grössten Zusammendrückung unter 45° zur Richtung der scheerenden Kraft. Mit diesem Charakter der elastischen Deformation stimmt der Charakter der Doppelbrechung nach den obigen Darlegungen durchaus überein. Es erübrigt, diese Uebereinstimmung auch für das Vorzeichen der Doppelbrechung nachzuweisen.

c) *Das Vorzeichen der Doppelbrechung.* Ich habe die Doppelbrechung im Schwingungsbauche als positiv bezeichnet für die gedehnten, als negativ für die zusammengedrückten Teile des Glases. Die neutrale Mittellinie trennt das Gebiet der positiven von dem der negativen Doppelbrechung. Geht man vom Schwingungsbauche nach dem Knoten zu, so nimmt die Stärke der Doppelbrechung auf beiden Seiten der Mittellinie ab, wird im Knoten Null und wechselt bei weiterem Fortschreiten über den Knoten hinaus ihr Vorzeichen. Die Umgebung des Knotens wird also durch die Knotenlinie und die neutrale Mittellinie in vier Quadranten geteilt, von denen je zwei benachbarte entgegengesetztes Vorzeichen der durch Biegung der Platte entstehenden Doppelbrechung haben (vgl. Fig. 4). Für die scheerende Deformation im Knoten fällt dann, wie ohne weiteres ersichtlich ist, die Richtung der

grössten Dehnung in die positiven, die der grössten Zusammendrückung in die negativen Quadranten. Mit diesen Richtungen fallen die Axen der Doppelbrechung zusammen, und zwar hat im Glase derjenige Strahl die grössere Fortpflanzungsgeschwindigkeit, der in der Richtung der grössten Dehnung polarisirt ist, dessen Schwingungen also senkrecht zu dieser Richtung sich vollziehen. Die Polarisationsrichtung dieses Strahles will ich als die „positive Axe der Doppelbrechung" bezeichnen. Im Schwingungsbauche fällt diese positive Axe im gedehnten Teile in die Längsrichtung der Platte, im zusammengedrückten Teile steht sie senkrecht dazu. Für den Schwingungsknoten ist der Charakter der Doppelbrechung dann immer durch die einfache Regel bestimmt, dass die positive Axe der Doppelbrechung die positiven Quadranten halbirt.

Die Richtigkeit dieser Feststellung liesse sich an den Doppelaufnahmen prüfen; doch würde dieses Verfahren bei den complicirten räumlichen Beziehungen sehr unübersichtlich sein. Ich ziehe es vor, einige Erscheinungen zu beschreiben, die in der Nähe des Knotens auftreten, und deren Erklärung sich aus der obigen Feststellung über den Charakter der Doppelbrechung ohne Schwierigkeit gewinnen lässt. Man nimmt sie wahr, wenn man die schwingende Platte in der Knotengegend zwischen gekreuzten Nicols direct, ohne Spalt und Linsenscheibe, untersucht, sodass man nicht bloss die Knotenlinie selbst, sondern auch die benachbarten Teile der Platte zu überblicken vermag. Stehen die Nicols mit ihren Schwingungsebenen parallel und senkrecht zur Längsrichtung der Platte, so tritt während der Schwingung nur eine gleichmässige Aufhellung ein, die im Knoten am stärksten ist und nach den Bäuchen zu allmählich abnimmt. Stehen die Nicolebenen unter 45° zur Längsrichtung der Platte, so bleiben Knoten- und Mittellinie dunkel, die vier Quadranten aber hellen sich auf, und die Stärke der Aufhellung wächst mit der Entfernung vom Knoten und von der Mittellinie. Dreht man die Nicols aus dieser 45°-Stellung heraus in eine mittlere Stellung, so treten beide Aufhellungen gleichzeitig ein; die dunkle Mittellinie aber teilt sich in zwei getrennte und nach entgegengesetzten Seiten gebogene Aeste, die, je nachdem das Nicolsystem nach rechts oder nach links herumgedreht ist, die in

Fig. 3a oder in Fig. 3b skizzirte Lage haben. Der Vorgang erklärt sich aus dem Zusammenwirken der beiden verschiedenen Arten von Doppelbrechung, die einerseits aus der Scheerungs-, andererseits aus der Biegungsdeformation der Platte hervorgehen. Ich will mir eine genauere Erörterung dieser Erscheinungen für eine spätere Gelegenheit vorbehalten und mich an dieser Stelle damit begnügen, das Resultat des Zusammen-

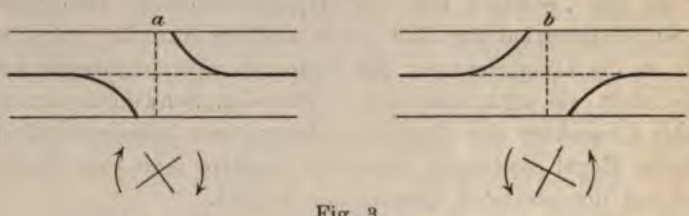


Fig. 3.

wirkens der beiden elastischen Deformationen durch eine Skizze zu erläutern, um an dieser die Entstehung der in Fig. 3 dargestellten Erscheinung und ihren Zusammenhang mit dem Vorzeichen der Doppelbrechung demonstriren zu können.

Die kurzen Striche in Fig. 4 bedeuten die Richtung der positiven Axe der Doppelbrechung; die gestrichelten Linien

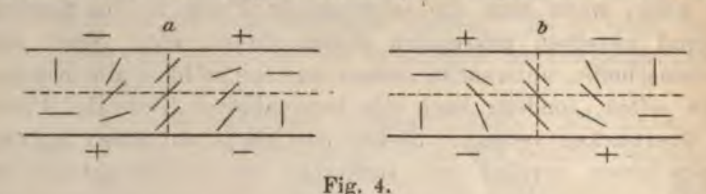


Fig. 4.

stellen die Knotenlinie einerseits, die neutrale Mittellinie andererseits dar. Es sind die beiden entgegengesetzten Fälle gezeichnet, dass die aus der Biegung hervorgehende Doppelbrechung, vom Knoten aus gerechnet, einmal im rechten oberen und linken unteren, das andere Mal im linken oberen und rechten unteren Quadranten positives Vorzeichen hat. Die Richtung der positiven Axe im Knoten ist den obigen Ueberlegungen gemäss jedesmal parallel zur Halbirungslinie der positiven Quadranten eingezeichnet. Die Figuren veranschaulichen, in welcher Weise die Richtung der positiven Axe sich aus der dem einen Schwingungsbauche zukommenden Lage

beim Durchgang durch den Knoten in die um 90° verschiedene Lage im anderen Schwingungsbauche allmählich herumdreht. Denkt man sich nun das Nicolsystem aus der 45°-Stellung heraus nach rechts gedreht, so lehrt die Betrachtung der Figuren unmittelbar, dass in den beiden gezeichneten Fällen Auslöschung an bestimmten Stellen des rechten oberen und des linken unteren Quadranten eintreten muss; umgekehrt bei Drehung nach links. Diesen Folgerungen aus den Zeichnungen entsprechen die in Fig. 3 dargestellten Thatsachen. Sie können also als Beweis für die Richtigkeit der Behauptungen angesehen werden, die ich oben hinsichtlich des Vorzeichens der Doppelbrechung im Knoten aufgestellt habe.

Ich füge in Bezug auf die beschriebenen Erscheinungen noch die folgenden Bemerkungen hinzu: Aus der obigen Darlegung folgt, dass für die beiden gezeichneten Fälle die Curven bei derselben Nicolstellung die gleiche Lage haben. Sie ändern also die Lage nicht, während die Platte aus einer Verbiegung in die entgegengesetzte hinüberschwingt, und sind daher auch während der Schwingung deutlich sichtbar. Die Form der Curven aber, wie sie in Fig. 3 dargestellt ist, entspricht nicht ganz den Beobachtungen. Die Curven machten zwar den Eindruck von Hyperbeln, doch war die Knotenlinie augenscheinlich nicht die eine Asymptote. Auch machten sich Verzerrungen der Curven bemerklich, indem in diesem Bereich geringer künstlicher Doppelbrechung die ursprüngliche Doppelbrechung der Glasplatte stärkere Störungen verursachte. Der in Fig. 3 gezeichnete Fall würde verwirklicht sein, wenn die Platte vollkommen homogen und die durch Scheerung hervorgerufene Doppelbrechung durch die ganze Plattendicke constant wäre. Wie weit die Abweichungen durch die Nichterfüllung dieser letzteren Bedingung oder durch die Inhomogenität der Platte verursacht sind, soll hier nicht weiter untersucht werden. Ich werde später auf diesen Punkt zurückkommen.

d) *Die Grösse der Doppelbrechung.* Die Doppelaufnahmen wurden mit dem Kathetometermikroskop ausgemessen und zwar wurden folgende Grössen festgestellt: 1. an dem Knotenbilde die Amplitude der Wellencurve des Interferenzstreifens und der Abstand zweier Interferenzstreifen voneinander — das Verhältnis beider Zahlen giebt die Phasendifferenz Δ_k im

Knoten —; 2. an dem Bauchbilde die Amplitude a der Plattenschwingung und der kürzeste Abstand η einer Curve von bestimmter Phasendifferenz Δ_b von der Mittellinie. Ferner wurden auf Glas geritzte Millimeterscalen am Ort des Knotens und am Ort des Bauches auf die Glasplatte gelegt und die Grösse ihres Bildes auf der Mattscheibe des Fallpendels mit demselben Mikroskop ausgemessen. Diese Messung ergab unmittelbar den Factor, mit dem die Ausmessungen an den Negativplatten zu multipliciren waren, um sie auf die wirkliche Grösse des Objectes in Millimetern zu reduciren. Die beiden am besten gelungenen Aufnahmen ergaben auf diese Weise folgende Zahlen:

$$\text{für } a = 0{,}18 \text{ mm}, \quad \Delta_k = 0{,}26, \quad \Delta_k/a = 1{,}444,$$
$$\text{für } a = 0{,}23 \text{ mm}, \quad \Delta_k = 0{,}33, \quad \Delta_k/a = 1{,}435.$$

Die Phasendifferenz ist also der Amplitude der Schwingung proportional und wird, wenn die letztere in Millimetern gemessen wird, durch die Formel

$$\Delta_k = 1{,}44 \times a$$

ausgedrückt. Anstatt das Verhältnis von Δ_k zur Amplitude a zu bilden, kann man das Verhältnis zur Doppelbrechung im Bauche bilden, die ja ebenfalls mit a proportional ist. Die Resultate der Messung von Δ_b, a und η habe ich oben bereits angeführt (vgl. p. 21). Danach ist:

$$\Delta_b = 6{,}53 \times a \times \eta,$$

folglich:

$$\frac{\Delta_k}{\Delta_b} = \frac{0{,}22}{\eta}. \tag{27}$$

Es bleibt nun schliesslich die Frage zu erörtern, ob sich diese empirisch gefundene Grössenbeziehung zwischen den beiden optischen Erscheinungen aus der Grössenbeziehung der elastischen Vorgänge im Knoten und im Bauch ausreichend erklären lässt.

5. Theorie der optischen Erscheinungen.

Die beiden an der schwingenden Glasplatte beobachteten Doppelbrechungen sind nicht ohne weiteres miteinander vergleichbar, weil sie von zwei ganz verschiedenen elastischen Deformationen herrühren. Um die Beziehungen zu entwickeln,

bediene ich mich der von F. Neumann aufgestellten Gleichungen.[1]) Es seien α, β, γ drei zu einander senkrechte „relative Dilatationen"; v_x, v_y, v_z seien die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des Lichtes für Strahlen, deren Schwingungen sich im deformirten Körper parallel zu α, β, γ vollziehen, die also mit ihrer Fortpflanzungsrichtung und ihrer Polarisationsrichtung senkrecht zu den genannten Richtungen liegen. Endlich sei v die Geschwindigkeit des Lichtes im nicht deformirten Glase. Dann kann man ganz allgemein ansetzen:

$$v_x = v + q \cdot \alpha + p\beta + p\gamma,$$
$$v_y = v + p \cdot \alpha + q\beta + p\gamma,$$
$$v_z = v + p \cdot \alpha + p\beta + q\gamma.$$

Ich denke mir im Folgenden die x-Axe stets in die Richtung der grössten Dehnung gelegt; die z-Axe in die Richtung des durchfallenden Lichtes. Dann ist die beobachtete Phasendifferenz bestimmt durch die Differenz der beiden Geschwindigkeiten v_x und v_y nach der Formel:

$$\Delta = \frac{b}{\lambda}(n_x - n_y)$$
$$= \frac{b \cdot v_0}{\lambda} \frac{v_y - v_x}{v_y \cdot v_x},$$

in der v_0 die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raume bedeutet. Im Product des Nenners kann bei kleinen Deformationen der Unterschied der Grössen v_x und v_y von v vernachlässigt werden. Setzt man dann noch den Brechungsexponenten des Glases $v_0/v = N$, so ist:

$$\Delta = \frac{b\,N^2}{\lambda \cdot v_0}(p - q)(\alpha - \beta).$$

Im Knoten hat die Deformation den Charakter einer Schiebung. Die Richtungen der grössten Dehnung und Zusammendrückung liegen unter 45° zur Richtung der scheerenden Kraft; die Zusammendrückung hat dieselbe Grösse wie die Dehnung, und in der dritten Richtung ist die Deformation gleich Null, also $\beta = -\alpha$, $\gamma = 0$:

$$\Delta_k = \frac{b \cdot N^2}{\lambda \cdot v_0}(p - q) \cdot 2\,\alpha_k,$$

wenn α_k die Dehnung im Knoten bedeutet.

---

1) F. Neumann, l. c.

Im Bauche hat die Deformation den Charakter einer Dehnung (oder Zusammendrückung) in einer Richtung und einer Contraction (oder Dilatation) in allen dazu senkrechten Richtungen. Das Verhältnis der Quercontraction zur Längsdilatation werde mit μ bezeichnet. Dann ist zu setzen:

$$\beta = \gamma = -\mu\alpha,$$

also

$$\Delta_b = \frac{b \,.\, N^2}{\lambda \,.\, v_0}(p-q)(1+\mu)\alpha_b.$$

Streng genommen wäre noch zu berücksichtigen, dass bei der Dehnung der Platte die durchstrahlte Dicke b sich verkürzt um $\mu\alpha b$; doch ist das davon herrührende Correctionsglied von der zweiten Ordnung der Kleinheit und deshalb zu vernachlässigen.

Danach ist also:

$$\frac{\Delta_k}{\Delta_b} = \frac{2}{1+\mu} \cdot \frac{\alpha_k}{\alpha_b}.$$

Es handelt sich jetzt also darum, das Verhältnis der Dehnungen α_k und α_b im Knoten und im Bauch aus den Gesetzen für die elastische Verbiegung der Platte bei der Schwingung zu bestimmen. Die Grösse α_b ist unmittelbar aus der Krümmung der Platte zu berechnen:

$$\alpha_b = \frac{\eta}{\varrho} = \eta \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Nicht so einfach ist die Frage nach der Grösse von α_k. Die elastische Deformation im Knoten besteht in einer Schiebung des Querschnittes in der Schwingungsebene der Platte. Ist σ_k die Grösse dieser Schiebung, so ist nach bekannten Sätzen der Elasticitätslehre die unter 45° zur Richtung der Schiebung liegende grösste Dehnung halb so gross wie die Schiebung, also:

$$\alpha_k = \tfrac{1}{2}\sigma_k.$$

Es bleibt also die Frage zu beantworten, wie σ_k zu berechnen ist. Würden sich die Querschnitte parallel mit sich selbst verschieben, um δy für zwei Querschnitte, die um δx entfernt sind, so wäre

$$\sigma_k = \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Mit dieser Annahme würde man für die Constante der Formel (27) 51 statt 0,22 erhalten, also einen ganz falschen

Wert. Die Querschnitte verschieben sich eben nicht parallel mit sich selbst, sondern neigen sich gegeneinander in dem Maasse, als sich die Axe des Stabes krümmt; die Schiebungen der Querschnitte gegeneinander aber sind bedingt durch die Aenderungen der Krümmung und sind diesen nach Gleichung (2) proportional. Ist P die durch diese Gleichung definirte tangentiale Kraft, n der Starrheitscoefficient des Glases, so ist:

$$\sigma_k = \frac{P}{n},$$

folglich:

$$\alpha_k = \frac{E}{2n} \frac{d^2}{12} \cdot \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}.$$

Zwischen dem Elasticitätsmodul E und dem Starrheitscoefficienten n besteht aber die Beziehung:

$$n = \frac{E}{2(1+\mu)}.$$

Daraus folgt:

$$\alpha_k = (1+\mu) \frac{d^2}{12} \cdot \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$$

und

$$\frac{\Delta_k}{\Delta_b} = \frac{d^2}{6 \cdot \eta} \times \frac{\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}.$$

Unter Berücksichtigung der Formeln (18) und (19) ergiebt sich daraus für die schwingende Platte:

$$\frac{\Delta_k}{\Delta_b} = \frac{p \cdot d^2}{6 \cdot l} \times \frac{1}{\eta} \cdot = \frac{7 \pi d^2}{12 l} \times \frac{1}{\eta}$$

und wenn man die Dimensionen der Platte einsetzt:

$$\frac{\Delta_k}{\Delta_b} = 0{,}128 \times \frac{1}{\eta}.$$

Nach dieser Theorie würde also der empirisch bestimmte Wert der Constante nicht ganz doppelt so gross sein (0,22 gegen 0,13) wie der theoretische.

Doch auch diese Theorie entspricht der Wirklichkeit nur in sehr geringer Annäherung. Eine strenge Theorie der Biegung eines Stabes ist von de Saint-Venant[1]) entwickelt worden. Nach dieser sind die tangentialen Kräfte im Querschnitt des gebogenen Stabes nicht constant, sondern von Punkt zu Punkt

1) de Saint-Venant, Liouville's Journal (2) 1. p. 89–189. 1856.

veränderlich, und zwar sind scheerende Kräfte an jedem Elemente wirksam nicht bloss in der Ebene der Biegung (der xy-Ebene in der obigen Bezeichnungsweise), sondern auch in der durch die Axe des Stabes hindurchgehenden, auf der Biegungsebene senkrechten Ebene (xz-Ebene).

Die letzteren mögen mit p_{xz}, die ersteren mit p_{xy} bezeichnet werden. Beide sind an den äusseren Begrenzungsflächen der Platte Null und im übrigen complicirte Functionen von y und z, die von de Saint-Venant für einen rechteckigen Stabquerschnitt berechnet worden sind. Die Kräfte p_{xz} kommen für uns nicht in Betracht, um so weniger, als ihr Mittelwert in Richtung der Breite b, die in unserer Bezeichnungsweise in die z-Axe fällt, d. h.

$$\int_{-b/2}^{+b/2} p_{xz}\, dz = 0$$

ist. Die Kräfte p_{xy} bedingen die beschriebene Doppelbrechung im Knoten. Da die Differenz der Brechungsexponenten an jeder Stelle dem Werte dieser Kraft oder der durch sie bedingten elastischen Deformation proportional sein wird, so wird die ganze Phasendifferenz, die man durch die ganze Breite b der Platte in einer bestimmten, zur z-Axe parallelen Richtung hindurch wahrnimmt, der Summe jener Kräfte für die ganze Breite b, d. h. der Grösse:

$$\int_{-b/2}^{b/2} p_{xy}\, dz$$

proportional sein. Für diese Grösse giebt die de Saint-Venant'sche Formel den einfachen Ausdruck:

$$\int_{-b/2}^{+b/2} p_{xy}\, dz = \tfrac{3}{2}\,\frac{P'}{d}\left(1 - \frac{4y^2}{d^2}\right).$$

Integrirt man diesen noch über dy von $-d/2$ bis $+d/2$, so erhält man als Summe aller auf den Querschnitt $b \times d$ in Richtung der y-Axe wirkenden scheerenden Kräfte:

$$\int_{-d/2}^{+d/2} dy \int_{-b/2}^{+b/2} dz\, p_{xy} = P'.$$

Bezeichnet man mit P den Mittelwert dieser Kraft, bezogen auf die Flächeneinheit, so würde:

$$P = \frac{P'}{b \times d}$$

sein. Dieser Wert würde dem P in Formel (2) entsprechen. Aber nach der de Saint-Venant'schen Theorie würde sich dieses P nicht gleichmässig über den Querschnitt in Richtung der Dicke der Platte verteilen, sondern sein für die Doppelbrechung maassgebender Mittelwert, genommen in Richtung der Breite b der Platte, würde nach der Formel:

$$\frac{3}{2} P \left(1 - \frac{4\,y^2}{d^2}\right). \tag{28}$$

variiren. Die Kraft würde am Rande für $y = \pm d/2$ Null sein, in der Mitte für $y = 0$ das Maximum $\frac{3}{2} P$ haben.[1]) Den gleichen Verlauf müsste dann die Doppelbrechung zeigen.

Wenn es gestattet wäre, dieses Ergebnis des de Saint-Venant'schen Problems auf die Deformation eines schwingenden Stabes im Knoten zu übertragen, so würde auch hier die scheerende Wirkung in der Mitte der Platte anderthalbmal grösser anzunehmen sein, als sie oben aus dem Mittelwert der Schubkraft für den ganzen Querschnitt berechnet worden ist. Demgemäss würde auch die Constante der Formel (27) anderthalbmal grösser sein, also gleich 0,192, womit eine ziemliche Annäherung an den empirischen Wert 0,22 erreicht wäre.

Allerdings würde in diesem Falle die Berechnung des Δ_k aus den in Taf. I, Figg. 10 und 11 abgebildeten Aufnahmen nicht mehr streng richtig sein, denn diese Berechnung beruht auf der Annahme, dass die Doppelbrechung im Knoten gleichmässig über den Querschnitt verteilt sei. Nimmt sie nach den Rändern hin ab, so wird offenbar die Amplitude der Wellenlinie, welche der in der Mitte der Platte gelegene Interferenzstreifen des Gypskeiles beschreibt, kleiner ausfallen, als der maximalen

1) Auch die Technik verwendet die gleiche Formel zur Berechnung der Schubspannungen in gebogenen, prismatischen Trägern. Vgl. C. Bach, Elasticität und Festigkeit, p. 414. 3. Auflage. Berlin 1898.

Doppelbrechung in der Mitte entsprechen würde. Auch ist es dann erforderlich, den Streifenabstand des Gypskeiles nicht aus der Aufnahme der schwingenden, sondern aus der der ruhenden Platte zu entnehmen. Man kann unter Zugrundelegung des durch Formel (28) ausgedrückten Gesetzes die Correctionen berechnen, die man an den auf p. 32 mitgeteilten Zahlen anbringen muss, um den wirklichen Betrag der maximalen Doppelbrechung in der Mitte der Platte daraus zu erhalten. Ich begnüge mich, das Resultat dieser Correctionsrechnung anzugeben. An Stelle der Werte 0,26 und 0,33 würde sich ergeben:

$$\Delta_k = 0{,}24 \text{ bez. } 0{,}30,$$

daher:

$$\Delta_k / a = 1{,}33 \text{ bez. } 1{,}30,$$

also im Mittel

$$\Delta_k = 1{,}315 \times a$$

und

$$\frac{\Delta_k}{\Delta_b} = \frac{0{,}20}{\eta}.$$

Damit wäre eine noch weitere Annäherung zwischen dem beobachteten und dem berechneten Werte (0,19) erzielt.

Diese Ueberlegungen beruhen auf der Voraussetzung, dass die Doppelbrechung im Knoten nach dem durch Gleichung (28) ausgedrückten Gesetz innerhalb der Dicke der Platte veränderlich ist, und führen zu der Frage, ob sich diese Veränderlichkeit denn nicht unmittelbar in den Beobachtungen kundgegeben hat. Ich habe die Erscheinungen oben so beschrieben, wie sie sich mir ohne jede Voreingenommenheit dargestellt haben, und dabei war der Eindruck zunächst der, dass die Doppelbrechung im Knoten im wesentlichen constant wäre. Sieht man schärfer zu, so bemerkt man wohl einige Besonderheiten, welche darauf hindeuten, dass die von der Theorie geforderte Abnahme der Doppelbrechung nach den Rändern der Platte zu in der That vorhanden ist. So fällt es bei Aufnahmen wie Figg. 7 und 9 der Taf. I offenbar auf, dass die Ränder der Platte nicht als scharfe Begrenzungslinien des Bildes sichtbar sind, wie bei den Aufnahmen im Schwingungsbauche, nur natürlich in Form gerader Linien;

die hellen Streifen in Fig. 7 erscheinen vielmehr nach oben und unten hin verengt und verwaschen; ebenso erscheinen die Wellenlinien der hellen Interferenzstreifen in Fig. 9 nach den Rändern hin eigentümlich flach gedrückt. Entnimmt man endlich der Fig. 9 den Abstand der hellen Streifen und vergleicht ihn mit dem Abstand der ruhenden Streifen in Fig. 8, so findet man den letzteren grösser, um ungefähr soviel, wie die Theorie nach der angegebenen Gesetzmässigkeit verlangen würde.

Eine genauere Untersuchung dieses Punktes aber ist auf Grund des vorhandenen Beobachtungsmateriales nicht möglich. Die strenge Prüfung des durch Gleichung (28) ausgedrückten Gesetzes dürfte auch bei schwingenden Platten einige Schwierigkeiten bereiten wegen der sowieso schon recht verwickelten Versuchsanordnung. Dagegen treten Erscheinungen der gleichen Art auch bei statischer Verbiegung der Platte auf und lassen sich hier bequemer und mit aller wünschenswerten Genauigkeit verfolgen. Da eine Untersuchung über die durch scheerende Kräfte hervorgerufene Doppelbrechung in gekrümmten Glasplatten noch nicht vorzuliegen scheint, so werde ich in einer zweiten Abhandlung ausführlich auf die Verhältnisse bei statischer Verbiegung der Platten eingehen.

Die Ergebnisse der vorliegenden Untersuchung aber fasse ich folgendermaassen zusammen:

In transversal schwingenden Glasplatten treten zwei Arten von Doppelbrechung auf. In den Bäuchen ist nur die eine, in den Knoten nur die andere Art vorhanden; an den dazwischen liegenden Stellen sind beide gleichzeitig vorhanden.

Die in den Bäuchen auftretende Doppelbrechung entsteht durch die Krümmung der Platte und ist von der gleichen Art, wie die in bekannter Weise durch statische Verbiegung hervorgerufene. Ihre Axen liegen in der Längsrichtung der Platte und senkrecht dazu; ihre Stärke nimmt von der neutralen Mittellinie nach den Rändern hin, proportional dem Abstand von der Mittellinie, zu und die Grösse der specifischen Doppelbrechung des Glases ergiebt sich aus diesen Beobachtungen ebenso gross wie aus Beobachtungen statisch verbogener Platten.

Die in den Knoten auftretende Doppelbrechung rührt von den in der Platte bei ihrer Verbiegung entstehenden scheerenden Kräften her. Ihre Axen liegen unter 45° zur Längsrichtung der Platte; ihre Grösse ist gering; sie scheint, entsprechend der Theorie, in der Mitte der Platte am grössten zu sein und nach den Rändern hin abzunehmen. Ihr Verhältnis zur Schwingungsamplitude der Platte stimmt sehr nahe überein mit demjenigen Wert, der sich theoretisch dafür berechnen lässt, wenn man die von de Saint-Venant für die scheerenden Kräfte bei statischer Verbiegung gegebenen Ausdrücke auf die Verbiegung der schwingenden Platte überträgt.

Greifswald, October 1900.

(Eingegangen 26. October 1900.)

---

2. *Darstellung der Lamellentöne;*
von Victor Hensen.

In der Arbeit über die Lamellentöne[1]) war ich schuldig geblieben, Aufnahmen der Wellenformen zu geben. Da sich findet, dass diese unentbehrlich für eine eindringendere Analyse des Vorganges sind, erlaube ich mir, dieselben jetzt zu bringen. Es handelt sich also darum, mit Hülfe des Lichtes gleichsam zu belauschen, was geschieht, wenn sich die Massenschwingung eines Gases auf ein anderes Gas überträgt, wie die Massenschwingung selbst gestaltet ist, und wie sie durch die Dazwischenkunft einer continuirlich fliessenden Gaslamelle erzeugt wird.

Der Druck des Brenngases hat auf die Tonhöhe wenig Einfluss. Man kann dessen Zuleitung comprimiren, ohne die Tonhöhe erheblich zu ändern. Das Flackern der Flamme verändert deren Ton, aber der Vorgang ist langsam und in dem kleinen, 45 cbm fassenden Raum, in dem experimentirt wurde, war es meistens nicht störend. Wenn die Flamme in engem Raum eingeschlossen wird, zerstört die Hitze, die je nach der Tonhöhe verschieden stark entsteht, die Constanz des Tones. Der Luftstrom der Lamelle wurde aus einem 2 cbm fassenden Separatgasometer im Keller des physiologischen Institutes entnommen. Von dort ging er durch ein Rohr von etwa 1 cm Lichtendurchmesser in einen festen Behälter von 0,5 cbm Inhalt, dann weiter durch feste Röhren und schliesslich durch einen weiten kurzen Kautschukschlauch zu dem Spaltrohr. Die variometrischen, durch vorüberziehende Wolken und Aehnliches verursachten, kurzen Schwankungen des Luftdruckes können auf

1) V. Hensen, Ann. d. Phys. 2. p. 719. 1900.

die schwere Glocke des Gasometers keinen Einfluss haben, derart, dass im Laufe weniger Secunden der Luftstrom irgend hätte schwanken können. Die Vorsicht war unnötig weit getrieben, denn es zeigte sich, dass die Tonhöhe immer noch sehr stark, an einigen Tagen um eine Terz in ein oder zwei Secunden schwankte. Diese Schwankungen mussten also von Einwirkungen im Zimmer herrühren. Sie waren stark, wenn das Variometer der hiesigen Wettersäule unruhig war, es fanden sich auch Zeiten, wo der Ton unverändert blieb, sogar einmal eine Stunde lang sich völlig hielt. Die Störungen müssen daher auf Beeinflussung der ausfliessenden Lamelle durch kleinste variometrische Schwankungen der Hauptsache nach bezogen werden. Ich habe bereits angegeben[1]), dass der Schneidenton bei 46,16 m Geschwindigkeit der blasenden Luftlamelle 3520 Schwingungen, bei 5,3 m unter sonst gleichen Verhältnissen 456 Schwingungen ergab. Der Druck einer Luftsäule von 110 m und von 1,4 m Höhe würde diesen Geschwindigkeiten äquivalent sein. Die Tonhöhe wird sich um eine Schwingung ändern, wenn die Höhe jener Luftsäulen sich um 3,58 cm ändert. Um die entsprechende Druckänderung in dem Zimmer hervorzurufen, muss sich die Luftmasse des Zimmers um 0,14 g oder 108 ccm ändern. Ein schwacher Windstoss gegen die Fensterwand muss mehr als genügen, diese Aenderung fast augenblicklich zu erzeugen. Wenn diese Rechnung annähernd zutrifft, erklärt sich die grosse variometrische Empfindlichkeit der Flamme.

Wenn in einem anderen Raum eine Thür ging, änderte sich momentan die Tonhöhe. Die Flamme ist sehr empfindlich gegen Geräusch, ob nun von diesem, ob von begleitender Druckschwankung, vielleicht von beiden, jene Tonschwankung abhängt, habe ich nicht geprüft, wollte aber doch auf diese Störungsursache aufmerksam machen.

Die Momentaufnahmen, an sich schwierig wegen des Intensitätsunterschiedes des Lichtes in den Flammenbezirken, wären wohl unmöglich gewesen, wenn nicht der Stimmgabelton auch seinerseits die Flamme beeinflusst hätte. Es kommt bei

---

1) l. c. p. 785.

sehr schwachem, einige Millimeter Wasser betragenden Winddruck vor, dass die Flamme aufhört zu tönen, sich also ein Gleichgewichtszustand zwischen Lamelle und Flamme einstellt. Dann tönt die Flamme, sobald und solange die Stimmgabel stark schwingt. Sind die variometrischen Störungen, bei richtig eingestellter Flamme gering, so zwingt die erklingende Gabel ruhigen Ton, meist wohl in bestimmter Phasenstellung, wenn die Entfernung nicht verändert wird. Stark ist dieser Einfluss nicht.



Fig. 1.

Der meistens gebrauchte Apparat ist in Fig. 1 bei $3^1/_2$ maliger Verkleinerung abgebildet. Die gezeichnete Art der Aufstellung dient zur Uebertragung des Schneidentones auf das *daneben* fliessende Flammengas. Man sieht an der Flamme des Schnittbrenners die kleine Spitze, die den Entstehungsort der ersten Welle anzeigt. Infolge paralactischer Verschiebung erscheint die Spitze im Bilde tiefer stehend, als dem Sachverhalt entsprach. Rechts hinter der Flamme sieht man das eine der reflectirenden Prismen auf der Gabel. Diese

selbst sieht man nicht, wohl aber den Fuss und den Tisch, auf dem sie steht. Die Einlage in die Luftlamelle ist geknickt, um ihre Erwärmung möglichst zu vermeiden. Das mit Spiralfeder umwundene Rohr ist das Spaltrohr, der geteilte Schraubenkopf auf ihm dient dazu, den Spalt zu erweitern. Der geteilte Schraubenkopf oben hinter der Einlage dient dazu, diese zu heben. Die beiden hinter dem Rohr sichtbaren Schrauben dienen dazu, die Schraube zur Hebung der Einlage genau in Richtung des Luftstromes zu stellen. Ein hier nicht sichtbarer Schlitten gestattet die Vor- und Rückbewegung der Einlage. Das Spaltrohr wird von einer Stange getragen, die unten, wo ein für andere Zwecke angebundenes Rohr hängt, einen Schraubenkopf trägt, der eine Hebung und Senkung der Luftlamelle gegen die Flamme gestattet. Links an dem Tisch, der das Spaltrohr trägt, findet sich ein Schraubenkopf, der einen Schlitten regiert, mit dem der blasende Apparat der unabhängig aufgestellten Flamme genähert werden kann. Für die angeblasene und tönende Flamme wird das Spaltrohr senkrecht gestellt und dessen Einlage entfernt.

Die Stimmgabeln machten 155,5 und 311 Schwingungen. Die erstere hat 10 mm dicke Branchen bei 18 cm Länge. Wenn sie das 225 mm entfernte Object um 12 mm verbreitert, hat das Prisma eine Elongation von etwa 2 mm, sodass sich der Krümmungsradius zu etwa 75 mm berechnet. Die höhere Gabel hat eine Länge der Branchen von 20 cm, die Dicke vorn ist 14 mm, hinten 23 mm. Diese Form wählte Hr. R. König auf meinen Vorschlag. Die Gabel klingt gut und andauernd, aber der Krümmungsradius ist gegen 140 mm lang, was für die hier verfolgte Absicht ungünstig ist.

Uebertragung der Bewegung.

Die Fig. 2[1]) oben links giebt die Flamme vor der mit 155,5 Schwingungen tönenden aus CO_2 bestehenden La-

1) Alle Figuren dieser Arbeit sind, soweit nichts anderes erwähnt wird, in natürlicher Grösse. Fig. 2 ist $^1/_6$ unter natürlicher Grösse.

melle, analysirt durch unison schwingende, horizontal stehende Gabel. Man sieht vier Wellen, die etwas spitz zulaufen, auch ist die erste klein. Ich erlaube mir, diese Abbildung zu



Fig. 2.

geben, obgleich sie in gewissem Sinne eine Fälschung enthält. Sie giebt nämlich nur das Bild der einen Extremstellung der Gabel, also etwa der Stellung in cos 0°, in allen anderen Positionen war die Flamme durch die CO_2 in ihrer Leucht-

kraft so beeinträchtigt, dass die Photographie sie nicht mehr zeigt. Das Bild darunter zeigt den Ton in Luftlamelle mit unisono schwingender Gabel von 311 Doppeltvibrationen. Die Abbildung giebt wegen der geringeren Durchbiegung der höheren Gabel nur eine schmale Verdoppelung der Wellenlinie. Diese ist für Phase cos 180° deutlich genug, aber für cos 0° ist sie kaum zu erkennen. Nur der Wellenberg dieser Phase, der auf das Wellenthal der anderen Extremlage fällt, bildet einen deutlichen hellen Fleck. Das Bild oben rechts ist Schwingung 155 *in Luft* mit Unisonogabel analysirt. Vor der Schneide liegt gerade ein Wellenthal. Man sieht die Wellen beider Extremstellungen der Gabel, Thal der einen Stellung gegen Berg der anderen. Die dazwischen liegenden hellen Linien geben die Wellenumkehrpunkte, sin 90° und 270° zur Zeit der übrigen Phasen der Gabel. Die letzte Figur endlich zeigt das Aussehen oder vielmehr den Abdruck der Schwingung 311 analysirt durch Gabel 155,5. Diese Bilder, deren mir natürlich eine viel grössere Auswahl vorliegt, ergeben Folgendes. 1. Die Wellenamplituden nehmen rasch ab, mehr als fünf Wellen habe ich nicht erhalten. 2. Der abstehende Rand der die Bewegung aufnehmenden Flamme kommt nicht mit in sichtbare Schwingungen. Es dürften von dem Wellenrande aus nach allen Seiten hin Molecularschwingungen gehen, deren Kugelflächen am anderen Rande so sehr übereinander greifen, dass sichtbare Vorbuchtungen nicht entstehen. 3. Die Wellenlängen sind innerhalb der untersuchten Grenzen, bei denen zur Erzielung des höheren Tones der Luftbewegung in der Lamelle grössere Geschwindigkeit gegeben werden musste, **unabhängig** von der Tonhöhe. Die Wellen der beiden unteren Figuren sind nur wenig und durchaus nicht halb so kurz, wie die der oberen, eine Octav tiefer klingenden Wellen. Die *Thatsache der Unabhängigkeit der Tonhöhe von der Wellenlänge* überraschte mich, indessen ist sie nicht neu. Wenn man durch die Scheibe einer, mit constanter Geschwindigkeit laufenden Sirene stark und schwach bläst, bleibt der entstehende Ton gleich hoch, trotzdem die Abstände der einzelnen Luftballen verschieden sein müssen.

Bewegungsart in den tönenden Flammen.

Die Fig. 3, *A*, zeigt die Flamme von 155,5 Schwingungen, analysirt durch *seitlich* stehende, horizontal stark

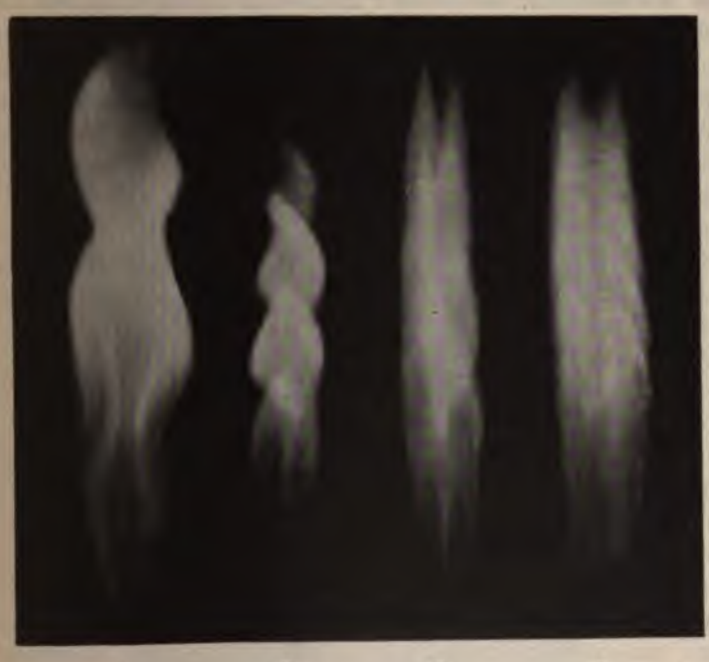


Fig. 3.

schwingende Unisonogabel. Es sieht so aus, als wenn die Flamme aus Ballen bestände, das ist aber eine Missdeutung des Bildes. *In der Richtung von vorn nach hinten schwingt die Flamme wellenförmig*, der äussere Contour links giebt die Form der Welle zur Zeit 0°, wenn der Contour rechts die Form zur Zeit π giebt. Die inneren Contouren des hellen Randes geben die Gestalt der Flamme etwas weniger genau wieder, weil die ganze Flamme in etwas verschiedener Phase zweimal darüber hin gelaufen ist, immerhin kann man auch diese in der

Photographie gut erkennen, in der Reproduction leider nicht. Das Licht zwischen den inneren Rändern rührt von allen übrigen Phasen der Gabel her, hier liegt um so weniger Licht, je stärker die Gabel schwingt und je weiter die Flammen auseinander geworfen sind. Wenn sie sich, wie in der Phase der Wellenthäler, aufeinander zu bewegt haben, wird der dann schmale Zwischenraum sehr hell. Man erkennt, dass namentlich das Verglühen des Gases eine gewisse Rolle spielt, die Spitzen verdünnen sich, während die Welle sich doch vielleicht verbreitern sollte, weil ihre einzelnen Molecüle nicht einander parallel gerade nach oben, sondern etwas divergent verlaufen. Das Gas scheint ziemlich plötzlich gelbglühend zu werden und *glüht dann während etwa 0,01 Sec.*[1]) Es wäre ja möglich, dass während dieser Zeit sich die glühenden Gasteilchen immer wieder ergänzten, indessen scheint es mir nach Bildern mit vertical schwingender Gabel, dass die Teilchen des Wulstes, der sich unter der anblasenden Lamelle bildet, bis zur Flammenspitze hin verfolgt werden können und ein Austausch unter diesen ist wenig wahrscheinlich. Die Fig. 3, *B* giebt den Ton 311 mit Unisonogabel. Die Flammenbilder sind hier weniger weit auseinander gezogen, die Wellenthäler greifen ineinander und geben leuchtende Flecke, zwischen den Wellenbergen finden sich weniger leuchtende Streifen. Man erhält den zwingenden Eindruck, dass die Flammenbilder sich umeinander winden, und wenn der Ton nicht genau stimmt, sich umeinander drehen. Die Entstehung dieser Figur wird durch das Constructionsbild Fig. 10, III, IV, p. 57 erläutert. Fig. 3, *D* giebt einen harmonischen Ton der tieferen Gabel, ich glaubte zu hören, dass es die Sext sei, aber ich kann die Tonhöhe an der Figur nicht erkennen. Fig. 3, *C* giebt die Octave des Flammentones, mit der tieferen Gabel analysirt. Die tiefere Gabel giebt das Grenzbild halb so häufig, als die Unisonogabel, die Mittelpartien des Bildes sind daher heller, sonst zeigt sich kein Unterschied gegen Fig. 3, *B*. Im Ganzen sind die Wellen an der angeblasenen (rechten) Seite etwas höher, als an der linken Seite. Dies kommt, weil die Lamelle

---

1) Angereichert durch Benzin ist ihre Glühzeit etwas länger.

nicht so tief in die Flamme eindringt und daher auf deren ihr zugewandte Seite stärker einwirkt, als auf deren abgewandte Seite. Ausserdem sind die Wellen etwas gegen einander verschoben. Dabei wirken verschiedene Factoren. Die Flamme stellt sich ein wenig schief nach hinten, während die Gabel bei diesen Bildern horizontal stand, ausserdem liegt der Flammenwulst hinten höher als vorne, vgl. Fig. 6, *B*, p. 51. Die Töne dieser Flammen waren schwach, sie waren in 7 bis 9 m Entfernung gerade noch hörbar. Die folgende Fig. 4 giebt die Analyse der Flammenbewegung durch vertical schwingende Gabel.



A *B* *C*

Fig. 4.

Die beiden ersten Bilder (Fig. 4) sind in Seitenansicht, das dritte etwas verkleinerte in Ansicht von der Rückseite aufgenommen. Man sieht bei diesen Unisonoaufnahmen deutlich, dass sich die Flamme in der Richtung von vorn nach hinten *windet*, während sie seitlich nur unbedeutende Wulstungen zeigt. Bei diesen Aufnahmen kommt es, wie die Construction Fig. 10 zeigt, darauf an, dass die Elongation des Bildes eine halbe Welle,

oder deren vielfaches beträgt. Die Construction des Bildes in Fig. 10 giebt einen sehr ungünstigen Fall, man braucht aber nur die punktirte Welle I um etwas nach II hin verschoben zu denken, um zu erkennen, dass die Wellenform bei günstiger Longitüde sehr scharf hervortreten muss, wobei dann die Buchten durch die Bilder der mittleren Phasen der Gabel ausgefüllt werden. Diese Art der Analyse hat den Vorteil, dass man an kurzen Figuren das obere und das untere Ende der Figur nur in einer Phase erhält, doch müsste im Bilde die jedesmalige Elongation kenntlich gemacht sein. Dies wurde leider bei der Aufnahme verabsäumt, doch hat die Elongation des Bildes etwa 5 mm betragen. In der dritten Figur ist die Wulstung gerade bis an die Spitze der Flamme gekommen; bei der Beobachtung sieht man die ganz spitz endende Flamme, durch den, bei Tonschwankungen auftretenden Phasenunterschied veranlasst, zur Spitze hinaufkriechen. Die Vorgänge an dem Entstehungsort des Tones sieht man gleichfalls bei dieser Analyse am deutlichsten, doch laufen die Dinge meistens zu schnell, um ganz befriedigend studirt werden zu können.



Fig. 5.

Die beigegebene Fig. 5 giebt die Flamme vor horizontal und stark schwingender Gabel von der *Rückseite* gesehen. Man sieht hier deutlich, dass die Flamme in der Querrichtung aufgewulstet ist. Namentlich unten, dicht über der angeblasenen Stelle ist die Flamme links verdünnt, rechts verdickt.[1]) Weiter nach oben scheint die Wulstung sich sogar zu verstärken. Zugleich erkennt man, dass hier Wulst gegen Thal steht, was nur möglich ist, wenn *Ballen* längs der Welle verlaufen. Es complicirt sich also der Vor-

1) Leider in der Reproduction zu undeutlich.

gang; in der einen Richtung eine wellig gebogene Flamme und senkrecht dazu eine in Ballen aufwärts eilende Flammenmasse.

Die Entstehung der periodischen Massenbewegung.

Die Bildung der Periode — ohne bemerkbare Wirbel — durch zwei continuirlich fliessende Gasströme in den Einzelheiten zu studiren, erwies sich mir besonders schwierig. Vielleicht war die Witterung zu ungünstig. Ich kann wohl Abbildungen des Vorganges geben, aber ich bin nicht ganz sicher, ob in dem Augenblick der photographischen Aufnahme nicht



A *B*

Fig. 6.

doch eine kleine Phasenverschiebung in der Welle stattgefunden hat, denn so genau kann die Bewegung durch den zweiten Spiegel nicht überwacht werden, auch schwingt die Stimmgabel während der Aufnahme fortwährend ab, oder wenn man während derselben streicht, ist vielleicht die Bogenführung nicht tadellos. Ich gebe zunächst Fig. 6 der nicht analysirten Flamme in Seiten- und Vorderansicht.

Die angeblasene Stelle tritt in dieser Form nur auf, wenn die Flamme ziemlich hoch oben angeblasen wird, sie zeigt aber den Raum, innerhalb dessen die Entstehung der periodischen Bewegung erfolgt. Bei der Seitenansicht (Fig. 6, *B*) tritt ein doppelter Wellenberg hervor, bei der Ansicht von vorne (Fig. 6, *A*) sieht man die Verbreiterung der Flamme, die unten durch eine etwas schärfere, oben durch eine etwas weniger scharfe helle Leiste begrenzt erscheint. Die Flamme ist etwas unsymmetrisch geformt, woran wohl ein kleiner Fehler im

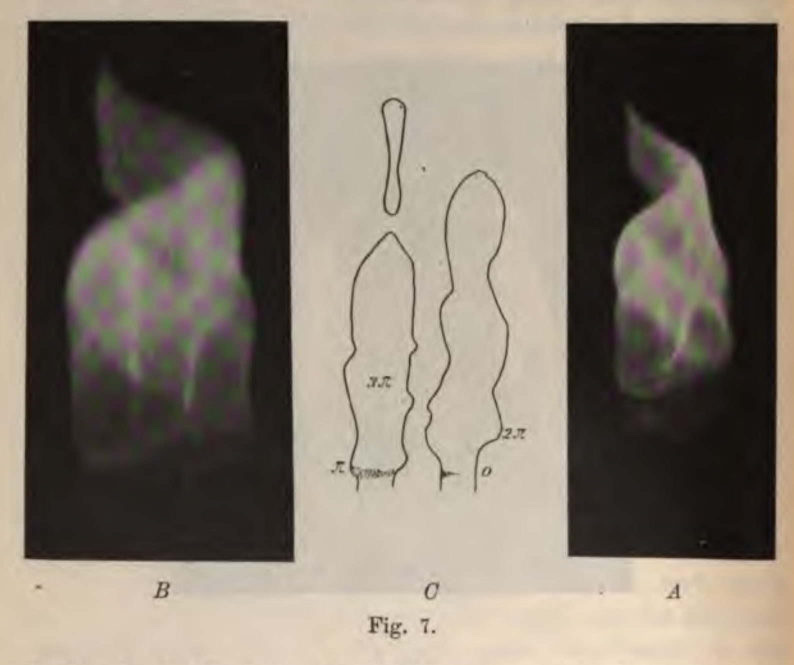


Fig. 7.

Spalt oder im Brenner die Schuld tragen wird. Es verwickeln sich die Bilder nicht nur dadurch, dass der eingeblasene Sauerstoff die Leuchtkraft der Flamme modificirt, sondern auch wegen der Zurückbiegung der Flamme und deren schräger Wulstung, die namentlich für die Seitenansicht störend wirken. Die beiden Figuren sind übrigens etwas verkleinert.

Die Figg. 7, *A*, *B* und *C* zeigen die Flamme von vorn gesehen vor horizontal schwingender Gabel. Man sieht die Be-

wegung des Wulstes der Fig. 6, *A*, der in der Analyse natürlich nur einfach gesehen werden kann, recht deutlich. Bei allen Flammen dieses Abschnittes kommt die *Phase* der Schwingungen in Betracht. Die Phasen der Gabel, cos 0° und cos 180° geben den rechten und linken Rand der beiden entsprechenden Flammenbilder gut. Die Phasen der Flamme sind nicht identisch mit den Phasen der Gabel, wenn *diese* die Flamme feststellt. Die Wellenlänge des Tones in Luft beträgt etwa 2,19 m, die Gabel stand 0,225 m von der Flamme ab, der Luftdruck einer Gabelphase erreicht die Flamme erst, nachdem die Gabel $^{37}/_{360}$ ihrer Bewegung durchlaufen hat. Steht also z. B. die Gabel in cos 0°, so steht die Flamme in der Phase cos 360 – 37°, wenigstens angenähert; auf genaue Bestimmung kommt es noch nicht an.

Fig. 7 *A* zeigt den Verlauf der Bewegung des Wulstes recht gut. Der Wulst erscheint in einiger Breite, weil er sich gleichzeitig vom rechten und vom linken Rand der Flamme erhebt; schiebt man sich, der Wirklichkeit entsprechend, die beiden Flammenbilder zusammen, so erkennt man, dass es sich um einen linearen Wulst, wie ihn die Fig. 4, *C* zeigt, handelt. Im weiteren Verlauf verbreitert sich der Wulst und rundet sich zugleich mehr ab. Auffallend erscheint mir, dass der Wulst beim Aufsteigen in der Zeit der ersten Halbwelle fast gerade, dann aber deutlich sinusoid gekrümmt verläuft, in den Umkehrphasen stark in die Höhe gehend, dazwischen wellig geschweift. Solche Linie muss ein mit gleichmässiger Geschwindigkeit steigender Leuchtpunkt annehmen, wenn die Gabel mit ihrer Pendelbewegung sein Bild projicirt, eine gerade Linie kann er nur beschreiben, wenn er auch seinerseits eine pendelartige Bewegung nach oben vollführt. Die Figur zeigt, dass die Flammen nach der Spitze zu schmaler werden, weil das Gas sich verzehrt, während die Amplitude der Welle sich nicht zu vermindern scheint. Die Fig. 7, *B* zeigt eine ganz ähnliche Flamme, nur höher brennend und stärker auseinander gezogen. Ich lese sie so wie Fig. 7, *C* angiebt. Den unter dem Wulst liegenden Teil der Flamme giebt das Negativ wegen geringer Leuchtkraft dieses Teiles so schwach, dass er leider in der Reproduction nicht gekommen ist. Der

Wulst hat sich zur Gabelzeit O noch nicht gebildet, dann aber tritt er bald hervor und verstärkt sich bis zur Zeit π, darauf oder sehr bald danach steigt er auf und bildet zur Zeit 2π eine starke Vorragung, geht dann weiter nach 3π, wo er schon ziemlich ausgeglichen anlangt. Von da aus scheint sein Steigen sich zu verlangsamen.

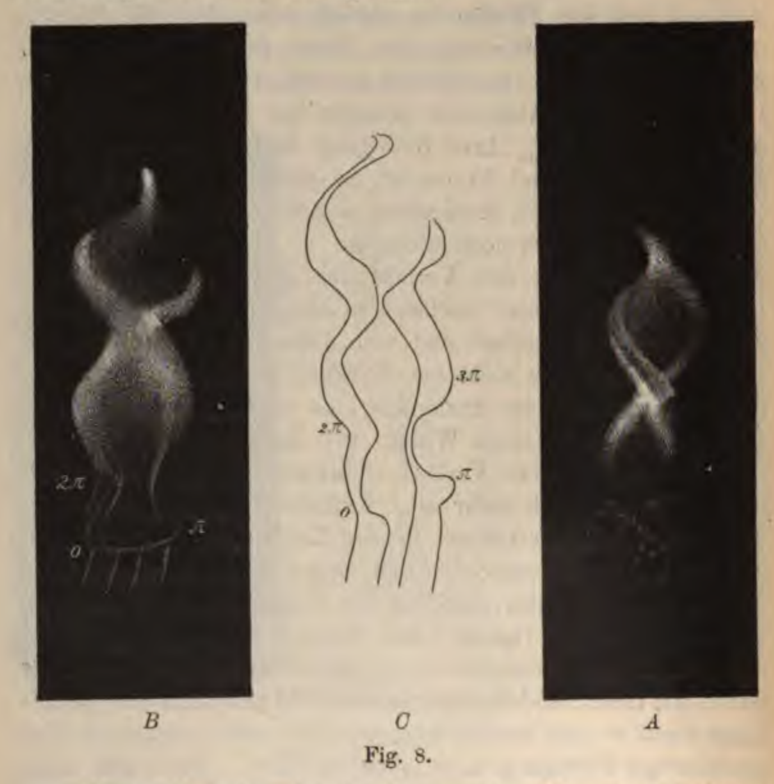


Fig. 8.

Weit schwieriger ist die Lesung der Flamme bei Seitenansicht (Fig. 8).

Die Flammen von 155,5 v. d. sind stark rückwärts gebogen, zeigen starke Windungen und ausserdem Verdickungen, daneben auch noch ein starkes Aufleuchten. Fig. 8, *A* leuchtet an der Wurzel sehr wenig, ich deute sie so, dass erst das Stadium π zur Ansicht gekommen ist, so sieht man sie meistens. Die Ansicht Fig. 8, *B* ist günstiger, ich lese sie so, wie die

. 8, *C* zeigt. Bei *O* ist die Flamme tief eingeblasen, also lünnt, indessen ist schon unter der blasenden Lamelle eine anhäufung entstanden. Die Flamme verdünnt sich weiter, Wulst steigt aber schon auf und nimmt, wie mir scheint, blasende Lamelle, soweit sie innerhalb der Flamme liegt,

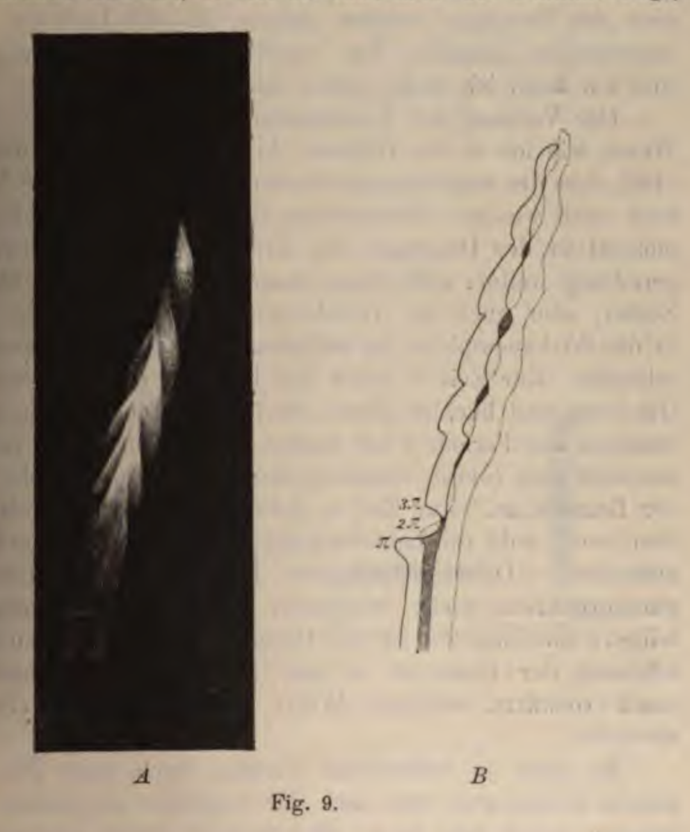


Fig. 9.

nach oben. Dann geht der Wulst hinüber nach 2π, aber sich namentlich nach oben hin schon etwas ausgeglichen, 3π und 4π ist die Ausgleichung schon weit fortgeschritten. ne Durchzeichnung ist nach dem Negativ verfertigt, an ı man etwas mehr erkennen kann, als an dem Positiv.

Die Fig. 9, *A*, giebt den Ton 311, analysirt durch sonogabel. Die Deutung wird durch die geringe Biegung

dieser Gabel erschwert. Die Fig. 9, *B* giebt meine Lesung. Das Stadium *O* ist nicht herausgekommen, das Stadium 2π ragt etwas in die Einbuchtung des vorhergehenden Stadiums hinein, weil erst hier die Flamme sich zurückbiegt. Die Rückbiegung geht in der Diagonale der beiden Bewegungen, man sieht, dass das Brenngas rascher strömt, als die Luft der in sie eintretenden Lamelle. Die sonderbare Lücke zwischen 2π und 3π kann ich nicht anders erklären.

Der Vorgang der Tonentstehung ergiebt sich also in der Weise, wie ich in der früheren Arbeit angab, nur wusste ich nicht, dass die angeblasenen Gasmassen sich neben der Ballung auch noch winden. Selbstverständlich läuft das einzelne Gasmolecül in der Diagonale der Kräfte, die auf sie einwirken, geradlinig weiter, aber diese Diagonale liegt für verschiedene Zeiten, also auch für verschiedene Molecüle, wie sie gerade in die Wirkungssphäre der anblasenden Lamelle eintreten, verschieden. Zur Zeit *O* bläst die Lamelle normal gegen den Gasstrom und buchtet diesen ein. Dieser Zustand dauert an während der Periode einer halben Schwingung, aber das Gas sammelt sich (durch Zurückprallen?) mehr und mehr unter der Lamelle an. Zur Zeit π drängt sich der Gaswulst nach oben, teils wohl die Lamelle durchsetzend, teils sie nach oben ablenkend. Dabei ist meines Erachtens auch noch ein photographisch nicht wirksamer Mantel der Flamme beteiligt. Zur Zeit 2π ist die Durchsetzung vollendet und nun schreitet der Gaswulst in der Periode bis 3π besonders rasch vorwärts, während Wulst sich zu einem Wellenberg abrundet.

Es kann ja erforderlich werden, noch mehr Flammenphasen festzulegen, was nach der weiterhin zu gebenden Anweisung leicht sein wird, aber vorerst dürfte genügen, was hier nachgewiesen worden ist.

Es möge noch kurz die Wirkung der Stimmgabel, die einfach ist, aber doch ihre besondere Eigentümlichkeit und meiner Ansicht nach auch ihren besonderen Vorteil hat, dargelegt werden (Fig. 10). Bei *C* liege das Centrum des Krümmungsradius einer Branche. 1 und 2 seien die beiden Spiegelstellungen, die Spiegel stehen gegen den Radius im Winkel von 45°. *L* und *L'*

die Einfallslote. Die gestrichelten Linien sind Verlängerungen des Radius, die Winkel β sind die Amplitudenwinkel. Die Mittelpunkte der Spiegel werden von der optischen Axe Ax getroffen. Von hier aus gehen die beiden punktirten Linien $1\,H$ und $2\,H$ in der Länge h parallel mit dem Krümmungs-

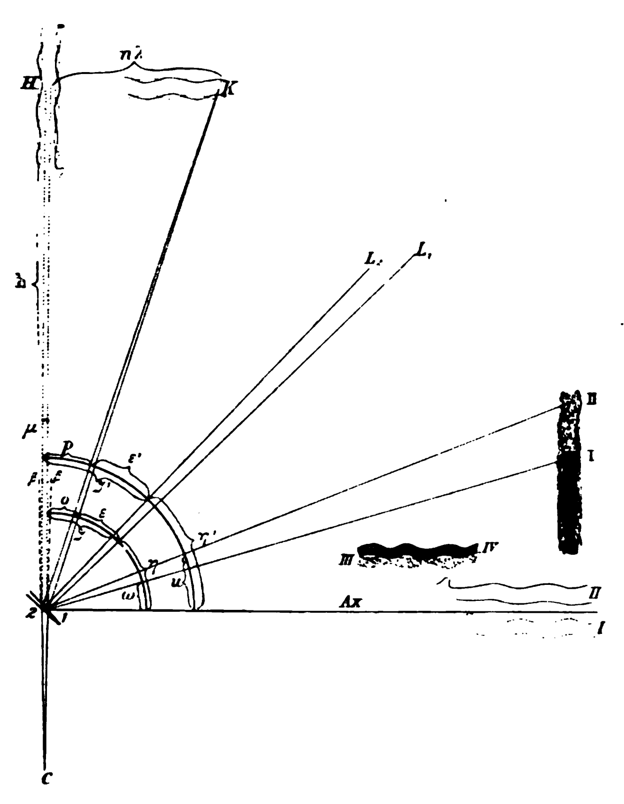


Fig. 10.

radius der *Ruhelage* der Gabel bis zur Ebene des zu spiegelnden Objectes. Die Flamme H ist senkrecht durch die Ebene des Papieres gehend zu denken, das Flammenbild K verläuft in dessen Ebene. Die Bilder geben zwei entgegengesetzte Phasen der im Fortschritt begriffenen Wellen, die eine Phase punktirt. μ der Abstand der Spiegel voneinander. Es handelt

sich um die Bestimmung der Winkel zwischen den reflectirten Strahlen und der optischen Axe, also $< \omega$ und $< u$,

$$\vartheta + \eta = \vartheta' + \eta' = 90^\circ . \begin{cases} \vartheta = 45^\circ + \beta , & \eta = 45^\circ - \beta , \\ \vartheta' = 45^\circ - \beta , & \eta' = 45^\circ + \beta . \end{cases}$$

Es seien $K1$ und $K2$ die Richtungsstrahlen, die von dem Punkt der Welle bei K auf die Mitte des Spiegels hinlaufen, $n\lambda$ und $n\lambda + \mu$ die Entfernungen zwischen K und dem O-Punkt, der bei H über der Mitte des Spiegels 1 liegen möge. Es ist

$$\frac{\pm n\lambda}{h} = \operatorname{tg} o , \qquad \frac{\pm n\lambda \pm \mu}{h_1} = \operatorname{tg} p .$$

Die Einfallswinkel ε und ε' bestimmen sich zu

$$\varepsilon = \vartheta - o = 45^\circ + \beta - o , \quad \varepsilon' = \vartheta' - p = 45^\circ - \beta - p ,$$

daher

$$\omega = \eta - \varepsilon = o - 2\beta ,$$
$$u = \eta' - \varepsilon' = 2\beta + p .$$

Für $-n\lambda$ wird

$$\omega = -(2\beta + o) ,$$
$$u = \quad 2\beta - p .$$

Die Lichtbrechung im Prisma ist vernachlässigt, die paralactische Verschiebung durch μ hat wenig Bedeutung. Vergrösserung von h hat nur insofern Einfluss, als dadurch die Wirkung der $< \beta$ mehr hervortritt. Auf diese Winkel kommt es vor allem an, daher ist ein relativ *möglichst kurzer Krümmungsradius der Stimmgabel zu erzielen.* Die Projectionen der Wellen sind bei I., II., und bei *I.*, *II.* gezeichnet, die beiden Phasen liegen wegen grosser β etwas weit auseinander. Verkleinerung des $< \beta$ bringt die beiden Wellen näher zusammen und giebt etwa das Bild III und IV.

Die photographische Analyse der Tonentstehung wäre vollständig, wenn noch die blasende Lamelle dargestellt worden wäre. Darauf muss ich verzichten. Auch sie wäre, wie mir scheint, wünschenswert. Armirung einer Stimmgabel mit zwei ovalen, grossen und schräg gestellten Metallspiegeln würde den Moment der Photographie sehr kürzen. Wie ich leider zu

spät finde, lässt sich die Flamme in der Tonhöhe recht gut fesseln, wenn man eine *zweite*, unisono tönende Gabel dicht neben sie hält. Die Molecularschwingung der Luft wirkt auf die Massenschwingung der Flamme so ein, dass die Wulstbildung unter der blasenden Lamelle durch die Molecularschwingungen in der Luft verzögert oder beschleunigt wird.

Hr. Dr. Deetjen hat mir auch bei dieser Arbeit ausdauernd geholfen.

(Eingegangen 13. October 1900.)

Die Figuren 2, 8 und 9 liessen sich durch Autographie nicht klar genug herstellen, sie sind daher lithographirt worden.

V

3. *Ueber die Absorption des Lichtes in Farbgläsern; von R. Zsigmondy.*

(Hierzu Taf. III—VIII.)

Charakteristische Absorptionsspectren käuflicher Farbgläser sind schon öfters beschrieben worden; man findet z. B. die Absorptionsspectren des blauen Kobaltglases, des roten Kupferglases etc. in Vogel's Spectralanalyse irdischer Stoffe[1]) beschrieben und abgebildet. Es ist nun den Glastechnikern bekannt, dass die Farbe eines Glases nicht nur von der Natur des färbenden Oxydes (Eisenoxyd, Kobaltoxyd etc.), sondern auch in hohem Maasse von der Zusammensetzung der Glassubstanz selbst und in vielen Fällen auch von der Behandlung des Glases abhängig ist. So kann man mit Kupferoxyd blaue und grüne, mit Nickeloxyd gelbe und auch violette Gläser erhalten, je nach der Zusammensetzung des Glassatzes, welcher mit dem färbenden Oxyde verschmolzen wird.

Man kann ferner aus einem geeigneten chromhaltigen Glassatze sowohl dunkelgrüne wie auch grüngelbe, getrübte Gläser darstellen; hier ist die Behandlung des erschmolzenen Glases maassgebend für die Farbe des Endproductes.

Man ersieht aus diesen Beispielen, dass die Beschreibung des Absorptionsspectrums eines Farbglases, ohne Berücksichtigung der Zusammensetzung und Behandlung des Glases, nur in einzelnen, bestimmten Fällen von Wert sein kann.

Eine ausführlichere Arbeit von Eder und Valenta[2]) befasst sich mit der photographischen Darstellung des ultravioletten und sichtbaren Absorptionsspectrums farbloser und gefärbter Gläser.

In der vorliegenden Arbeit, welche auf Anregung des Hrn. D. O. Schott im Laboratorium des Jenaer Glaswerkes ausgeführt wurde, soll auf Grund spectralphotometrischer

---

1) Vogel, Spectralanalyse irdischer Stoffe, Berlin 1889.

2) Eder u. Valenta, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien 1884. Eder u. Valenta berücksichtigen die qualitative und quantitative Zusammensetzung der Gläser.

Messung ein möglichst getreues Bild der Lichtabsorption von Farbgläsern bestimmter Zusammensetzung gegeben werden.

Es wurden Gläser nach bestimmten Typen, deren Zusammensetzung den in folgender Tabelle gegebenen Zahlen entspricht, unter Zusatz bestimmter Mengen färbender Oxyde, bei Oxydationsfeuer abgeschmolzen, die Extinctionscoefficienten dieser Gläser mit dem Glan'schen Spectralphotometer gemessen und nach Reduction auf ein vergleichbares Maass in Curven dargestellt.

Tabelle I.

Nr.	Zusammensetzung der Glastypen							
	in Aequivalenten	in Procenten						
		SiO_2	Na_2O	K_2O	CaO	ZnO	PbO	B_2O_3
1	Na_2O, $3SiO_2$	74,5	25,4	—	—	—	—	—
2	K_2O, $3SiO_2$	65,7	—	34,3	—	—	—	—
3	Na_2O, CaO, $5SiO_2$	71,8	14,8	—	13,4	—	—	—
4	K_2O, CaO, $5SiO_2$	66,7	—	20.9	12,4	—	—	—
5	Na_2O, PbO, $5SiO_2$	51,4	10,6	—	—	—	38,0	—
6	K_2O, PbO, $5SiO_2$	48,7	—	15,2	—	—	36,0	—
7	Na_2O, ZnO, $5SiO_2$	67,6	13,9	—	—	18,25	—	—
9	$Na_2B_4O_7$	—	30,7	—	—	—	—	69,3
11	B_2O_3	—	—	—	—	—	—	100
15	Bleisilicat	20	—	—	—	—	80	—

Ausser den in der Tabelle angeführten Gläsern wurden noch zwei Borosilicatgläser (ein Natronborosilicatglas Nr. 12 und ein Barytborosilicatglas Nr. 14) in den Kreis der Untersuchung einbezogen.

Die Sätze der in der vorstehenden Tabelle angeführten Gläser wurden mit den färbenden Oxyden bez. mit Lösungen der Nitrate der färbenden Oxyde[1]) derart versetzt, dass auf je 100 g der farblosen Glassubstanz die folgenden Mengen färbenden Oxydes kamen:

Chromoxyd	1 g	Manganoxyd	1,0 g
Kupferoxyd	2 g	Eisenoxyd	2,0 g
Kobaltoxyd	0,1 g	Uranoxyd	2,0 g
Nickeloxyd	0,25 g		

1) Bei Chromgläsern auch mit reiner Chromsäurelösung.

Zur abgekürzten Bezeichnung obiger Farbgläser verwende ich die chemische Formel des färbenden Metalles und setze die Nummer des Glastypus, mit welchem das Farboxyd in obigem Verhältnis verschmolzen war, als Index bei.

So bedeutet Cu_3 ein Glas, welches in 102 g enthält: 2 g CuO, 71,8 g SiO_2, 14,8 g Na_2O und 13,4 g CaO; es bedeutet Co_6: ein Kalibleisilicatglas, welches in 100,1 Teilen 48,7 Teile SiO_2, 15,2 Teile K_2O, 36,0 Teile PbO und 0,1 Teil Kobaltoxyd enthält.

Die Behandlung der Gläser war in allen Fällen die gleiche; ich werde sie bei den Kobaltgläsern kurz beschreiben.

Mit Hülfe des Glan'schen Photometers wurden für jedes Glas an verschiedenen Stellen des Spectrums die Extinctionscoefficienten bestimmt; es erwies sich als zweckmässig, den Bunsen'schen Extinctionscoefficienten beizubehalten. Bunsen und Roscoe[1]) definiren bekanntlich den Extinctionscoefficienten als den reciproken Wert derjenigen Schichtendicke, welche die Substanz haben muss, um das durch dieselbe fallende Licht bis auf $^1/_{10}$ der Intensität des auffallenden Lichtes durch Absorption abschwächen zu können.

Es ist der Extinctionscoefficient E

$$E = \frac{-\log J}{d},$$

wenn J die Intensität des durchgelassenen Lichtes, d die Schichtendicke des absorbirenden Glases bedeutet und die Intensität des auffallenden Lichtes gleich 1 gesetzt wird.

Da nun — gleiche Bestandteile der Lösung vorausgesetzt — der Extinctionscoefficient der Concentration des Farbstoffs proportional ist, ich aber mit verschieden concentrirten Lösungen (Gläsern mit verschiedenem Procentgehalt an färbender Substanz) operirte, da ausserdem Lösungsmittel von verschiedenem specifischem Gewicht zur Anwendung kamen, so mussten die für verschiedene Gläser gefundenen Extinctionscoefficienten auf einen bestimmten Gehalt von färbendem Oxyde in der Volumeneinheit bezogen werden, um vergleichbare Werte zu bekommen.

Ich nenne den auf den Gehalt von 1 mg Farboxyd pro Cubikcentimeter umgerechneten Extinctionscoefficienten die

1) Bunsen u. Roscoe, Pogg. Ann. **101**. p. 238. 1857.

Absorptionsgrösse A des färbenden Oxydes für die betreffende Wellenlänge.

Es ist

$$A = \frac{E}{g \cdot S},$$

wenn S das specifische Gewicht des Glases und g die Anzahl Milligramm Farboxyd in 1 g des Versuchsglases bedeuten.

Die Grösse A wurde nun an verschiedenen Stellen des Spectrums bestimmt und als Function der Wellenlängen graphisch dargestellt.

Vereinfachungen und Fehlerquellen.

Dem Zwecke der vorliegenden Arbeit gemäss, ein den thatsächlichen Verhältnissen annähernd entsprechendes Bild der Lichtabsorption von *zahlreichen* Farbgläsern zu entwerfen, wurden einige Vereinfachungen bei der Messung der physikalischen Constanten durchgeführt, die bei ganz exacten Messungen nicht oder nur unter besonderen Umständen erlaubt sein würden.

So brachte ich, um nicht von jedem Farbglase zwei Plättchen verschiedener Dicke anwenden zu müssen, als Vergleichsglas vor die untere Spalthälfte ein farbloses Glas von annähernd dem gleichen Brechungsexponenten, nachdem ich mich überzeugt hatte, dass dadurch die Fehler der Reflexion selbst bei stark gefärbten Gläsern genügend eliminirt werden.

Ferner wurde das specifische Gewicht derjenigen Glassorten, welche nur geringe Mengen färbender Oxyde enthielten, nicht besonders bestimmt, sondern gleich dem specifischen Gewicht des typischen, ungefärbten Glases selbst gesetzt.[1])

Als weiterer Mangel der vorliegenden Arbeit ist anzuführen, dass das benutzte Glan'sche Spectralphotometer im violetten Teile so lichtschwach war, dass die Messungen nicht über das ganze sichtbare Spectrum, sondern nur etwa bis zur

---

1) Der Extinctionscoefficient wurde nicht aus dem Mittel zahlreicher Winkelablesungen am Spectralphotometer berechnet, sondern meist aus dem Mittel zweier Ablesungen, wenn diese genügend genau untereinander übereinstimmten; bei einiger Uebung war dies nicht schwer zu erreichen. Diese Vereinfachung auf Kosten der Genauigkeit musste ich einführen, um das grosse Material in der gegebenen Zeit bewältigen zu können.

Wellenlänge $\lambda = 0{,}450\,\mu$ durchgeführt werden konnten. — In solchen Fällen habe ich zuweilen den Verlauf der Curven nach Beobachtungen mit dem sehr lichtstarken Pulfrich'schen Vergleichsspectroskop[1]) ergänzt. Diese Ergänzungen, welche nur nach ungefährer Schätzung ausgeführt werden konnten, wurden im Liniensystem als punktirte Linien eingezeichnet.

Trotz der eingangs erwähnten Fehlerquellen haben die Messungen an jenen Gläsern, welche einen Vergleich untereinander zulassen, eine recht befriedigende Uebereinstimmung im Verlauf der Curven ergeben.

Bei denjenigen Farboxyden, welche unter den gegebenen Verhältnissen in einer bestimmten Oxydationsstufe in das Glas eintreten, waren andere Fehlerquellen, als die hier angeführten nicht zu befürchten, wohl aber bei denjenigen Metalloxyden, welche im Glase in verschiedenen Oxydationsstufen enthalten sein können, wie die Oxyde des Eisens, Mangans und Chroms.

Hier konnte trotz Anwendung von Oxydationsmitteln im Satze und oxydirender Flammenführung leicht eine teilweise Reduction der höchsten möglichen Oxydationsstufen eingetreten sein und die Reinheit der Resultate trüben. Auf diese Verhältnisse werde ich später zurückkommen.

Kobaltgläser (Taf. III).

Das Kobalt wurde dem Glassatz in solcher Menge zugesetzt, dass auf 100,1 g fertiges Glas 0,1 g CoO kamen. Die Behandlung der Kobaltgläser war die gleiche, wie die der übrigen Gläser; sie wurden bei oxydirender Flamme abgeschmolzen, zur Beseitigung der Schlieren in feuerflüssigem Zustande gerührt, hierauf in Formen ausgegossen und nach dem langsamen Erkalten zu Platten geschnitten. Die Platten wurden geschliffen und polirt und hierauf mit dem Spectralphotometer untersucht.

Die Absorptionsgrössen der Silicatgläser Co_5, Co_7, des Boraxglases Co_9 finden sich in Taf. III dargestellt.[2]) Zwischen

---

1) R. Pulfrich, Zeitschr. f. Instrumentenk. 1898. p. 381. Vgl. auch Specialprospect der Firma Zeiss in Jena.

2) Statt der Absorptionsgrössen *A* habe ich, um den Maassstab des Linienpapieres nicht abändern zu müssen, die Grösse 20 *A* ein-

den Curven von Co_5 und Co_7 liegt diejenige von Co_4; die letztere ist nicht eingetragen.

Mit Hülfe des Vergleichsspectroskopes wurden noch die Gläser Co_1 und Co_8 mit den obigen verglichen. Es ergiebt sich, dass das Spectrum von Co_8 mit dem von Co_7 zusammenfällt und dasjenige von Co_1 mit dem von Co_5.

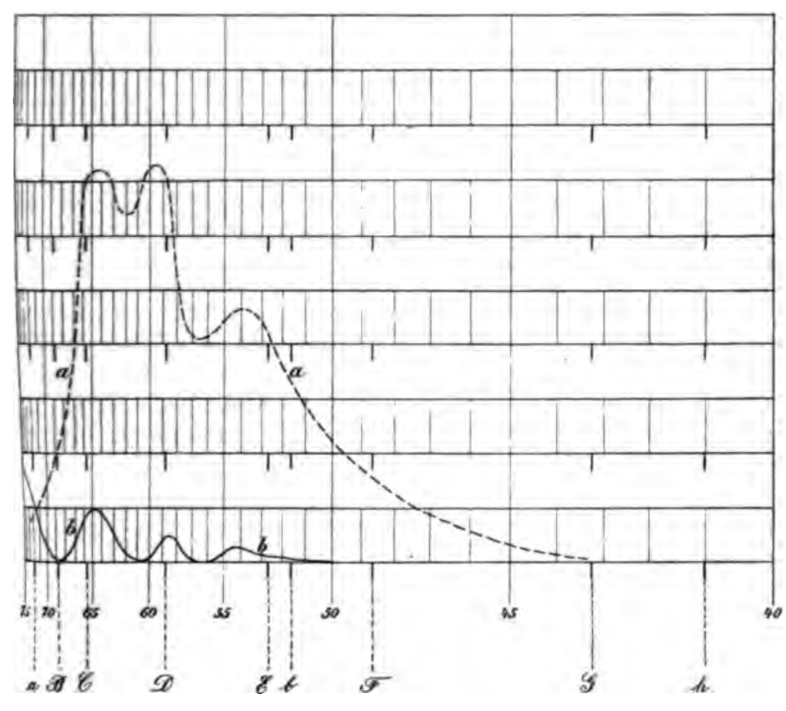


Fig. 1.

a Absorptionsspectrum des Kobaltglases nach Messung mit dem Spectralphotometer.
b Absorptionsspectrum des Kobaltglases nach Beobachtung mit dem Spectroskop.

Von Interesse ist die weitgehende Uebereinstimmung der Absorption der nach dem Typus $R'_2O.R''O.5SiO_2$ zusammengesetzten Kobaltgläser.

Viel geringer, wenn auch im Verlauf ganz ähnlich, ist die Absorption des Boraxglases Co_9; ganz abweichend dagegen

---

gezeichnet. Aehnliche Abänderungen finden sich auch bei anderen Gläsern; so wurden bei Nickel- und Chromgläsern 100 *A*, bei den sehr schwach absorbirenden Eisengläsern sogar 3000 *A* aufgetragen.

diejenige eines Borosilicatglases Co_{14} (reine Borsäure wird von Kobaltoxyd nur schwach rosenrot gefärbt).

Um zu zeigen, wie sehr die bildliche Darstellung der Absorptionsspectren nach Beobachtung mit dem Vergleichsspectroskop von der Darstellung der Absorptionsgrössen abweicht, sind in vorstehender Fig. 1 die Curven der Absorptionsgrössen des Glases Co_5 und die bildliche Darstellung des Absorptionsspectrums des Kobaltglases nach H. W. Vogel[1]) in dasselbe Liniensystem eingezeichnet.

Chromgläser (Taf. IV).

Die Chromgläser wurden unter Zusatz von soviel chemisch reiner, in Wasser gelöster Chromsäure zum Glassatze abgeschmolzen, dass die fertigen Gläser 0,99 Proc. Cr_2O_3 enthielten, unter der Annahme, dass die Chromsäure im Glase vollständig zu Cr_2O_3 reducirt wird.[2])

Die reinen Chromsilicatgläser Cr_1, Cr_3, Cr_6 und Cr_7 zeigen grosse Uebereinstimmung im Verlauf der Absorption im blauen Teile des Spectrums. Die aufsteigenden Aeste der Curven im Blau fallen bei den Gläsern Cr_1 und Cr_6 zusammen; ebenso diejenigen der Gläser Cr_3 und Cr_9. Im roten Teile zeigen sich grössere Verschiedenheiten. Wegen der unten erwähnten Unsicherheit der Chromfärbung unterlasse ich, die übrigen Curven einzuzeichnen.

Kupferoxydgläser (Taf. V).

Grosse Uebereinstimmung im Verlauf der Curven zeigen die Kupferoxydsilicatgläser. Ich zeichne in Taf. V den Ver-

---

1) l. c.

2) Diese Annahme wurde nur gemacht, um einen bestimmten Gehalt an Chrom der Rechnung zu Grunde zu legen; sie entspricht nicht vollständig den Thatsachen, wie schon von Linke und Adam (vgl. Eder und Valenta, l. c.) gezeigt worden war, die durch Verschmelzen eines Glases mit Cr_2O_3 weissgrüne, durch Verschmelzen mit K_2CrO_4 gelbgrüne Gläser erhalten hatten. Es scheint mir aber, dass in den von mir erschmolzenen Gläsern die Chromsäure *trotz der gelbgrünen Färbung* unter Sauerstoffabgabe grösstenteils reducirt wurde und dass die verschiedenen Färbungen der Chromgläser hauptsächlich auf verschieden färbende Zustände des Chromoxydes selbst zurückzuführen sind. Für diese Ansicht sprechen die Ausscheidungen, welche sich in übersättigten Chromgläsern bei langsamem Erkalten bilden.

lauf der Absorptionsgrössen für Cu_1, Cu_4 und Cu_7 und bemerke, dass Cu_3 mit Cu_7 nahezu vollkommen übereinstimmt.

Diese Gläser lassen auch in dickerer Schicht den blauen Teil des Spectrums nahezu ungeschwächt hindurchgehen, das Glas Cu_1 auch den violetten.

Stark abweichend ist die Absorption des Boraxglases Cu_9; noch mehr die des Borosilicatglases Cu_{12}.

Die gezeichneten Curven stellen die Absorptionsgrössen dar, wie sie sich aus der Messung eines Glases mit ca. 2 Proc. CuO ergeben. Vermehrt man in den blauen Silicatgläsern den Kupfergehalt auf das Drei- bis Fünffache, so erhält man grüne Gläser von ganz abweichender Absorption.

Nickelgläser (Taf. VI).

Eine viel grössere Mannigfaltigkeit als die bisher besprochenen Gläser zeigen die Nickelgläser in ihrer Färbung. Schon die Silicatgläser weisen untereinander beträchtliche Abweichungen der Absorption auf. Einigermaassen übereinstimmend sind nur die Absorptionsgrössen der Natronsilicatgläser Ni_1, Ni_3, Ni_5, deren Absorptionscurven nur wenig von der in Taf. VI eingezeichneten Curve Ni_3 abweichen.

Es ist bekannt, dass die mit Nickel gefärbten Natrongläser rotbraun oder rotviolett gefärbt sind, die Kaligläser dagegen violett. Dementsprechend ist der Verlauf der Absorptionscurven Ni_2 und Ni_4 ein anderer als der der Natrongläser. Die Curve von Ni_2 zeigt grosse Aehnlichkeit mit der des Kobaltsilicatglases, unterscheidet sich aber von dieser durch eine abweichende Lage der Maxima.

Der gänzlich abweichende Verlauf der Curven des braunen Nickelboraxglases Ni_9 und des gelben Glases Ni_{12} verdient Beachtung.

In Taf. VI ist noch die Curve des schweren Bleisilicatglases Ni_{15} eingezeichnet.

Mangangläser (Taf. VII).

Die Färbungen, welche den Gläsern durch Manganverbindungen erteilt werden, sind deshalb von Wichtigkeit, weil Manganhyperoxyd in Form von Braunstein schon seit langem zur Entfärbung des grünstichigen Glases Verwendung findet.

Wird reiner Braunstein dem farblosen Glasfluss zugesetzt, so färbt er Kaligläser violett, Natrongläser mehr rötlichviolett. Diese Färbungen sind bei mässiger Dicke Mischfarben aus allen Farben des Spectrums, von denen das Grün am meisten ausgelöscht wird, wie ein Blick auf die Curven von Taf. VII lehrt.

Es ist in der Glasindustrie bekannt, dass der Verwendung von Braunstein als Färbungs- wie auch als Entfärbungsmittel eine gewisse Unsicherheit anhaftet. Diese Unsicherheit ist nicht so sehr auf die dem Braunstein anhaftenden Verunreinigungen zurückzuführen, als vielmehr auf die Eigenschaft seiner Lösung, im Glasfluss durch Reductionsmittel in farblose Manganoxydulverbindungen überzugehen. Reductionsmittel finden sich aber in vielen Glassätzen, auch wirkt in offenen Häfen die Flamme häufig reducirend.

Um eine derartige Reduction möglichst zu verhindern, wurden meine Glassätze mit Mangannitrat oder mit Mangansuperoxyd versetzt (in solcher Menge, dass auf 100 g Glas 1 g Mn_2O_3 kamen), und die Flamme beim Abschmelzen so regulirt, dass eine Reductionswirkung derselben ausgeschlossen war.

Die Bedingungen waren also gegeben, dass die höchste beständige Oxydationsstufe entstehen konnte; trotzdem ging der grösste Teil des Mangansuperoxydes in Manganoxydulverbindungen über, die nicht oder nur sehr wenig gefärbt sind. Ich konnte das direct an Boratgläsern durch quantitative Bestimmung des beim Auflösen des Glases in kochender Salzsäure entweichenden Chlors feststellen (Methode Bunsen).

Jemehr in einem Glase die sauren Bestandteile gegenüber dem basischen vorwalten, um so mehr Sauerstoff verlieren die schon vorhandenen oder zunächst gebildeten höheren Oxydationsstufen des Mangans[1]); bei Gläsern von sehr saurer Zusammensetzung gehen die höheren Oxyde vollständig in Manganoxydul über, unter Abgabe des gesamten disponiblen Sauerstoffs.

Diese Sauerstoffabgabe tritt ein, gleichgültig, ob man dem Glassatze Mangannitrat oder Mangansuperoxyd zugesetzt hat.

Bei Gläsern mit mässigem Alkaligehalt (wie bei Borax) wird zwar der grösste Teil des verfügbaren Sauerstoffs (90 bis

1) Dieser Satz wurde nur für Boratgläser durch Analyse festgestellt. Es kommt ausser dem Säuregehalt auch noch die qualitative Zusammensetzung des Glases als mitbestimmend in Betracht.

95 Proc. desselben) abgegeben[1]), aber ein kleiner Rest desselben bleibt an das Manganoxydul oder einem Teil desselben chemisch gebunden im Glase. Solche Gläser sind mehr oder weniger intensiv gefärbt.

Welche Oxydationsstufe des Mangans die Färbung des Glases bedingt, konnte bisher nicht festgestellt werden; es kann das Hyperoxyd MnO_2 sein oder auch eines der Oxyde Mn_2O_3, Mn_3O_4 oder ein anderes noch nicht bekanntes Oxyd des Mangans. Die Möglichkeiten sind zu mannigfach, als dass sie der Erforschung zugänglich wären.

Von Wichtigkeit erscheint aber der Umstand, dass das dem Glase zugesetzte MnO_2 von ersterem zum grössten Teile als ungefärbtes MnO aufgenommen wird, dass also die Färbekraft der zugesetzten Manganverbindung nicht in vollem Maasse zur Geltung kommt. Dieser Umstand erklärt zum Teil die eingangs erwähnten Unsicherheiten der Manganfärbung; die Betrachtung des Verlaufes der Curven lässt vermuten, dass zwei verschiedene färbende Manganverbindungen im Glase bestehen, von denen die eine vorwiegend in Natrongläsern, die andere vorwiegend in Kaligläsern enthalten ist.

In Taf. VII sind nur einige der gemessenen Curven eingezeichnet; die Curve von Mn_5 stimmt beinahe vollkommen mit der eingezeichneten von Mn_3 überein. Mn_7 verläuft ähnlich der Curve Mn_3 liegt aber etwas tiefer. Ebenso erinnert der Verlauf der Curve von Mn_6, an den von Mn_4; die Absorptionsgrössen des ersteren Glases sind aber ungefähr halb so gross, als die des letzteren.

Wir bemerken also, wenn wir von den beiden Wassergläsern Mn_1 und Mn_2 absehen, eine Uebereinstimmung der Lichtabsorption durch die Kaligläser Mn_4 und Mn_6 einerseits und davon abweichend eine Uebereinstimmung der Absorption der Natrongläser Mn_3, Mn_5 und Mn_7 andererseits.

Eisenoxydgläser (Taf. VIII).

Ausserordentlich mannigfaltig sind die Färbungen, welche man durch Eisenoxyd in verschiedenen Gläsern hervorrufen

1) Ich habe den zum Zwecke der Analyse hergestellten Boratgläsern meist Mangansuperoxyd (MnO_2) vor dem Abschmelzen zugesetzt. Als verfügbaren Sauerstoff bezeichnet man den Sauerstoff, welcher von einem höheren Manganoxyde bei Behandlung mit Säuren unter Bildung von MnO abgegeben wird. Hier z. B. $MnO_2 = MnO + O$ oder $Mn_2O_3 = 2\,MnO + O$.

kann. Die drei Oxyde: Eisenoxyd, Eisenoxydul und Eisenoxyduloxyd können sowohl einzeln, als nebeneinander in ungebun-

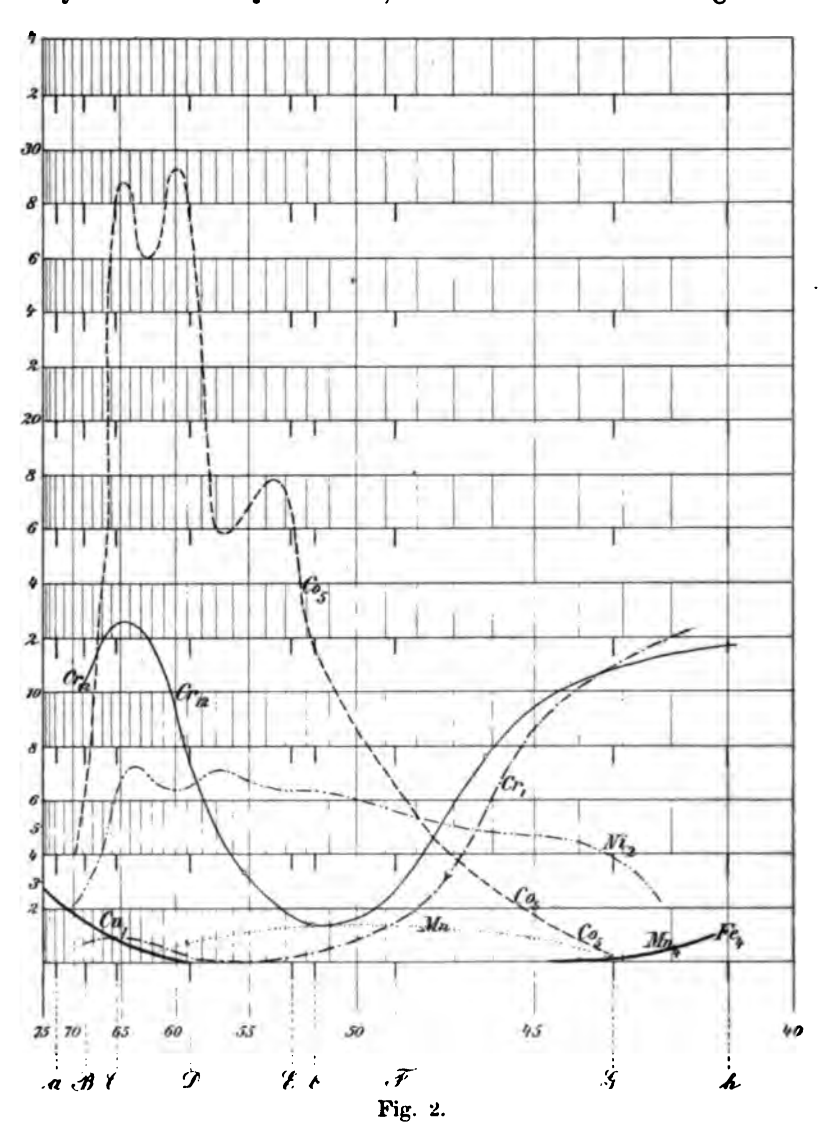


Fig. 2.

denem Zustande als auch in Verbindung mit Kieselsäure oder Borsäure vorhanden sein, sowie endlich als Doppelsalz, teil-

weise an Alkalien gebunden; dazu kommt noch, dass es nicht schwer fällt, das Eisen als Metall im Glas gelöst zu erhalten.

Jeder Verbindung des Eisens wird aber mindestens eine bestimmte Farbe zukommen. Es lassen sich daher durch Eisen in ein und demselben Glassatze die verschiedenartigsten Färbungen hervorrufen: man kann gelbe, gelbgrüne, grüne oder blaugrüne Farben erhalten. Es wird darum keinen Zweck haben, die zahlreichen, gemessenen und durcheinanderlaufenden Curven die grösstenteils Zufallsresultate darstellen, hier einzuzeichnen und ich gebe nur als Beispiel in Taf. VIII die Absorptionsgrössen des gelbgrünen Glases Fe_3, ferner die eines ähnlich zusammengesetzten Natron-Kalk-Silicatglases 1072 (mit 2 Proc. Fe_2O_3) und die desselben Glases, nachdem dem geschmolzenen Glase 1 Proc. MnO_2 eingerührt worden war, zum Zweck der Entfärbung[1]) (Curve 1075).

Man kann an den Curven der beiden letzterwähnten Gläser erkennen, dass der gelöste Braunstein nicht bloss als Complementärfarbe (die Absorption im Blaugrün verstärkend) wirkt, sondern auch die Absorption im roten Teile des Spectrums herabsetzt, eine Wirkung, die vermutlich auf eine Oxydation etwa vorhandenen Eisenoxyduls zurückzuführen ist.

Zum Schlusse möchte ich noch auf die grossen Verschiedenheiten in der färbenden Kraft der einzelnen Oxyde aufmerksam machen. Um einen Vergleich derselben zu ermöglichen, habe ich in Fig. 2 die Absorptionsgrössen A der Gläser Co_5, Cr_{12}, Ni_2, Cu_1, Mn_4 und Fe_4 in gleichem Maassstabe in ein Liniensystem eingetragen.

Man kann durch Betrachtung der Curven leicht ersehen, dass bei Anwesenheit gleicher Mengen von färbenden Oxyden in der Volumeneinheit Glassubstanz das Kobaltoxyd weitaus kräftiger färbend wirkt, als die anderen Oxyde, und dass dem Eisenoxyd ein sehr geringes Färbevermögen zukommt, ein Umstand, der, bei der weiten Verbreitung dieses Körpers zu der Natur, für die Glasindustrie von höchster Wichtigkeit ist.

Jena, im October 1900.

---

1) Diese beiden Gläser waren schon früher von Hrn. Grieshammer hergestellt worden.

(Eingegangen 27. October 1900.)

4. *Ueber das Decrement elektrischer Schwingungen bei der Ladung von Condensatoren;* *von A. F. Sundell und Hj. Tallqvist.*

1. Bei mehreren physikalischen Untersuchungen über gedämpfte Schwingungen sind die experimentell erhaltenen Werte der Schwingungszeit in Einklang mit der Theorie des Vorganges, während nur eine rohe oder gar keine Uebereinstimmung zwischen Theorie und Experiment in Bezug auf das Decrement der Schwingungen vorhanden ist. Die nachfolgende Untersuchung über die elektrischen Oscillationen bei der Ladung eines Condensators, welche als eine Fortsetzung einer früher veröffentlichten Untersuchung über dasselbe Thema[1]) zu betrachten ist, gewährt ein Beispiel, wo auch das experimentell erhaltene Decrement genau mit dem theoretisch zu ermittelnden Decremente stimmt, nachdem alle erforderlichen Correctionen angebracht sind, wie unten näher gezeigt wird. Im Gegensatz zu früheren Behauptungen[2]) ist es deshalb auch möglich von der Decrementsbestimmung der Ladungsschwingungen Nutzen für besondere Zwecke zu ziehen, z. B. für die Messung von Selbstinductionscoefficienten und Capacitäten.

Die im Folgenden dargestellten Methoden zur Berechnung des Decrementes bei einer einzelnen Ladungscurve sind von Sundell ausgearbeitet. Das experimentelle Material wurde 1896 im physikalischen Laboratorium des eidgenössischen Polytechnikums zu Zürich von Tallqvist gesammelt, nach einer in dem oben erwähnten Aufsatze näher beschriebenen Methode. Die Bearbeitung des Materiales und die ferneren Anwendungen der neuen Methoden zur Decrementsberechnung wurden von Tallqvist gemacht. Ausführlichere Angaben als in diesem Aufsatze findet man in einigen in den „Acta der

1) Hj. Tallqvist, Wied. Ann. **60.** p. 248. 1897.
2) Vgl. U. Seiler, Wied. Ann. **61.** p. 47. 1897.

finnländischen Gesellschaft der Wissenschaften" enthaltenen Abhandlungen.[1])

Methoden der Decrementsberechnung.

2. Wenn die beiden Belegungen eines Condensators von der Capacität C plötzlich durch eine Leitung verbunden werden, deren Widerstand W ist und die eine Batterie von der elektromotorischen Kraft E sowie eine Inductionsspule vom Selbstpotential L enthält, so genügt bekanntlich die während der Ladung des Condensators stattfindende veränderliche Potentialdifferenz p seiner Belegungen der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 p}{d t^2} + \frac{W}{L}\frac{d p}{d t} + \frac{p}{L C} = \frac{E}{L C}. \tag{1}$$

Für die augenblickliche Stromstärke i hat man den Ausdruck

$$i = C\frac{d p}{d t}. \tag{2}$$

Die Gleichungen (1) und (2) setzen ein constantes C voraus.

Weil das Isolationsvermögen der isolirenden Schichten der Inductionsspule nie absolut vollkommen ist, und eine kleine Leitfähigkeit dieser Schichten wegen der in der Spule vorhandenen und schnell wechselnden Spannungsdifferenzen einen merkbaren Einfluss auf das Decrement der Ladungsschwingungen ausübt, um so mehr, je kleiner der Widerstand des Stromkreises ist, so muss die Gleichung (1) noch vervollständigt werden. Einen ähnlichen Einfluss kann eine Leitfähigkeit des Dielektricums des Condensators ausüben. Indem man den Stromkreis als gespaltet betrachtet, erhält man statt (1) die Differentialgleichung[2])

$$\frac{d^2 p}{d t^2} + \left\{\frac{W}{L} + \frac{1}{C}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right)\right\}\frac{d p}{d t} + \frac{p}{L C} = \frac{E}{L C}, \tag{3}$$

worin R und r bez. die Widerstände des Condensators und der isolirenden Schichten der Inductionsspule bezeichnen und

1) A. F. Sundell, Acta Soc. Scient. Fenn. **24**. Nr. 11. 1899; Hj. Tallqvist, Acta Soc. Scient. Fenn. (I) **23**. Nr. 4. 1897; (III) **26**. Nr. 3. 1899.

2) Hj. Tallqvist, l. c. (I) p. 32.

sehr gross im Verhältnis zu W anzunehmen sind. Die Gleichung (3), welche für eine constante Capacität gilt, bekommt dieselbe Form wie die Gleichung (1), indem man W mit

$$W' = W + \frac{L}{C}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right)$$

ersetzt.

Es soll jetzt die Capacität C als veränderlich angesehen werden. In der Gleichung (2) kommt dann ein Glied hinzu. Die in der Zeit dt dem Condensator zugeführte totale Elektricitätsmenge $i\,dt$ setzt sich aus zwei Teilen zusammen: $C\,dp$, welcher Teil der Veränderung der Potentialdifferenz p um dp bei constant gehaltener Capacität entspricht, und $p\,dC$, welcher Teil schon erforderlich ist, um die Potentialdifferenz p constant zu erhalten, während die Capacität C um dC wächst. Somit folgt

$$(4) \qquad i = C\frac{dp}{dt} + p\frac{dC}{dt} = \frac{d(Cp)}{dt} = \frac{dq}{dt},$$

worin q die augenblickliche Ladung des Condensators bezeichnet.

Ausser dieser Gleichung (4) ergiebt sich eine Energiegleichung. In der Zeit dt verausgabt die Batterie die Energiemenge $E\,i\,dt$, welche folgendermaassen angewandt wird:

a) zur Erwärmung der Leitung der Betrag $W i^2 dt$;

b) zur Vermehrung der elektrodynamischen Energie des Stromkreises der Betrag $L\,i\,di = d\{\frac{1}{2} L i^2\}$;

c) zur Vermehrung der potentiellen Energie des Condensators. Bei constant gehaltener Capacität entspricht dem Zuwachse von p um dp die Energiemenge $q\,dp = Cp\,dp$, und bei unveränderten Potentialen der Belegungen nimmt die Energie durch das Wachsen von C um dC mit $\frac{1}{2}p^2 dC$ zu, sodass der ganze Zuwachs ist

$$Cp\,dp + \tfrac{1}{2}p^2 dC = d\{\tfrac{1}{2}Cp^2\}.$$

d) Zu den jetzt genannten Energiemengen kommt noch ein Glied hinzu, welches die mechanische Arbeit angiebt, welche bei der Vermehrung der Capacität des Condensators verrichtet wird. Hätte man z. B. einen Luftcondensator mit einer festen Platte von der Fläche F und im Abstande D einer gleich grossen beweglichen Platte, welche sich in der Zeit dt der

festen Platte um $-dD$ nähert, beim Erheben eines der gegenseitigen Anziehung der Platten gleichen Gewichtes

$$mg = \frac{Fp^2}{8\pi A^2 D^2},$$

wo A das Verhältnis der elektrostatischen und der elektromagnetischen Einheit der Elektricität ist, so wird hierbei verrichtet die Arbeit

$$-mg\,dD = -\frac{Fp^2}{8\pi A^2 D^2}\,dD = \tfrac{1}{2}p^2\,d\frac{F}{4\pi A^2 D} = \tfrac{1}{2}p^2\,dC,$$

welche auch der Batterie entzogen werden muss.

In einem Condensator mit festem Dielektricum muss man sich die entsprechende Arbeit in irgend einer Weise zur Vermehrung der dielektrischen Polarisation angewandt denken.

Für die Energiegleichung bekommt man jetzt

$$(5)\quad \begin{cases} Ei = Wi^2 + Cp\frac{dp}{dt} + \tfrac{1}{2}p^2\frac{dC}{dt} + \tfrac{1}{2}p^2\frac{dC}{dt} + Li\frac{di}{dt} \\ \quad = Wi^2 + pi + Li\frac{di}{dt} \text{ [laut Gleichung (4)].} \end{cases}$$

Nach Division mit i folgt hieraus die Gleichung

$$(6)\qquad E = Wi + p + L\frac{di}{dt},$$

welche für den Fall einer unveränderlichen Capacität sehr bekannt ist.

Durch Elimination von i zwischen (4) und (6) erhält man als Differentialgleichung des Ladungsvorganges

$$(7)\qquad \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{W}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = \frac{E}{L},$$

oder auch

$$(8)\quad \begin{cases} \frac{d^2p}{dt^2} = \left\{\frac{W}{L} + \frac{2}{C}\frac{dC}{dt}\right\}\frac{dp}{dt} \\ \qquad + \left\{\frac{1}{LC} + \frac{W}{L}\frac{1}{C}\frac{dC}{dt} + \frac{1}{C}\frac{d^2C}{dt^2}\right\}p = \frac{E}{LC}, \end{cases}$$

welche beiden Gleichungen lineare Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten darstellen.

3. Wir behandeln einen einfachen Specialfall, indem wir annehmen, dass die Capacität sich gleichförmig mit der Zeit ändert, und somit

$$C = C_0 + h\,t \tag{9}$$

setzen. Die Gleichung (8) giebt dann

$$\frac{d^2 p}{d t^2} + \left\{\frac{W}{L} + \frac{2h}{C}\right\}\frac{dp}{dt} + \frac{1 + Wh}{LC}\,p = \frac{E}{LC}, \tag{10}$$

eine lineare Differentialgleichung, wo die Coefficienten immer noch veränderlich sind, weil C von der Zeit abhängt. Für unseren Zweck genügt es jedoch einen constanten mittleren Wert C_m für C einzuführen, da wir diese Gleichung nur auf eine sehr kurze Zeit (zwei oder drei Halboscillationen) anwenden werden. Unter solchen Verhältnissen stellt die Gleichung (10) eine regelmässig gedämpfte Schwingung dar. Das allgemeine Integral ist:

$$p = \frac{E}{1 + Wh} + e^{-\left(\frac{W}{2L} + \frac{h}{C_m}\right)t}\{A\cos\beta t + B\sin\beta t\},$$

$$\beta = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{1 + Wh}{L C_m} - \frac{1}{4}\left(\frac{W}{L} + \frac{2h}{C_m}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{L C_m} - \left(\frac{W}{2L}\right)^2 - \left(\frac{h}{C_m}\right)^2},$$

wo T die Schwingungszeit ist. Ferner hat man das logarithmische Decrement

$$\alpha = \left(\frac{W}{L} + \frac{2h}{C_m}\right)\frac{\pi}{2\beta}.$$

In β können die Glieder

$$\left(\frac{W}{2L}\right)^2 \quad \text{und} \quad \left(\frac{h}{C_m}\right)^2,$$

die von derselben Ordnung sind, im Vergleich mit $1/L C_m$ vernachlässigt werden. Somit hat h keinen Einfluss auf die Schwingungszeit und für das Decrement ergiebt sich

$$\alpha = \frac{\pi}{2}\left(\frac{W}{L} + \frac{2h}{C_m}\right)\sqrt{L C_m} = \frac{\pi}{2}\,W\sqrt{\frac{C_m}{L}} + \pi h\sqrt{\frac{L}{C_m}}. \tag{11}$$

Durch eine gleichförmige Veränderung der Capacität wird somit das logarithmische Decrement um

$$\pi h \sqrt{\frac{L}{C_m}} = \frac{h\,T}{2\,C_m}$$

vergrössert (oder verkleinert).

Es werde die Grösse α „augenblickliches Decrement“, die Grösse $k = e^{\alpha}$ „augenblickliches Dämpfungsverhältnis“ genannt.

4. Da bei langsam erfolgender Veränderung der Capacität die Schwingung für eine kurze Zeit als regelmässig gedämpft angesehen werden kann, erhält man den mittleren Wert Q der „normalen Ladung“, um welche die Ladung hin und her oscillirt, aus drei aufeinander folgenden Ladungsextremen M_{n-1}, M_n, M_{n+1}, durch die Gleichung

$$(12)\quad Q_n = \frac{M_{n-1}\,M_{n+1} - M_n^2}{M_{n-1} + M_{n+1} - 2\,M_n} = M_{n-1} - \frac{(M_{n-1} - M_n)^2}{(M_{n-1} - M_n) + (M_{n+1} - M_n)}.$$

Der Veränderung von Q, wie sie diese Reihe zeigt, ist die Veränderung von C proportional. Somit wird eine Schätzung von h möglich mittels der Formel

$$(13)\qquad h = \frac{C'' - C'}{t'' - t'} \quad \text{oder} \quad \frac{h}{C_m} = \frac{C'' - C'}{C_m\,(t'' - t')} = \frac{Q'' - Q'}{Q_m\,(t'' - t')},$$

wo $C'\,C''$, $Q'\,Q''$ die Werte von C und Q am Anfange und am Ende des betrachteten Zeitintervalles, C_m, Q_m dagegen die mittleren Werte sind. Folglich ist auch das Decrement wegen des Einflusses von h corrigirbar.

5. Es soll hier die Decrementsberechnung in extenso für eine Curve gegeben werden, deren Daten sind:

$$C = 1{,}0119 \text{ Mikrof.},$$

$$L = 0{,}5933 \text{ Henry},$$

$$W = 3{,}191 \quad \text{Ohm}.$$

Der Condensator war ein vorzüglicher Glimmercondensator, welcher im Laboratorium als Normalinstrument benutzt wurde. Die Ladungsextreme der Curve sind in Scalenteilen angegeben:

Nr.	Minima	Diff.	Nr.	Maxima	Diff.
0	0				
		22,98	1	442,37	
2	22,98				23,15
		20,07	3	419,22	
4	43,05				14,75
		18,65	5	404,46	
6	61,70				15,71
		16,26	7	388,75	
8	77,96				14,93
		14,88	9	373,82	
10	92,84				12,75
		12,96	11	361,07	
12	105,80				12,72
		12,88	13	348,35	
14	118,68				10,47
		10,68	15	337,88	
16	129,36				9,20
		9,92	17	328,68	
18	139,28				9,68
		9,08	19	319,00	
20	148,36				

Die Differenzen zeigen, dass wenigstens das zweite Maximum einen bedeutenden zufälligen Fehler hat. Man könnte diesem Umstande abhelfen und ein ein klein wenig genaueres Resultat erzielen, indem man statt der beobachteten Ladungsextreme mittels graphischer Interpolation verbesserte Ladungsextreme benutzen würde. Am besten wendet man das graphische Ausgleichungsverfahren an auf die Unterschiede der beobachteten Minima und der Ordinaten einer angemessen gewählten Parabel sowie auf die Unterschiede der beobachteten Maxima und der Ordinaten einer zweiten Parabel, was bei einiger Uebung wenig Zeit in Anspruch nimmt. Jedoch sollen jetzt die auf die obige Curve sich beziehenden Rechnungen mit den ursprünglichen Werten ausgeführt werden. Die in den Art. 12 bis 17 enthaltenen Resultate sind dagegen sämtlich auf verbesserte Werte der Ladungsextreme gegründet.

Die folgende Tab. I enthält in der Columne „Q beobachtet“ die nach der Formel (12) berechneten Werte Q, in der Columne „Q verbessert“ die aus den Werten „Q beobachtet“ durch graphische Ausgleichung gewonnenen Werte, welche wir zur Ermittelung von h verwenden werden.

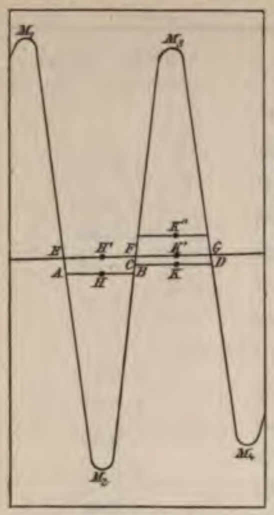
Tabelle I.

Nr.	Q beobachtet	Diff.	Q verbessert	Diff.	Q beob. − Q verb.
0	—		226,48		—
		—		+0,50	
1	227,08		226,98		+ 0,10
		− 0,36		0,45	
2	[226,72]		227,43		− 0,71
		− 0,48		0,41	
3	[226,24]		227,84		− 1,60
		+ 1,14		0,38	
4	[227,38]		228,22		− 0,84
		+ 1,16		0,35	
5	228,54		228,57		− 0,03
		+ 0,52		0,33	
6	229,06		228,90		+ 0,16
		+ 0,33		0,32	
7	229,39		229,22		+ 0,17
		+ 0,14		0,30	
8	229,53		229,52		+ 0,01
		+ 0,18		0,28	
9	229,71		229,80		− 0,09
		+ 0,36		0,26	
10	230,07		230,06		+ 0,01
		+ 0,21		0,24	
11	230,28		230,30		− 0,02
		− 0,11		0,22	
12	230,17		230,52		− 0,35
		+ 0,21		0,19	
13	230,38		230,71		− 0,33
		+ 0,46		0,17	
14	230,84		230,88		− 0,04
		+ 0,18		0,16	
15	231,02		231,04		− 0,02
		+ 0,25		0,15	
16	231,27		231,19		+ 0,08
		+ 0,29		0,15	
17	231,56		231,34		+ 0,22
		− 0,06		0,14	
18	231,50		231,48		+ 0,02
		− 0,03		0,12	
19	231,47		231,60		− 0,13
				0,11	
20			231,71		—

Die beobachteten Q sind überhaupt mit der Zeit wachsend. Der zweite, dritte und vierte Wert sind wegen des fehlerhaften zweiten Maximums stark abweichend und wurden bei der Interpolation nicht benutzt.

6. Für die Berechnung des Dämpfungsverhältnisses sind drei Ladungsextreme unzureichend. Denn bezeichnet man die Ladungen in den Punkten E, F, G (vgl. nachstehende Figur), in welchen die Curve für die normale Ladung die Schwingungscurve schneidet, mit Q_1, Q_2, Q_3, die nach (12) berechnete normale Ladung in H mit Q, so erhält man aus

den drei Ladungsextremen M_1, M_2, M_3 bei constanter Capacität (die Ladungen in A und $B = Q$) das Dämpfungsverhältnis



$$k' = \frac{M_1 - Q}{Q - M_2} = \frac{Q - M_2}{M_3 - Q}$$

oder

$$k' = \frac{M_1 - M_2}{M_3 - M_2}, \tag{14}$$

für die Dämpfungsverhältnisse der drei successiven Halboscillationen dagegen aus den vier successiven Ladungsextremen M_1, M_2, M_3, M_4 die Werte

$$k_1 = \frac{M_1 - Q_1}{Q_1 - M_2}, \quad k_2 = \frac{Q_2 - M_2}{M_3 - Q_2},$$

$$k_3 = \frac{M_3 - Q_3}{Q_3 - M_4}.$$

Wenn nun H gerade auf der Curve EFG in H' liegen würde, so erhielte man offenbar mit der Formel (14) einen im Verhältnis zur normalen Ladung in H' etwas zu kleinen Wert, da die Drehung von EF um H' in eine mit AB parallele Lage k_1 und k_2 (oder eigentlich ihre Logarithmen) um ungefähr gleich viel verkleinert. Dagegen wäre der für K aus M_2, M_3 und M_4 berechnete Wert

$$k'' = \frac{M_3 - M_2}{M_3 - M_4},$$

auch wenn K auf der Curve EFG in K' läge, ungefähr gleich viel zu gross gegen die normale Ladung in K, da die Drehung von FG um K' parallel CD k_2 und k_3 vergrössert. Man nimmt daher an für die normale Ladung Q_2 in F das Dämpfungsverhältnis $k = \sqrt{k' k''}$, oder

$$k = \sqrt{\frac{M_1 - M_2}{M_3 - M_4}}. \tag{15}$$

Hierbei werden die Fehler in k wegen der Abweichungen HH' und KK' nicht eliminirt. Sie heben sich nur teilweise auf, wenn H und K nach derselben Seite von EFG liegen, summiren sich aber, wenn diese Punkte nach entgegengesetzten Seiten (wie H und K'') liegen.[1])

1) Die Formel (15) liefert einen ziemlich richtigen Wert, nur wenn k nicht viel von der Einheit abweicht. Die k werden abwechselnd zu

Statt von α oder k bedient man sich für die logarithmische Rechnung am bequemsten des Decrementes

$$\gamma = \log\text{vulg}\, k = \alpha \log\text{vulg}\, e = M\alpha = 0{,}43429\ \alpha\,.$$

Um das „augenblickliche" Decrement (γ beobachtet in der Tab. II)

$$(16)\qquad \gamma_{n+1/2} = \tfrac{1}{2} \log \frac{M_{n-1} - M_n}{M_{n+1} - M_{n+2}}$$

auf das „definitive" Decrement zu reduciren, womit der Grenzwert von γ für $h = 0$ und C_m gleich der vollen Capacität C, d. h. die Grösse

$$(17)\qquad M \frac{\pi}{2} W \sqrt{\frac{C}{L}}$$

verstanden ist, sind zwei Reductionen erforderlich, nämlich:

1. Für das Ansteigen der Capacität die Reduction

$$(18)\qquad \left\{ \begin{aligned} \Delta_1 \gamma &= - M \pi h \sqrt{\frac{L}{C_m}} = - M \frac{h}{2} \frac{T}{C_m} \\ &= - M \frac{T}{2\, C_m} \frac{C_{n+1} - C_n}{\tfrac{1}{2} T} = - M \frac{Q_{n+1} - Q_n}{\tfrac{1}{2}(Q_n + Q_{n+1})}, \end{aligned} \right.$$

wobei h nach der Formel (13) derjenigen Halboscillation entnommen ist, für deren Mitte der Wert von γ gilt. Q_n und Q_{n+1} sind zwei successive Werte aus der Columne „Q verbessert" in der Tab. I.

2. Auf die volle Capacität 1,0119 Mikrof. und die entsprechende normale Ladung 231,98, welche die „definitive Ladung" des Condensators ist, die Reduction

$$(19)\qquad \Delta_2 \gamma = \frac{\pi}{4} W M \sqrt{\frac{C_m}{L}} \frac{C - C_m}{C_m} = \tfrac{1}{2} \gamma \frac{\Delta C}{C_m} = \tfrac{1}{2} \gamma \frac{\Delta Q}{\tfrac{1}{2}(Q_n + Q_{n+1})}.$$

wobei $\Delta Q = 231{,}98 - \tfrac{1}{2}(Q_n + Q_{n+1})$ ist; den Wert von γ in der Formel (19) genügt es, angenähert anzusetzen.

Die Tab. II enthält die für γ berechneten Werte und braucht wohl keiner näheren Erklärung.

---

gross und zu klein, aber diese Variation beträgt in unserem Falle nur etwa 3 Einheiten der letzten Decimale und wird somit gänzlich durch die Beobachtungsfehler gedeckt.

Tabelle II.

$\pm (M_n - M_{n-1})$	log vulg $\pm (M_n - M_{n-1})$	γ beobachtet	$\Delta_1 \gamma$	$\Delta_2 \gamma$	γ reducirt
$M_1 - M_0$	2,64579	—	—	—	—
$M_1 - M_2$	2,62262	[0,02392]	−86	+22	[0,02328]
$M_3 - M_2$	[2,59795]	[0,02362]	78	20	[0,02304]
$M_3 - M_4$	[2,57538]	[0,01997]	73	18	[0,01942]
$M_5 - M_4$	2,55800	[0,02020]	66	16	[0,01970]
$M_5 - M_6$	2,53499	0,02169	63	15	0,02121
$M_7 - M_6$	2,51461	0,02126	61	13	0,02078
$M_7 - M_8$	2,49247	0,02177	57	12	0,02132
$M_9 - M_8$	2,47108	0,02189	53	10	0,02146
$M_9 - M_{10}$	2,44868	0,02129	49	9	0,02089
$M_{11} - M_{10}$	2,42851	0,02084	45	8	0,02047
$M_{11} - M_{12}$	2,40700	0,02185	41	7	0,02151
$M_{13} - M_{12}$	2,38480	0,02295	36	6	0,02265
$M_{13} - M_{14}$	2,36110	0,02198	32	5	0,02171
$M_{15} - M_{14}$	2,34084	0,02098	30	5	0,02073
$M_{15} - M_{16}$	2,31915	0,02064	28	4	0,02040
$M_{17} - M_{16}$	2,29955	0,02089	28	3	0,02064
$M_{17} - M_{18}$	2,27738	0,02247	26	3	0,02224
$M_{19} - M_{18}$	2,25460	0,02265	23	2	0,02244
$M_{19} - M_{20}$	2,23208	—	—	—	—

Die eingeklammerten Zahlen hängen von dem zweiten Maximum ab.

Die reducirten Werte von γ wechseln ziemlich stark (zwischen 0,02040 und 0,02265, wenn die vier ersten nicht berücksichtigt werden). Die Variation wird wohl durch die Beobachtungsfehler verursacht, für welche das Dämpfungsverhältnis sehr empfindlich ist.

7. Für die Berechnung des definitiven Decrementes genügt es nicht, das arithmetische Mittel sämtlicher Werte „γ reducirt" zu nehmen, da in diesem nur die drei ersten und die drei letzten Extreme einwirken. Bildet man aber weitere Summen bei jedesmaligem Ausschliessen eines Wertes vom Anfange, und eines Wertes vom Ende der vorhergehenden Reihe, so bekommt man ungefähr gleich genaue Multipel des Decrementes, aus welchen ein Endresultat zu ziehen ist.[1])

1) In diesen Summen heben sich auch die p. 80 in der Note erwähnten Variationen der γ im allgemeinen auf.

Am bequemsten führt man die Rechnung in einer compendiösen, in der Tab. III veranschaulichten Weise aus. Die $\log \pm (M_n - M_{n-1})$ werden so aufgeschrieben: der letzte unter den ersten, der vorletzte unter den zweiten etc., und die Differenzen werden gebildet. Von zwei successiven Differenzen nimmt man das Mittel, an welches die entsprechende Summe der Reductionen $\Delta_1 \gamma + \Delta_2 \gamma$ anzubringen ist, nämlich an das erste Mittel die Summe sämtlicher Reductionen, an das zweite die Summe aller Reductionen mit Ausnahme der ersten und der letzten etc. Die so erhaltenen Zahlen sind identisch mit den oben erwähnten Summen der γ-Werte und enthalten das reducirte Decrement 18, 16, 14 . . . 4, 2 mal.

Tabelle III.

	log $\pm (M_n - M_{n-1})$	Differenz	Mittel	Reduction $= \Sigma(\Delta_1 \gamma + \Delta_2 \gamma)$	Multipel von γ	γ
$M_1 - M_0$	2,64579					
		0,41371				
$M_{19} - M_{20}$	2,23208					
			0,39086	− 697	0,38389 = 18 γ	0,02133
$M_1 - M_2$	2,62262					
		0,36802				
$M_{19} - M_{18}$	2,25460					
			[0,34430]	− 612	[0,33818] = 16 γ	[0,02114]
$M_3 - M_2$	[2,59795]					
		[0,32057]				
$M_{17} - M_{18}$	2,27738					
			[0,29820]	− 531	[0,29289] = 14 γ	[0,02092]
$M_3 - M_4$	[2,57538]					
		[0,27583]				
$M_{17} - M_{16}$	2,29955					
			[0,25734]	− 451	[0,25283] = 12 γ	[0,02107]
$M_5 - M_4$	2,55800					
		0,23885				
$M_{15} - M_{16}$	2,31915					
			0,21650	− 377	0,21273 = 10 γ	0,02127
$M_5 - M_6$	2,53499					
		0,19415				
$M_{15} - M_{14}$	2,34084					
			0,17383	− 304	0,17079 = 8 γ	0,02135
$M_7 - M_6$	2,51461					
		0,15351				
$M_{13} - M_{14}$	2,36110					
			0,13059	− 229	0,12830 = 6 γ	0,02138
$M_7 - M_8$	2,49247					
		0,10767				
$M_{13} - M_{12}$	2,38480					
			0,08587	− 154	0,08433 = 4 γ	0,02108
$M_9 - M_8$	2,47108					
		0,06408				
$M_{11} - M_{12}$	2,40700					
			0,04213	− 77	0,04136 = 2 γ	0,02068
$M_9 - M_{10}$	2,44868					
		0,02017				
$M_{11} - M_{10}$	2,42851					

Schliesst man die eingeklammerten Zahlen aus, so bekommt man

$$48\,\gamma = 1{,}02140.$$

Man kann sagen, dass in dieser Summe ein Fehler in M_{20} einmal, in M_1, M_9, M_{11} und M_{19} dreimal, ein Fehler in M_{10} beinahe gar nicht, ein Fehler in den übrigen Ladungsextremen aber viermal wirkt. Begnügt man sich mit dieser Fehlerverteilung, wird als wahrscheinlichster Wert erhalten

$$\gamma = 0{,}02128 \pm 4{,}3\,,$$
$$k = 1{,}0502 \pm 1{,}0\,.$$

Von diesem Werte weichen die aus den Ladungsextremen berechneten γ teilweise stark ab (bis 137 Einheiten), wegen der Beobachtungsfehler. Der angegebene wahrscheinliche Fehler ist aus den oben angegebenen Specialwerten von γ berechnet, wobei die Multipelfactoren als zugehörige Gewichte angewandt wurden. Die Unsicherheit in den Werten von γ und k ist, wie ersichtlich, sehr klein.

8. Da die normale Ladung für jede Halboscillation durch die oben erwähnte Interpolation (Tab. I) bekannt ist, kann man k auch für jede Halboscillation aus zwei successiven Extremen berechnen. In der Tab. IV sind die so erhaltenen γ und die benutzten Werte von Q angeführt, ferner die Reductionen $\Delta_1\,\gamma$ und $\Delta_2\,\gamma$ (identisch mit den in der Tab. II enthaltenen Reductionen), sowie die reducirten γ. Von zwei successiven γ ist der mittlere Wert genommen („Mittel I“) und wieder der mittlere Wert von diesen Mitteln („Mittel II“). Diese letztgenannten Mittel hängen somit von vier successiven Extremen ab, wie die „γ reducirt“ in Tab. II, und stimmen auch sehr nahe mit diesen überein.

Bildet man von den „reducirten γ“ in Tab. IV die Summen, wie oben für die reducirten γ in Tab. II beschrieben wurde, so bekommt man wieder Multipel von γ, in deren Summe die Fehler sämtlicher Extreme (mit Ausnahme des Minimums M_{10}) jeder einmal wirken. Mit Ausschliessung des Multipels 14γ, in welchem das zweite Maximum einwirkt, bekommt man

$$96\,\gamma = 2{,}04294,$$
$$\gamma = 0{,}02128 \pm 4{,}3,$$

genau wie früher, was zu erwarten war. Von den beiden Rechnungsmethoden ist die erste vorzuziehen, da man keine Amplituden zu berechnen braucht und da das Schema nach Tab. III die Rechnung ausserordentlich erleichtert und beschleunigt.

Tabelle IV.

Q	γ beob.	$\Delta_1 \gamma$	$\Delta_2 \gamma$	γ reducirt	Mittel I	Mittel II
226,74	0,02182	−96	+24	0,02110	0,02155	—
227,21	0,02264	86	22	0,02200	0,02505	0,02330
227,64	[0,02869]	78	20	[0,02811]	0,02095	0,02300
228,03	[0,01435]	73	18	[0,01380]	0,01781	0,01938
228,40	0,02233	66	16	0,02183	0,02167	0,01974
228,74	0,02200	63	15	0,02152	0,02071	0,02119
229,06	0,02039	61	13	0,01991	0,02087	0,02079
229,37	0,02228	57	12	0,02183	0,02177	0,02132
229,66	0,02214	53	10	0,02171	0,02117	0,02147
229,93	0,02102	49	9	0,02062	0,02057	0,02087
230,18	0,02089	45	8	0,02052	0,02038	0,02048
230,41	0,02059	41	7	0,02025	0,02267	0,02153
230,62	0,02539	36	6	0,02509	0,02267	0,02267
230,80	0,02053	32	5	0,02026	0,02062	0,02165
230,96	0,02124	30	5	0,02099	0,02079	0,02071
231,12	0,02083	28	4	0,02059	0,01997	0,02038
231,27	0,01961	28	3	0,01936	0,02135	0,02066
231,41	0,02358	26	3	0,02335	0,02317	0,02226
231,54	0,02320	23	2	0,02299	0,02168	0,02242
231,66	0,02056	20	1	0,02037		—

9. Um den zeitlichen Verlauf der Capacität zu ermitteln, wurden Ladungscurven ohne Inductionsspule aufgenommen. Diese Curven zeigen einerseits, dass die Capacität eines guten Glimmercondensators ihren vollen Wert erst nach etwa zwei Secunden erlangt, und andererseits, dass schon nach sehr kurzer Zeit der Unterschied der augenblicklichen Ladung von der maximalen nur wenige Zehntel Procent ist. Es ist daher sehr unwahrscheinlich, dass die normale Ladung z. B. bei

der Zeit des ersten Maximums nur 227,08 (Tab. I) sei oder mit 2,11 Proc. unter die definitive normale Ladung herabsinkt. Laut einer für die Daten $C = 1{,}0119$ Mikrof., $L = 0$, $W = 0{,}275$ Ohm ohne Spule aufgenommenen Curve würde man nach 2,5 m/sec. eine Ladung von etwa 99,44 Proc. erwarten. Es ist somit anzunehmen, dass die Capacität während der ersten Halboscillation von einem unbekannten Anfangswerte nahe bis zu ihrer definitiven Grösse anwächst, infolge dessen das Dämpfungsverhältnis stark vergrösst werden muss. Hierdurch wird aber auch eine Versetzung der normalen Ladung von 227,08 etwas nach oben bedingt, damit die erste Amplitude gehörig vergrössert, die zweite verkleinert werde. Während der zweiten Halboscillation sinkt die Capacität wieder herunter und das Dämpfungsverhältnis erscheint sehr erniedrigt, was auch die Verschiebung der normalen Ladung nach oben bewirkt, da die dritte Amplitude dadurch vergrössert wird. In dieser Weise steigt die Capacität während der ersten, dritten, fünften . . . Halboscillation, und sinkt während der zweiten, vierten, sechsten . . . Halboscillation. Die entsprechenden Variationen des Dämpfungsverhältnisses sind dadurch zu bewirken, dass man die Curve für die normale Ladung etwas höher zieht als die in der Tab. I interpolirte Curve, da die Gleichung (12) zu kleine Werte von Q liefert. Nimmt man nun vorläufig an, dass während zweier successiven Halboscillationen das Steigen und das Sinken der Capacität gleichförmig und gleich stark sei, so ist nach der Gleichung (11) beim Steigen

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} W \sqrt{\frac{C_m}{L}} + \pi h \sqrt{\frac{L}{C_m}},$$

beim Sinken

$$\alpha_2 = \frac{\pi}{2} W \sqrt{\frac{C_m}{L}} - \pi h \sqrt{\frac{L}{C_m}}.$$

Die an γ_1 und γ_2 anzubringenden Reductionen sind somit:

$$\Delta \gamma_1 = - M \pi h \sqrt{\frac{L}{C_m}} = - \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2},$$

$$\Delta \gamma_2 = + M \pi h \sqrt{\frac{L}{C_m}} = + \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2}.$$

Man berechnet nun $\pm \frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_2)$ aus je zwei successiven Decrementen, setzt diese Zahlen graphisch aus und zieht eine Curve, aus welcher man die betreffende Reduction für jede Halboscillation nehmen kann. Weiter hat man die beiden Reductionen $\Delta_1 \gamma$ und $\Delta_2 \gamma$ anzubringen, welche nach der neuen Curve der normalen Ladung zu berechnen sind. Aus den so erhaltenen γ zieht man den Mittelwert, wie früher bei der Tab. IV angeführt wurde. Wenn die neue Curve der normalen Ladung richtig getroffen ist, so muss das so erhaltene Decrement mit dem früher gefundenen stimmen. Bei der Versetzung der Ladungen Q nach oben ist darauf zu sehen, dass die Oscillationen der Capacität nicht zu stark werden, denn die Capacität darf nicht über ihren definitiven Wert wachsen.

Diese Rechnung ist für die betreffende Schwingungscurve ausgeführt worden, wobei jede Ladung Q der Tab. IV um ein Drittel des Unterschiedes gegen die definitive Ladung 231,98 aufwärts verschoben wurde. Nach der Reduction für die Oscillation der Capacität, die von 660 Einheiten für die erste bis zu 56 Einheiten für die letzte Halboscillation herabsinkt, hat man noch zwei Drittel der Reductionen $\Delta_1 \gamma$ und $\Delta_2 \gamma$ der Tab. IV anzubringen. Als Resultat erhält man $\gamma = 0{,}02141 \pm 4{,}2$, was um 13 Einheiten von dem früher erhaltenen Werte abweicht. Man kann auch nicht ein besseres Uebereinstimmen erwarten, da die Gesetze für die Oscillationen der Capacität nicht bekannt sind, weshalb diese Rechnung nur als eine Näherung anzusehen ist.

10. Einen interessanten Vergleich der beiden Rechnungen mit den Beobachtungen erhält man folgenderweise. An die gefundenen Endwerte von γ werden sämtliche Reductionen rückwärts angebracht und das wahrscheinliche Decrement für jede Halboscillation ermittelt. Mit diesen Decrementen werden dann die successiven Amplituden berechnet, wobei als erste Amplitude die erste normale Ladung benutzt wird. Aus den Amplituden gehen dann die Ladungsextreme hervor, welche mit den beobachteten Extremen zu vergleichen sind. In der Tab. V sind die zurückbleibenden Fehler angeführt, sowohl für die Rechnung ohne Annahme einer Oscillation der Capacität ($\gamma = 0{,}02128$), wie auch bei oscillirender Capacität ($\gamma = 0{,}02141$).

Tabelle V.

Fehler der Ladungsextreme. Beobachtung — Rechnung.

Ladungs-extreme	Ohne Oscillation der Capacität	Mit oscillirender Capacität	Ladungs-extreme	Ohne Oscillation der Capacität	Mit oscillirender Capacität
M_1	+0,09	−0,10	M_{11}	+0,34	+0,23
M_2	+0,26	+0,39	M_{12}	−0,62	−0,44
M_3	−3,28	−3,47	M_{13}	−0,45	−0,52
M_4	−0,05	+0,14	M_{14}	+0,17	+0,30
M_5	−0,18	−0,35	M_{15}	−0,09	−0,15
M_6	+0,26	+0,46	M_{16}	−0,08	0,00
M_7	+0,26	+0,10	M_{17}	+0,50	+0,45
M_8	−0,06	+0,14	M_{18}	−0,04	−0,01
M_9	−0,09	−0,23	M_{19}	−0,31	−0,37
M_{10}	−0,12	+0,08	M_{20}	+0,12	+0,05

Nur das zweite Maximum (M_3) weicht stark vom berechneten Werte ab. Alle übrigen Abweichungen stehen weit unter einem Scalenteile. Die Summe der Fehlerquadrate ist 1,38 in der Columne ohne Oscillation und 1,57 in der Columne mit Oscillation (beim Ausschliessen des zweiten Maximums).

11. Man erhält folgenderweise eine Formel, welche ermöglicht, den bei der Anwendung der Formel (15) in γ entstehenden Fehler zu schätzen.

Zuerst nimmt man an, dass die Capacität und damit die normale Ladung gleichförmig wächst. Laut der Formel (19) oben wächst dann auch das logarithmische Decrement gleichförmig mit der Capacität. Das geometrische Mittel zweier Dämpfungsverhältnisse, die gleich weit nach beiden Seiten von einer gewissen Capacität liegen, ist sehr nahe gleich dem zu dieser Capacität gehörenden Dämpfungsverhältnisse. Bezeichnet man die zu den successiven Halboscillationen gehörenden normalen Ladungen mit Q_1, Q_2, Q_3 ... [1]), so hat man, wenn man von der Ladung $Q_{p+1/2}$ nach beiden Seiten geht:

1) Um den Nenner 2 nicht überall gebrauchen zu müssen, sind die Indices von Q mit der Zahl $\frac{1}{2}$ grösser angesetzt als in Art. 4. Die Indices von k und M stimmen mit der früheren Bezeichnung überein.

$$k_p^2 = \frac{M_{p-1} - Q_p}{Q_p - M_p} \frac{Q_{p+1} - M_p}{M_{p+1} - Q_{p+1}},$$

$$= \frac{Q_{p-1} - M_{p-2}}{M_{p-1} - Q_{p-1}} \frac{M_{p+1} - Q_{p+2}}{Q_{p+2} - M_{p+2}},$$

$$= \frac{M_{p-2} - Q_{p-2}}{Q_{p-2} - M_{p-2}} \frac{Q_{p+3} - M_{p+2}}{M_{p+3} - Q_{p+3}},$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$= \frac{M_{p-q+1} - Q_{p-q+2}}{Q_{p-q+2} - M_{p-q+2}} \frac{Q_{p+q-1} - M_{p+q-2}}{M_{p+q-1} - Q_{p+q-1}},$$

$$= \frac{Q_{p-q+1} - M_{p-q}}{M_{p-q+1} - Q_{p-q+1}} \frac{M_{p+q-1} - Q_{p+q}}{Q_{p+q} - M_{p+q}}.$$

Durch Multiplication sämtlicher Werte erfolgt:

$$20)\left\{\begin{aligned} k_p^{2q} &= \frac{Q_{p-q+1} - M_{p-q}}{M_{p-q+1} - Q_{p-q+1}} \frac{M_{p-q+1} - Q_{p-q+2}}{Q_{p-q+2} - M_{p-q+2}} \cdots \frac{M_{p-1} - Q_p}{Q_p - M_p}, \\ &\frac{Q_{p+1} - M_p}{M_{p+1} - Q_{p+1}} \cdots \frac{Q_{p+q-1} - M_{p+q-2}}{M_{p+q-1} - Q_{p+q-1}} \frac{M_{p+q-1} - Q_{p+q}}{Q_{p+q} - M_{p+q}}. \end{aligned}\right.$$

Mittels logarithmischer Differentiation berechnet man hieraus bis auf kleine Grössen höherer Ordnung genau denjenigen Fehler $\Delta \alpha_p$, der in α_p entsteht, wenn man die Ladungen Q im zweiten, dritten . . . letzten Zähler zur Gleichheit mit Q im ersten, zweiten . . . vorletzten Nenner abändert, sowie Q_{p-q+1} im ersten Zähler und Q_{p+q} im letzten Nenner mit $Q_{p+1/2}$ ersetzt. Man erhält:

$$(21) \quad 2q\,\Delta \alpha_p = \pm \left\{ \frac{1 + k^{2q-1}}{1 + k} \frac{k}{A_{p-q}} + (q - \tfrac{1}{2}) \frac{A_{p-q} + A_{p+q}}{A_{p-q}\,A_{p+q}} \right\} g,$$

$$q = 1,\ 2,\ 3 \ldots,$$

wo A die Amplituden sind, g die Zunahme von Q während einer Halboscillation bedeutet, und das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem $p - q$ und $p + q$ die Indices zweier Minima (beide gerade) oder die Indices zweier Maxima (beide ungerade) sind.

Wendet man jetzt die Formel (21) zur Fehlerschätzung bei der Formel (15) an, so erhält man z. B. für die drei ersten nach der Tab. V corrigirten Extreme $M_0 (= 0)$, M_1, M_2, wobei also $p = q = 1$ ist,

$$\Delta \alpha_1 = \tfrac{1}{2} \left(\frac{k}{A_0} + \tfrac{1}{2} \frac{A_0 + A_2}{A_0\,A_2} \right) g = \frac{(1 + k)^2}{4\,A_0}\, g_{12},$$

oder für γ_1 +95 Einheiten. Für M_1, M_2, M_3 ist $p=2$, $q=1$ und es folgt

$$\varDelta\alpha_2 = -\frac{k(1+k)^2}{4\,A_0}g_{23} = -\frac{(1+k)^2}{4\,A_1}g_{23},$$

sowie für γ_2 −91 Einheiten. Setzt man laut Formel (15) $\gamma_{3/2} = \frac{1}{2}(\gamma_1+\gamma_2)$, so wird $\gamma_{3/2}$ fehlerhaft um nur etwa 2 Einheiten. Wenn k nicht viel von der Einheit abweicht, wird somit der Fehler sehr unbedeutend.

Bei grösserem k kann man einen Schritt weiter gehen. Man hat nämlich, falls g einigermaassen constant ist,

$$\varDelta\alpha_{3/2} = \frac{1}{2}(\varDelta\alpha_1+\varDelta\alpha_2) = \frac{(1-k)(1+k)^2}{8\,A_0}g,$$

$$\varDelta\alpha_{5/2} = \frac{1}{2}(\varDelta\alpha_2+\varDelta\alpha_3) = -\frac{k(1-k)(1+k)^2}{8\,A_0}g.$$

Setzt man nun $\alpha_2 = \frac{1}{2}(\alpha_{3/2}+\alpha_{5/2})$, so wird dieser Wert fehlerhaft nur um

$$\frac{1}{2}(\varDelta\alpha_{3/2}+\varDelta\alpha_{5/2}) = \frac{(1-k)^2(1+k)^2}{16\,A_0}g.$$

Bei grossem k nimmt man daher zweckmässig die Mittel zweier successiven „γ beobachtet“ der Tab. II, an welche dann die Reductionen $\varDelta_1\gamma$ und $\varDelta_2\gamma$ anzubringen sind, oder bedient sich vielleicht noch besser der Methode von Tab. IV.

Decrement der Ladungsschwingungen.

12. Es handelt sich jetzt darum, die aus den experimentellen Bestimmungen der Maxima und Minima von Ladungscurven nach den oben gegebenen Methoden berechneten Decremente mit der Theorie zu vergleichen. Zu diesem Zwecke sind zuerst in der folgenden Tabelle die Decremente derjenigen Curven zusammengestellt, für welche Beobachtungen der Maxima und Minima gemacht wurden. Ausser den charakteristischen Daten der Curven giebt die Tabelle sowohl die ohne eine Oscillation der Capacität, wie die mit oscillirender Capacität, einer Erhöhung der normalen Ladung um $\frac{1}{3}\varDelta Q$ entsprechend, berechneten Decremente. Die Curven ordnen sich zu vier Serien zusammen, mit demselben Werte von L und C und verschiedenen Werten von W innerhalb jeder Serie. Ausserdem kommen einige einzeln stehende Curven vor, welche für einen besonderen Zweck in Art. 16 verwendet werden.

Bezeichnung der Curve		L in Henry	C in Mikrof.	W in Ohm	Definitives Decrement γ Ohne osc. Cap.	Mit osc. Cap.
Serie Ia	Nr. 1	0,5933	0,5071	3,217	0,02841 ± 4,0	0,02843 ± 3,5
	Nr. 2	0,5933	0,5071	12,563	0,03437 ± 4,3	0,03441 ± 4,3
	Nr. 3	0,5933	0,5071	24,693	0,04237 ± 1,5	0,04239 ± 1,2
Serie Ib	Nr. 1	0,5933	1,0119	3,191	0,02126 ± 1,1	0,02138 ± 1,2
	Nr. 2	0,5933	1,0119	6,356	0,02647 ± 1,2	0,02652 ± 1,8
	Nr. 3	0,5933	1,0119	12,577	0,03019 ± 1,7	0,03024 ± 1,8
	Nr. 4	0,5933	1,0119	18,679	0,03551 ± 4,8	0,03554 ± 4,9
	Nr. 5	0,5933	1,0119	24,725	0,04089 ± 4,7	0,04091 ± 4,5
Serie Ic	Nr. 1	0,5933	1,5182	3,193	0,01902 ± 4,8	0,01911 ± 4,9
	Nr. 2	0,5933	1,5182	12,556	0,02895 ± 4,3	0,02906 ± 3,1
	Nr. 3	0,5933	1,5182	24,674	0,04255 ± 0,7	0,04262 ± 1,3
Serie Id	Nr. 1	0,5933	2,0229	3,224	0,01703 ± 4,9	0,01713 ± 5,4
	Nr. 2	0,5933	2,0229	6,369	0,02194 ± 3,2	0,02197 ± 3,7
	Nr. 3	0,5933	2,0229	12,594	0,02954 + 2,2	0,02961 ± 2,3
	Nr. 4	0,5933	2,0229	18,647	0,03719 ± 3,1	0,03721 ± 3,3
	Nr. 5	0,5933	2,0229	24,710	0,04447 ± 2,4	0,04452 ± 3,2
	Nr. 6	0,5933	2,0229	42,121	0,06615 ± 2,7	0,06617 ± 4,0
	Nr. 7	0,5933	2,0229	65,148	0,09567 ± 16,8	0,09580 ± 19,8
	(*A*)	0,1926	2,0229	1,801	0,02384 ± 1,9	0,02389 ± 1,6
	(*B*)	1,1854	2,0229	6,158	0,01504 ± 5,6	0,01507 ± 5,4
	(*C*)	0,5933	0,2033	3,171	0,04294 ± 7,8	0,04305 ± 6,0
	(*D*)	0,08875	2,0229	1,250	0,04447 ± 6,5	0,04443 ± 7,0
	(*E*)	0,3843	2,0229	3,450	0,01941 ± 0,7	0,01942 ± 1,0
	(*F*)	0,8409	2,0229	5,123	0,01655 ± 0,5	0,01660 ± 0,6

Die mit Oscillation der Capacität berechneten Werte des Decrementes sind wie ersichtlich fast ohne Ausnahme nur ganz unbedeutend grösser als die für nicht oscillirende Capacität sich ergebenden Werte. Der Unterschied rührt wohl hauptsächlich von der Berechnungsmethode der Decremente mit Oscillation her, welche ein willkürliches Element, die Versetzung der normalen Ladung, in sich schliesst, und dürften die ohne Oscillation der Capacität berechneten Werte als etwas zuverlässiger in Betracht kommen.

13. In Uebereinstimmung mit der Differentialgleichung (3) soll zwischen dem Widerstande W des Stromkreises und dem

definitiven logarithmischen Decremente der Schwingungen eine lineare Relation

(22) $$\gamma = a + b\,W$$

bestehen, worin die Coefficienten die Werte

(23) $$a = M\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right);\qquad b = M\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

haben.

Setzt man die Werte von γ der obigen Tabelle für jede der vier Serien I graphisch aus, so sieht man, dass die erhaltenen Punkte überhaupt sehr gut in gerader Linie liegen. Nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet man die folgenden linearen Relationen zwischen W und γ, wobei auch die wahrscheinlichen Fehler der Coefficienten a und b in Einheiten der letzten Decimale angegeben sind.

Nicht oscillirende Capacität.

Serie Ia: $\gamma = \{0{,}02628 \pm 7\} + \{0{,}0006505 \pm 42\}\,W$,
„ Ib: $\gamma = \{0{,}01914 \pm 34\} + \{0{,}0008815 \pm 210\}\,W$,
„ Ic: $\gamma = \{0{,}01539 \pm 19\} + \{0{,}0010967 \pm 117\}\,W$,
„ Id: $\gamma = \{0{,}01350 \pm 15\} + \{0{,}0012588 \pm 48\}\,W$.

Oscillirende Capacität.

Serie Ia: $\gamma = \{0{,}02630 \pm 6\} + \{0{,}0006500 \pm 36\}\,W$,
„ Ib: $\gamma = \{0{,}01925 \pm 33\} + \{0{,}0008774 \pm 208\}\,W$,
„ Ic: $\gamma = \{0{,}01550 \pm 17\} + \{0{,}0010956 \pm 107\}\,W$,
„ Id: $\gamma = \{0{,}01354 \pm 15\} + \{0{,}0012595 \pm 47\}\,W$.

14. Die erhaltenen Coefficienten a und b sollen jetzt näher discutirt werden, wobei der Anfang mit dem Coefficienten a gemacht werden mag. Weil die Grössen R und r, d. h. der Isolationswiderstand des Condensators und der Widerstand der isolirenden Schichten der Inductionsspule bez., nicht direct gemessen worden sind, was besonders in Bezug auf die nicht genau definirbare Grösse r schwerlich ausführbar gewesen wäre, so ist eine Berechnung des theoretischen Wertes von a nicht möglich. Nichtsdestoweniger erlaubt die erste Formel (23) einige interessante Schlüsse betreffend der Grössen R und r und deren Einfluss auf die Dämpfung der Schwingungen zu ziehen. Aus dem beobachteten Werte von a lässt sich, weil

L und C bekannt sind, die Grösse $1/R + 1/r$ oder ihr reciproker Wert

$$w = \frac{Rr}{R + r} \tag{24}$$

berechnen. Man erhält hierbei, wenn man sich auf die ohne Oscillation der Capacität berechneten Werte des Decrementes beschränkt, folgende Zusammenstellung:

Serie	w in Ohm
Ia	28090
Ib	27290
Ic	27700
Id	27380

Diese Werte zeigen, dass w innerhalb der Fehlergrenzen constant bleibt, denn ihr Mittel beträgt

$$w = 27\,620 \pm 120$$

und der wahrscheinliche Fehler einer einzelnen Bestimmung 240 = 0,9 Proc., während das Mittel der wahrscheinlichen Fehler der Coefficienten a (p 92) gleich 1,1 Proc. ist.

Sämtliche Serien gehören derselben Combination von Windungsgruppen an der Inductionsspule und somit demselben Werte des Selbstinductionscoefficienten an. Es verbleibt also r derselbe in allen Serien. Dagegen variiert R von Serie zu Serie, weil die Capacität eine andere ist. Da w jedoch constant bleibt, so muss R überhaupt so gross sein, dass w von R unabhängig ist, und

$$w = r \tag{25}$$

zu nehmen ist. Dies stimmt auch mit der Erfahrung, dass der Isolationswiderstand eines guten Glimmercondensators noch in Megohm zu zählen ist.

Mit der Combination von Windungsgruppen an der Inductionsspule zeigte sich w als wesentlich veränderlich.[1])

In der experimentellen Bestimmung des Coefficienten a der Formel (22) besitzt man nach dem oben Gefundenen ein Mittel zur Messung des Isolationswiderstandes einer Inductionsspule.

---

1) Hj. Tallqvist, Untersuchungen über elektrische Schwingungen I. p. 96.

Die Differentialgleichung (3) nimmt die Form der Differentialgleichung (2) an, wenn man statt des wirklichen Widerstandes W des Stromkreises die Grösse

$$W' = W + \frac{L}{C}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right)$$

als einen neuen (fictiven) Widerstand einführt. Für die Differenz der beiden Widerstände

$$W' - W = \frac{L}{C}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right) = \frac{L}{C}\frac{1}{w} \tag{26}$$

ergiebt sich bei den obigen Serien:

Serie	$W' - W$ in Ohm
I a	41,65
I b	21,48
I c	14,11
I d	10,71

Diese Widerstände sind somit von derselben Grössenordnung wie die Widerstände W des Stromkreises und üben folglich einen wesentlichen Einfluss auf die Dämpfung der Ladungsschwingungen aus.

Schliesslich ist noch zu erwähnen, dass *die experimentelle Bestimmung des Coefficienten a der Formel* (22) *benutzt werden kann, um das Leitungsvermögen von schwach leitenden Substanzen zu messen,* indem man elektrische Oscillationen hervorruft, das eine Mal in einem Stromkreise, wie es für den gegenwärtigen Zweck construirt war, das andere Mal in demselben Stromkreise, nachdem der isolirende Körper der Inductionsspule oder dem Condensator parallel geschaltet worden ist.

15. Von grösserem Interesse noch als der Coefficient a ist der Coefficient b. Nach der zweiten Formel (23) ist der theoretische Wert von b

$$b = M\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Die folgende Tabelle giebt einen Vergleich zwischen den beobachteten und den berechneten Werten von b:

	Nicht oscillirende Capacität			
Serie	Ia	Ib	Ic	Id
b beobachtet	0,0006505	0,0008815	0,0010967	0,0012588
b berechnet	0,0006307	0,0008909	0,0010913	0,0012596
b beob. $-$ b ber.	+ 198	− 94	+ 54	− 8
Diff. in Proc.	+ 3,1	− 1,1	+ 0,5	− 0,1
Quadratsumme	51020			

	Oscillirende Capacität			
Serie	Ia	Ib	Ic	Id
b beobachtet	0,0006500	0,0008774	0,0010956	0,0012595
b berechnet	0,0006307	0,0008909	0,0010913	0,0012596
b beob. $-$ b ber.	+ 193	− 135	+ 43	− 1
Diff. in Proc.	+ 3,1	− 1,5	+ 0,4	0,0
Quadratsumme	57324			

Die Summe der Quadrate der Differenzen „b beob. — b ber.", ist somit etwas grösser für die mit oscillirender Capacität berechneten b-Werte, als für die ohne Oscillation der Capacität gefundenen Werte. Die letzteren scheinen also auch hier etwas genauer als die ersteren zu sein. In den Columnen Ia, Ib, Ic, und Id sind für nicht oscillierende Capacität die wahrscheinlichen Fehler der beobachteten Werte von b bez. 0,7, 2,4, 1 und 0,4 Proc., und es geht somit hervor, dass die Differenzen „b beob. — ber." im allgemeinen innerhalb der Fehlergrenzen liegen. Nur die erste Differenz macht eine kleine Ausnahme, welche, jedenfalls sehr erklärlich ist, wenn man bedenkt, dass die entsprechende Grösse „b beob." aus nur drei Decrementsbestimmungen hervorgegangen ist, und der wahrscheinliche Fehler somit ganz zufällig relativ klein ausgefallen sein kann, obgleich die Grösse selbst in der Wirklichkeit nicht unbedeutend fehlerhaft sein mag. In der zur Columne Ia gehörenden linearen Relation $\gamma = a + b\,W$ scheint a zu klein und b zu gross erhalten worden zu sein. Jedenfalls geht das wichtige Resultat hervor: *In Bezug auf den*

Coefficienten b der Gleichung (22) stimmen Theorie und Erfahrung miteinander überein.

Anwendungen.

16. Nach dem Verhalten der normalen Ladung bei der in den Art. 4 bis 10 behandelten Schwingungscurve könnte man vermuten, dass die Capacität des Condensators sich während der Schwingungen schneller dem definitiven Werte nähert als bei „directer“ Ladung, ohne merkbare Induction im Stromkreise. Man hat nämlich nach neunzehn Halboscillationen nach der Tabelle I die normale Ladung 231,47, somit die Differenz 231,98—231,47 = 0,51 oder 0,22 Proc., während aus einer Ladungscurve ohne Induction die Differenz von etwa 0,5 Proc. wahrzunehmen ist. Um hierüber zu entscheiden, ist die folgende Tabelle zusammengestellt, welche sämtliche (p. 91) angeführten Curven umfasst. Die Tabelle giebt den Unterschied des Wertes der normalen Ladung „Q verb.“ am Ende der zehnten vollen Oscillation, welcher Wert von den eventuell vorhandenen Oscillationen der Capacität höchst unbedeutend beeinflusst sein dürfte, gegen die definitive Ladung in Procenten der letzteren an. Ferner enthält die Tabelle den Wert, den der Unterschied zwischen dem definitiven und dem augenblicklichen Werte der Capacität am Ende der für zehn volle Oscillationen verwendeten Zeit bei directer Ladung haben würde, für dieselbe Combination von Capacität und Anzahl Accumulatoren im Stromkreise, und zwar in Procenten der definitiven Capacität. Die letzteren Werte sind den p. 85, Art. 9 erwähnten Ladungscurven ohne Inductionsspule entnommen.

Der Unterschied zwischen den beiden Mitteln: 0,51 für oscillirende Ladung, und 0,48 für nicht oscillirende Ladung ist so gering, dass mit Beachtung auch der Unsicherheit dieser Art von Untersuchungen überhaupt der Schluss berechtigt ist: *Nach relativ kurzer Zeit, vom Anfang der Ladung an gerechnet, erreicht die Capacität eines guten Glimmercondensators denselben Wert, es mag die Ladung eine oscillirende oder nicht oscillirende sein.* Natürlich müssen die Schwingungen gedämpft sein, sodass die Amplituden nach der in Frage stehenden Zeit schon ziemlich klein geworden sind.

Nr. der Curven		Capacitäts-differenz bei Schwingungen	Capacitäts-differenz bei directer Ladung	Differenz
Serie Ia	Curve Nr. 1	0,58	0,49	+ 0,09
	„ „ 2	0,64	0,49	+ 0,15
	„ „ 3	0,34	0,49	− 0,15
Serie Ib	„ „ 1	0,10	0,47	− 0,37
	„ „ 2	0,61	0,47	+ 0,14
	„ „ 3	0,33	0,47	− 0,14
	„ „ 4	0,45	0,47	− 0,02
	„ „ 5	0,41	0,47	− 0,06
Serie Ic	„ „ 1	1,06	0,45	+ 0,61
	„ „ 2	0,43	0,45	− 0,02
	„ „ 3	0,34	0,45	− 0,11
Serie Id	„ „ 1	0,66	0,42	+ 0,24
	„ „ 2	0,58	0,42	+ 0,16
	„ „ 3	0,35	0,42	− 0,07
	„ „ 4	0,63	0,42	+ 0,21
	„ „ 5	0,32	0,42	− 0,10
	„ „ 6	0,29	0,42	− 0,13
	„ „ 7	0,35	0,42	− 0,07
Curve (*A*)		0,64	0,57	+ 0,07
„ (*B*)		0,63	0,38	+ 0,25
„ (*C*)		0,98	0,74	+ 0,24
„ (*D*)		0,32	0,59	− 0,27
„ (*E*)		0,68	0,54	+ 0,14
„ (*F*)		0,42	0,53	− 0,11
	Mittel:	0,51	0,48	+ 0,03

17. *Weil die experimentell gefundenen Werte der Coefficienten b mit den theoretischen Werten stimmen, kann man sie für die Bestimmung von Selbstinductionscoefficienten und Capacitäten verwenden.* In dem gegebenen Stromkreise mit unveränderter Capacität und Selbstinduction, aber wenigstens zwei verschiedenen Widerständen werden elektrische Oscillationen hervorgerufen, die Oscillationszeit T und der Coefficient b bestimmt. Alsdann kann man C und L berechnen. Die Bestimmung dieser beiden Grössen wird folglich auf Zeit- und Widerstandsmessungen allein zurückgeführt. Für die Berechnung von C und L hat man die aus den Formeln

$$T = 2\pi\sqrt{LC}$$

und

$$b = M\,\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

folgenden Ausdrücke

$$C = \frac{1}{M\pi^2}\,T\,b = 0{,}23330\,T\,b\,, \tag{27}$$

$$L = \frac{M}{4}\,\frac{T}{b} = 0{,}10857\,\frac{T}{b}\,, \tag{28}$$

wobei für T die auf definitive Capacität corrigirten Werte zu gebrauchen sind. Diese Correction ist sonst sehr klein; für die unten gegebenen Schwingungszeiten

$$\Delta T = T\tfrac{1}{2}\,\frac{\Delta C}{C} = \text{etwa } 0{,}0022\,T.$$

Für die Serien Ib, Ic und Id hat man folgende Zusammenstellung:

Serie:	Ib	Ic	Id
Oscillationszeit T in Millisecunden:	4,840	5,920	6,867
Coefficient „b beob.“ in 10^{-9} sec/cm:	0,0008815	0,0010967	0,0012588

und berechnet mittels der Formeln (27) und (28)

Capacität in Mikrofarad:	0,995	1,515	2,017
Selbstinductionscoefficient in Henry:	0,5961	0,5861	0,5923

welche Werte alle annehmbar sind. Das Mittel der Werte von L ist 0,5915, somit sehr gut.

(Eingegangen 27. October 1900.)

5. *Ueber den Schmelzpunkt des Goldes;* *von L. Holborn und A. Day.*

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

Im Anschluss an die Messung hoher Temperaturen mit dem Luftthermometer haben wir die Schmelzpunkte verschiedener Metalle zwischen 300 und 1100° bestimmt.[1]) Wir benutzten zwei Verfahren, die wir als die Tiegelmethode und die Drahtmethode bezeichneten. Der Schmelzpunkt des Goldes wurde damals nur nach dem letzteren Verfahren gemessen, indem wir einen etwa 1 cm langen Golddraht in die Lötstelle des Thermoelementes einschmolzen. Bei der Wichtigkeit, welche gerade dem Schmelzpunkt des Goldes für die Vergleichung der Temperaturscalen verschiedener Beobachter zukommt, erschien es uns angemessen, diesen Schmelzpunkt auch nach der Tiegelmethode zu bestimmen und gleichzeitig zu prüfen, ob die umgebende Atmosphäre die Schmelztemperatur beeinflusst.

Für den Versuch kamen stets etwa 450 g Gold zur Verwendung, das als reines Metall von der Frankfurter Gold- und Silberscheideanstalt bezogen war. Eine Probe von 2 g, nochmals im chemischen Laboratorium der Reichsanstalt analysirt, enthielt keine Verunreinigung.

Das Gold wurde in dem früher beschriebenen elektrischen Schmelzofen erhitzt und die Temperatur mit demselben Thermoelement gemessen, das vorher bei der Drahtmethode benutzt worden war.

Vorversuche, die anfangs mit einer kleineren Goldmenge (350 g) und einem dünnwandigen Schmelztiegel aus Porzellan angestellt wurden, ergaben infolge der geringen Schmelzwärme des Metalles keinen guten Verlauf der Zeitcurven und namentlich Abweichungen zwischen Erstarrungspunkt und Schmelzpunkt bis zu 4°. Erst als wir 450 g Gold nahmen und den dünnwandigen Porzellantiegel in einen mit Asbest ausgefütterten weiteren Tiegel einsetzten, um das Gold der directen Ein-

---

1) L. Holborn u. A. Day, Ann. d. Phys. 2. p. 523. 1900.

wirkung der Heizspule mehr zu entziehen, erhielten wir bessere Resultate. Bei dem Gebrauch von Graphittiegeln, deren Wandung 5 mm dick war, waren die Schwierigkeiten überhaupt geringer, sodass wir später solche ausgebrannte Tiegel, deren Wandung nur noch Thon enthielt, da benutzten, wo es uns auf die reducirende Wirkung des Graphits nicht ankam.

Das schmelzende Gold befand sich entweder in der reducirenden Atmosphäre eines Graphittiegels, wobei in einigen Fällen noch Kohlensäure durch ein dünnes Porzellanröhrchen (1 mm weit und 0,5 mm Wandstärke) in das Metall eingeleitet wurde, oder es kam ein doppelter Porzellantiegel oder ein Thontiegel (ausgebrannter Graphittiegel) zur Anwendung, in denen das Metall einmal unter Luftzutritt, das andere Mal unter Einleiten von Sauerstoff zum Erstarren oder Schmelzen gebracht wurde.

Tab. I enthält die Temperatur t (in Mikrovolt und Grad), die für den Erstarrungspunkt E und den Schmelzpunkt S beobachtet wurde. i bedeutet die Stromstärke der Heizspule.

Tabelle I.

Tag	i (Amp.)		t MV	t Grad	Mittel
			Im Graphittiegel.		
21. Juni	8,0	E	10194	1063,3°	1063,5°
	9,2	S	10197	1063,6	
	7,5	E	10194	1063,3	
	8,8	S	10197	1063,6	
9. Juli	6,8	E	10197	1063,6	
	8,3	S	10196	1063,5	
	6,8	E	10197	1063,6	
	8,2	S	10195	1063,4	
			Im Graphittiegel unter Einleiten von CO_2.		
11. Juli	7,2	E	10198	1063,6°	1063,5°
	8,5	S	10198	1063,6	
	7,0	E	10196	1063,5	
	8,2	S	10199	1063,7	
	6,8	E	10194	1063,3	
	7,9	S	10196	1063,5	

Tabelle I (Fortsetzung).

Tag	i (Amp.)		t MV	t Grad	Mittel
			Im doppelten Porzellantiegel.		
27. Juni	8,0	*E*	10190	1063,0°	1063,3°
	9,0	*S*	10198	1063,6	
	7,5	*E*	10188	1062,8	
	9,5	*S*	10197	1063,6	
			Im doppelten Porzellantiegel (oder Thontiegel) unter Einleiten von O.		
29. Juni	7,3	*E*	10200	1063,8°	1063,5°
	8,7	*S*	10199	1063,7	
	7,0	*E*	10192	1063,1	
	8,5	*S*	10199	1063,7	
12. Juli	6,7	*E*	10189	1062,9	
	7,8	*S*	10195	1063,4	
	6,5	*E*	10193	1063,2	
13. Juli	6,2	*E*	10198	1063,6	
	7,5	*S*	10203	1064,1	

Die verschiedenen Werte von t zeigen keine systematischen Unterschiede, als Gesamtmittel ergiebt sich 1063,5°.

Der Verlauf der Zeitcurven, von denen einige Beispiele in Tab. II enthalten sind, stimmt in den verschiedenen Fällen nicht so gut überein. Namentlich fallen diejenigen auf, die bei dem Einleiten von Sauerstoff erhalten werden. Einerseits stellt sich der stationäre Zustand hier nicht so scharf her wie sonst, andererseits pflegt die Temperatur bei dem Schmelzen des Metalles vielfach über den Schmelzpunkt glatt hinüber zu steigen und später erst wieder darauf zurückzukommen. Dass die Ursache hierfür nicht in dem Rühren liegt, welches das Einleiten der Gasblasen bewirkt, zeigen die Fälle, wo Kohlensäure in das Gold eingeleitet wurde. Ueberhaupt verlaufen die Zeitcurven bei dem Einleiten von Sauerstoff und selbst bei dem Zutritt der gewöhnlichen Atmosphäre vielfach unregelmässig.

Tabelle II.

Zeitcurven (MV).

Minuten	Gold im Graphittiegel		Gold im Graphittiegel unter Einleiten von CO_2		Gold unter Einleiten von O		Kupfer in Luft
	E	*S*	*E*	*S*	*E*	*S*	*E*
1	10331	10084	10402	10117	10366	10027	10590
2	10261	10150	10346	10166	10276	10074	10470
3	10209	10190	10298	10192	10223	10101	10352
4	10207	10194	10246	10195	10205	10144	10281
5	10203	10195	10200	10197	10201	10170	10217
6	10200	10195	10199	10194	10199	10198	10204
7	10199	10195	10199	10194	10199	10254	10212
8	10198	10195	10199	10194	10198	10238	10212
9	10197	10197	10198	10194	10196	10222	10212
10	10197	10199	10198	10196	10193	10205	10212
11	10197	10203	10198	10196	10194	10202	10212
12	10196	10212	10198	10197	10193	10201	10212
13	10196	10222	10198	10198	10194	10202	10212
14	10195	10231	10198	10199	10192	10203	10212
15	10194	10240	10197	10200	10191	10203	10212
16	10192	10248	10198	10201	10189	10203	10212
17	10188	10257	10197	10202	10186	10208	10211
18	10178	10272	10197	10205	10184	10216	10210
19	10070	10400	10197	10206	10184	10212	10208
20	9995	—	10196	10205	10183	10222	10204
21	—	—	10196	10209	10174	10230	10195
22	—	—	10195	10204	10159	11360	10176
23	—	—	10195	10202	10065	—	10027
24	—	—	10194	10214	—	—	—
25	—	—	10192	10296	—	—	—
26	—	—	10190	10400	—	—	—
27	—	—	10186	—	—	—	—
28	—	—	10177	—	—	—	—
29	—	—	10083	—	—	—	—

Hiernach lässt sich vermuten, dass das schmelzende Metall in diesen Fällen Sauerstoff aufnimmt. Der Einfluss dieser Erscheinung auf den Schmelzpunkt kann jedoch nur gering sein und übersteigt nicht die sonstigen Beobachtungsfehler.

Von demselben Gold, das für die Schmelzungen im Tiegel gedient hat, wurden einige Gramm zu einem Draht von 0,25 mm Durchmesser ausgezogen, den wir dann als Schmelzprobe für die Drahtmethode benutzten, deren Brauchbarkeit für das Gold natürlich besonders erwünscht ist. Es kam hierbei dasselbe Thermoelement zur Verwendung. Die beiden Drähte, die durch einen kurzen Golddraht verbunden waren, ragten möglichst spannungsfrei in den Schmelzofen, in dem sich ein leerer Porzellantiegel befand.

Fünf Versuche ergaben folgende Werte für die Schmelztemperatur:

26. September	10206 MV	1064,3°
	10197	1063,6
	10203	1064,1
	10199	1063,7
	10198	1063,6

Der Mittelwert 1063,9° weicht nur um 0,4° von dem Resultate der Tiegelmethode ab und um 0,1° von dem früheren Ergebnis der Drahtmethode, für die wir andere Goldproben benutzten.

Bei der Aichung von Thermoelementen kann man sich also ohne Bedenken der Drahtmethode für die Bestimmung des Goldschmelzpunktes bedienen. Man braucht in diesem Falle für einen Versuch nur etwa 0,03 g Gold.

Zieht man aber aus irgend einem Grunde die Tiegelmethode vor, so kann man auch dann für die Aichung den naheliegenden Schmelzpunkt des Kupfers unter Luftzutritt benutzen, der von uns zu 1064,9° bestimmt worden ist. Dieser Punkt ist, abgesehen von den geringeren Kosten, wegen der grösseren Schmelzwärme des Kupfers bequemer. Tab. II enthält zum Vergleich mit dem Gold eine Zeitcurve, die am 1. October mit 370 g Kupfer (im dünnwandigen Porzellantiegel) beobachtet wurde. Die Stärke i des Heizstromes betrug 5,2 Amp., war also geringer gewählt als in irgend einem Falle bei der Erstarrung des Goldes.

(Eingegangen 7. November 1900.)

6. *Ueber die Ausdehnung einiger Metalle in hoher Temperatur;*

von L. Holborn und A. Day.

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

Ueber die Ausdehnung von Körpern in hoher Temperatur liegen bis jetzt nur spärliche und teilweise wenig genaue Angaben vor. Wir haben deshalb eine neue Methode, nach der kürzlich von uns die Ausdehnung von Platiniridium und Porzellan bis 1000° für luftthermometrische Zwecke bestimmt wurde, noch auf verschiedene Metalle angewandt. Bis zu derselben Temperaturgrenze sind wir mit Platin, Palladium und Nickel gelangt, während Silber bis nahe an seinen Schmelzpunkt, Constantan bis 500° beobachtet wurde. Endlich ist noch je eine Sorte von Eisen und Stahl, die sowohl wegen ihrer Zustandsänderungen, wie wegen ihrer technischen Verwendung grosses Interesse bieten, bis 750° untersucht.

Weil in hohen Temperaturen eine gleichmässige Erwärmung auf grössere Längen schwer zu erzielen ist, hat man die Ausdehnungsbestimmungen vielfach mit kleinen Längen angestellt und infolge dessen nur eine geringe Genauigkeit erzielt oder man hat auf eine gleichmässige Temperatur des Probestabes ganz verzichtet, ihn z. B. quer durch einen Ofen gelegt und auf Marken an den stets kalt bleibenden Enden eingestellt. Im letzten Falle wurde dann nur die Mitteltemperatur des Stabes mit dem Luftthermometer oder mit dem elektrischen Widerstand gemessen. Dies Verfahren hat den Nachteil, dass die Abhängigkeit der Ausdehnung von der Temperatur nicht scharf zu beobachten ist.

Bei unserer Versuchsanordnung, die schon früher[1]) beschrieben worden ist, wird ein 0,5 m langer Stab möglichst gleichmässig in einem elektrisch geheizten Porzellanrohr erhitzt. Wir erzielen damit einmal Ausdehnungen von grossem Betrage (bis zu 9 mm), sodann ein verhältnismässig kleines Temperatur-

---

1) L. Holborn u. A. Day, Ann. d. Phys. 2. p. 506. 1900.

gefälle, von dem ausserdem nicht nur der Mittelwert, sondern auch der ganze Verlauf gemessen wird.

Längenmessung. — Die Ausdehnung wird mit dem Ocularmikrometer feststehender Mikroskope gemessen, die auf Teilstriche an den Enden des Stabes gerichtet sind. Die ganze Aufstellung war auf einem grossen Steinpfeiler so dauerhaft eingerichtet, dass wir nach Tagen noch keine Verschiebungen beobachten konnten, welche die Grenze der Beobachtungsfehler überschritten.

Den Unterschieden, welche die Messungen der verschiedenen Stäbe im kalten Zustande zwischen den einzelnen Heizungen aufweisen, entsprechen deshalb dauernde Längenänderungen der Stäbe. Vielfach ist dies auch dadurch bestätigt worden, dass die Länge eines Stabes vor und nach dem Heizen auf der Teilmaschine gemessen wurde.

Weil jedoch trotzdem eine zufällige kleine Aenderung der Aufstellung nicht überall ausgeschlossen ist, so wurde die Ausdehnung auf den kalten Zustand vor der Heizung bezogen, der immer an demselben Tage kurz vor Beginn der Erwärmung gemessen wurde, während die Bestimmung am Schluss der Reihe erst am folgenden Tage nach der vollständigen Abkühlung des Ofens erfolgen konnte. Wir teilen die meistens nur geringen Unterschiede zwischen den beiden Messungen mit.

Selbstverständlich ist hierbei von den Aenderungen abzusehen, die bei der ersten Heizung eines Stabes auftraten und die oft einen viel grösseren Betrag erreichen, d. h. wir gehen stets von dem ausgeglühten Zustande aus, der sich durch eine einmalige Erhitzung auf die höchste der später angewandten Temperaturen herstellte.

Erwähnt sei noch, dass der Schraubenwert der Mikroskope sich unmittelbar aus den Ablesungen bei Zimmertemperatur ergab, da die Intervalle der Teilstriche vorher auf der Teilmaschine gemessen waren. Die sonstigen Einzelheiten der Längenmessung gehen ohne weiteres aus dem unten angeführten Beispiel einer Beobachtungsreihe hervor.

Temperaturmessung. — Bei den Ausdehnungsbestimmungen wurde die Temperatur nur in der Mitte des Stabes gemessen, und zwar mit einem Thermoelement, dessen blanke Lötstelle auf dem Stabe auflag. Das Temperaturgefälle nach den Enden

zu haben wir gesondert bestimmt, indem noch auf jeder Seite an vier Punkten der Temperaturunterschied gegen die Mitte durch Verschieben der Lötstelle gemessen wurde.

Für die vorliegenden Beobachtungen sind zwei verschiedene Heizrohre benutzt worden. In dem ersten Rohr, zu dessen Wickelung ein 2 mm dicker Nickeldraht verwendet wurde, war die Verteilung der Temperatur ungleichmässiger als im zweiten, das mit einem 1,2 mm starken Draht in trifilarer Wickelung hergestellt war. Wir haben uns durch Wiederholung der ersten Wickelung überzeugt, dass die Gleichmässigkeit der Heizung mit dem dickeren Draht, der den Vorteil grösserer Haltbarkeit bietet, bei einem so langen und engen Rohr kaum zu verbessern ist. Trotz der grossen Sorgfalt, mit der die Windungen angeordnet wurden, ergaben sich häufig noch schlechtere Resultate. Auf dem zweiten Rohr folgen die Windungen nach den Enden zu etwas dichter aufeinander als in der Mitte. Vollständig lässt sich aber der Temperaturabfall an den zum Durchvisiren vorgesehenen Löchern nur schwer vermeiden, ohne dass man die benachbarten Stellen übercompensirt. Der Grund liegt darin, dass an den Löchern eine ganze Windung ausfallen muss.

Tab. 1 enthält Beispiele für die Temperaturverteilung in den beiden Heizrohren. Der zu messende Stab trug natürlich durch Leitung zum Temperaturausgleich etwas bei. Dies tritt bei der Vergleichung von Silber (6 mm dick) einerseits mit Platin (5 mm dick) und Palladium (5 mm dick) andererseits hervor. Nickel ist noch aufgeführt, weil hier zwischen den beiden Messungen bei 750° eine längere Pause liegt, in welcher der Ofen anderweitig benutzt wurde. Man sieht, dass das Gefälle auch durch die Abnutzung der Heizspule nicht erheblich verändert wird.

Die Zahlen der Tab. 1 geben die Temperaturunterschiede, die an acht Stellen des Rohres gegen die Mitte gemessen worden sind, in Mikrovolt. Die Abhängigkeit der Thermokraft des benutzten Elementes von der Temperatur ist früher in Tab. XVI (l. c. p. 522) mitgeteilt. Das Mittel Δ des Temperaturgefälles ist auf graphischem Wege gebildet und muss zu der in der Stabmitte abgelesenen Temperatur algebraisch addirt werden, wenn man die Mitteltemperatur des Stabes erhalten will.

Tabelle 1.

Temperaturgefälle im Heizrohr (MV).

Von der Mitte entfernt		Platin							
		I. Heizrohr				II. Heizrohr			
		250°	500°	750°	1000°	250°	500°	750°	1000°
6 cm	Ost	− 22	− 10	+ 17	0	+10	+ 35	+ 46	+ 77
12	„	− 33	− 23	+ 27	+ 25	+56	+125	+183	+227
19	„	−170	−230	−250	−443	+79	+157	+189	+171
23	„	−282	−310	−610	−900	−79	−196	−248	−411
6	West	+ 57	+170	+230	+335	− 5	+ 9	+ 49	+ 99
12	„	+ 73	+220	+315	+540	+38	+135	+238	+342
19	„	− 62	− 5	0	+ 53	+89	+227	+345	+398
23	„	−210	−250	−380	−480	−12	+ 42	− 9	−143
	Δ	− 44	− 11	+ 4	+ 51	+25	+ 64	+116	+135

Von der Mitte entfernt		II. Heizrohr							
		Palladium				Silber			
		250°	500°	750°	1000°	250°	500°	750°	875°
6 cm	Ost	+ 13	+ 29	+ 55	+ 80	+ 3	+ 21	+ 35	+ 19
12	„	+ 59	+128	+180	+236	+47	+107	+150	+142
19	„	+ 80	+155	+188	+164	+78	+140	+163	+125
23	„	−100	−165	−210	−402	−84	−174	−220	−344
6	West	− 1	+ 12	+ 53	+ 94	+ 1	+ 15	+ 52	+ 20
12	„	+ 52	+148	+269	+356	+23	+ 82	+153	+177
19	„	+ 95	+233	+358	+399	+48	+133	+217	+223
23	„	+ 12	+ 34	− 3	−129	+ 3	+ 48	− 29	+ 11
	Δ	+ 31	+ 77	+124	+135	+16	+ 49	+ 80	+ 62

Von der Mitte entfernt		Nickel im II. Heizrohr					
		250°	375°	500°	750°	750°	1000°
6 cm	Ost	+16	+ 22	+ 27	+ 59	+ 57	+ 82
12	„	+64	+ 91	+124	+196	+191	+258
19	„	+89	+117	+147	+194	+168	+196
23	„	−87	−111	−150	−205	−226	−337
6	West	+ 4	+ 15	+ 26	+ 64	+ 75	+120
12	„	+55	+110	+163	+303	+333	+458
19	„	+99	+177	+248	+405	+445	+509
23	„	+13	+ 20	+ 21	− 29	− 26	−221
	Δ	+38	+ 74	+109	+152		+185

Beobachtet wurde erstens bei Zimmertemperatur, die mit einem in das Heizrohr eingeführten Quecksilberthermometer gemessen wurde, und ferner in möglichster Nähe von 250, 500, 750 und 1000°. In einigen Fällen sind noch Zwischenpunkte bei 375, 625 und 875° eingeschoben. Unter 250° sind wir jedoch wegen der geringeren Empfindlichkeit des Thermoelementes nicht hinabgegangen. Für diese tieferen Temperaturen wird man auch zweckmässiger ein Bad vorsehen. Die Anordnung und Heizung brauchte dabei in leicht ersichtlicher Weise nicht wesentlich verändert zu werden. Mit einem Salpeterbade könnte man selbst bis über 600° eine vollständig gleichmässige Temperatur längs des ganzen Stabes erzielen.

1. Platin.

Der Platinstab ist ebenso wie die beiden folgenden Stäbe aus chemisch reinem Material von der Firma Heräus in entgegenkommenster Weise zur Verfügung gestellt worden. Der 5 mm dicke Stab wurde in beiden Heizrohren gemessen. Auf zwei Ebenen, die 5 mm von jedem Ende entfernt bis auf die Axe des Stabes angefeilt waren, befanden sich je fünf Teilstriche.

Tab. 1a enthält beispielsweise die Ablesungen der Mikroskope bei einer Beobachtungsreihe. Mit F und F' sind die Einstellungen auf die festen Fäden, mit I bis V und I′ bis V′ die Einstellungen auf die Striche an den beiden Stabenden bezeichnet. t bedeutet die Temperatur in Grad oder Mikrovolt.

Bei jeder Temperatur (20, 250, 500, 750, 1000 und 19° nach erfolgter Abkühlung) werden zwei Sätze von Ablesungen gemacht. Die Mikroskope werden hierbei jedesmal in symmetrischer Reihenfolge mit Hin- und Rückgang der Schraube eingestellt, sodass in dem Mittel auch eine kleine Bewegung des Stabes, die oft vorkam, möglichst herausfällt. Das Thermoelement wird inzwischen fünfmal abgelesen.

Aus diesen Beobachtungen sind die Verschiebungen der einzelnen Striche zwischen den Temperaturgrenzen t und t' berechnet, welche für jeden Satz und jeden Strich gesondert in Tab. 1b enthalten sind. Das positive Vorzeichen bedeutet eine Verschiebung des Striches nach dem betreffenden Stabende hin. In den Columnen M und M' haben wir die in

Beobachtungen des Platinstabes am 16. Juni.

t		20,3°		
I	6,238	6,327	6,329	6,329
II	6,950	6,971	6,956	6,962
III	7,846	7,851	7,837	7,848
F	8,527	8,530	8,523	8,529
IV	8,787	8,787	8,781	8,790
V	9,634	9,642	9,638	9,648
	↓	↑	↓	↑
I′	0,725	0,728	0,720	0,723
II′	1,683	1,682	1,680	1,684
III′	2,638	2,636	2,632	2,632
F′	3,000	2,993	2.991	2,999
IV′	3,586	3,583	3,581	3,588
V′	4,247	4,242	4,230	4,240
t				20,3°

t	1814 MV		1812	1880
I	5,743	5,743	5,746	5,740
II	6,369	6,374	6,374	6,370
III	7,259	7,261	7,250	7,257
IV	8,199	8,200	8,199	8,191
F	8,538	8,536	8,529	8,529
V	9,053	9,059	9,049	9,054
	↓	↑	↓	↑
I′	1,070	1,077	1,061	1,068
II′	2,029	2,037	2,029	2,028
III′	2,991	2,992	2,991	2,990
F′	2,991	2,992	2,991	2,990
IV′	3,941	3,942	3,943	3,939
V′	4,596	4,600	4,595	4,596
t	1814 MV		1825	

t	4131 MV		4184	4151
I	4,489	4,488	4,487	4,480
II	5,112	5,116	5,118	5,114
III	6,000	5,999	6,001	6,000
IV	6,941	6,939	6,937	6,938
V	7,798	7,801	7,798	7,801
F	8,531	8,533	8,537	8,532
	↓	↑	↓	↑
I′	0,865	0,869	0,862	0,859
II′	1,831	1,830	1,827	1,830
III′	2,783	2,788	2,779	2.788
F′	2,995	2,997	2,998	2,999
IV′	3,749	3,746	3,746	3,744
V′	4,403	4,401	4,398	4,402
t	4132 MV		4144	

t	6600 MV		6605	6625
I	3,211	3,184	3,187	3,162
II	3,840	3,821	3,811	3,791
III	4,728	4,710	4,699	4,687
IV	5,666	5,653	5,642	5,629
V	6,529	6,511	6,499	6,491
F	8,531	8,531	8,529	8,527
	↓	↑	↓	↑
I′	0,685	0,675	0,645	0,639
II′	1,647	1,637	1,613	1,607
III′	2,607	2,590	2,576	2,572
F′	2,991	2,999	2,991	3,000
IV′	3,567	3,562	3,539	3,538
V′	4,225	4.220	4,198	4,195
t	6596 MV		6616	

t	9412 MV		9423	9436
I	1,618	1,582	1,581	1,561
II	2,241	2,218	2,207	2,196
III	3,139	3,113	3,100	3,092
IV	4,070	4,049	4,043	4,036
V	4,931	4,914	4,917	4,901
F	8,530	8,537	8,535	8,532
	↓	↑	↓	↑
I′	0,298	0,287	0,275	0,256
II′	1,262	1,250	1,222	1,211
III′	2,219	2,219	2,191	2,181
F′	2,989	2,999	2,990	2,996
IV′	3,192	3,198	3,150	3,141
V′	3,855	3,852	3,819	3,816
t	9432 MV		9428	

t		19,3°		
I	6,762	6,767	6,768	6,770
II	7.393	7,391	7,389	7,392
III	8,263	8,280	8,275	8,281
F	8,531	8,540	8,538	8,537
IV	9,210	9,213	9,212	9,218
V	10,059	10,073	10,071	10,078
	↓	↑	↓	↑
I′	1,190	1,180	1,181	1,182
II′	2,133	2,147	2,148	2,149
F′	2,997	2,994	2,989	2,998
III′	3,107	3,103	3,107	3,105
IV′	4,048	4,048	4,051	4,044
V′	4,703	4,708	4,702	4,712
t				19,3°

Tabelle 1b.

Beobachtungen des Platinstabes am 16. Juni.

t	t'	I	II	III	IV	V	Mittel M		$\Sigma = M + M'$
							u	mm	mm
20,3°	1813 MV	0,591	0,595	0,592	0,593	0,588	0,592	0,669	1,044
20,3	1822	0,589	0,590	0,592	0,594	0,594	0,592	0,669	1,044
1813 MV	4132	1,251	1,255	1,255	1,257	1,253	1,254	1,417	1,200
1822	4143	1,265	1,264	1,259	1,263	1,258	1,262	1,425	1,206
4132	6600	1,290	1,282	1,280	1,279	1,279	1,282	1,449	1,258
4143	6615	1,302	1,306	1,301	1,295	1,298	1,300	1,469	1,247
6600	9422	1,601	1,604	1,596	1,623	1,600	1,605	1,812	1,417
6615	9429	1,610	1,605	1,603	1,602	1,592	1,602	1,810	1,413
19,3°	20,3°	−0,430	−0,424	−0,419	−0,418	−0,421	−0,422	−0,477	0,008
19,3	20,3	−0,428	−0,420	−0,423	−0,417	−0,420	−0,422	−0,477	0,014

t	t'	I′	II′	III′	IV′	V′	Mittel M'	
							u'	mm
20,3°	1813 MV	0,352	0,355	0,360	0,362	0,358	0,357	0,375
20,3	1822	0,347	0,351	0,363	0,360	0,365	0,357	0,375
1813 MV	4132	−0,221	−0,206	−0,210	−0,197	−0,200	−0,207	−0,217
1822	4143	−0,212	−0,208	−0,215	−0,204	−0,204	−0,209	−0,219
4132	6600	−0,176	−0,188	−0,186	−0,183	−0,178	−0,182	−0,191
4143	6615	−0,220	−0,220	−0,211	−0,207	−0,204	−0,212	−0,222
6600	9422	−0,386	−0,385	−0,379	−0,369	−0,368	−0,377	−0,395
6615	9429	−0,369	−0,386	−0,381	−0,386	−0,371	−0,379	−0,397
19,3°	20,3°	0,459	0,458	0,470	0,464	0,462	0,463	0,485
19,3	20,3	0,463	0,468	0,475	0,464	0,473	0,468	0,491

Schraubenumdrehungen (u und u') ausgedrückten Werte zu einem Mittel zusammengefasst und in Millimeter umgerechnet, deren Summen alsdann unter Σ aufgeführt sind.

Für die übrigen Beobachtungsreihen beschränken wir uns darauf, die Werte von M, M' und Σ mitzuteilen. Tab. 1c enthält diese Werte für die Beobachtungen an dem Platinstabe, der während der ersten beiden Tage im ersten Heizrohr, später im zweiten lag. Je zwei zusammengehörige Werte von Σ stimmen befriedigend überein.

Tabelle 1c.

Platinstab.

	t	M (mm)	M' (mm)	Σ (mm)	t	M (mm)	M' (mm)	Σ (mm)
24. Febr.	19,9°				19,9°			
		0,799	0,249	1,048		0,799	0,257	1,056
	1900 MV				1912 MV			
		0,680	0,541	1,221		0,653	0,564	1,217
	4255				4265			
		0,312	0,990	1,302		0,294	0,985	1,279
	6830				6838			
		1,143	0,239	1,382		1,213	0,198	1,411
	9649				9660			
27. Febr.	17,8°				17,8°			
		0,794	0,275	1,069		0,798	0,280	1,078
	1920 MV				1926 MV			
		0,548	0,664	1,212		0,554	0,645	1,199
	4250				4256			
		0,525	0,759	1,284		0,498	0,786	1,284
	6823				6823			
		1,022	0,345	1,367		1,055	0,334	1,389
	9639				9631			
16. Juni	20,3°				20,3°			
		0,669	0,375	1,044		0,669	0,357	1,026
	1813 MV				1822 MV			
		1,417	−0,217	1,200		1,425	−0,219	1,206
	4132				4143			
		1,449	−0,191	1,258		1,469	−0,222	1,247
	6600				6615			
		1.812	−0,395	1,417		1,810	−0,397	1,413
	9422				9429			
20. Juni	20,1°				20,1°			
		2,634	−0,375	2,259		2,638	−0,379	2,259
	4190 MV				4200 MV			
		1,381	−0,156	1,225		1,403	−0,186	1,217
	6564				6570			
		1,736	−0,328	1,408		1.751	−0,343	1,408
	9365				9384			

Die Werte Σ sind alsdann auf runde Temperaturgrenzen, 0 und 250° etc., umgerechnet, indem aus einer Näherungsformel für die Ausdehnung λ_s des Stabes die hierzu not-

wendigen Werte von $d\lambda_s/dt$ abgeleitet wurden. An den in der Mitte des Stabes abgelesenen Werten von t war hierbei noch die Correction Δ wegen des Gefälles anzubringen. Auf diese Weise ist Tab. 1d entstanden, in der nur die Mittel Σ' aus je zwei zusammengehörigen Werten von Σ angegeben sind.

Tabelle 1d.

Platinstab.

t	Σ' (mm)				λ_s (mm)	
	Im I. Heizrohr		Im II. Heizrohr			
	24. Febr.	27. Febr.	16. Juni	20. Juni	beob.	ber.
0°					0	0
	1,111	1,114	1,116			
250				2,289	1,114	1,112
	1,196	1,192	1,184			
500					2,301	2,304
	1,271	1,268	1,270	1,285		
750					3,574	3,576
	1,344	1,334	1,386	1,377		
1000					4,934	4,928

Zu dieser Tabelle ist noch hinzuzufügen, dass der Platinstab zuerst am 23. Februar ausgeglüht wurde. Hierbei beobachteten wir für 500° $\lambda_s = 2{,}306$ mm und für 1000° $\lambda_s = 4{,}986$ mm. Nach der Abkühlung ergab sich eine bleibende Ausdehnung des Stabes von 0,084 mm, während nach den vier in der Tabelle enthaltenen Beobachtungstagen bleibende Aenderungen von 0,020, 0,028, $-0{,}007$ und $-0{,}004$ mm beobachtet wurden.

Die Uebereinstimmung der verschiedenen Reihen ist bis 750° durchweg befriedigend. Nur in dem Intervall von 750 bis 1000° treten Abweichungen zwischen den beiden Heizrohren auf, die 1 Proc. der gesamten Ausdehnung erreichen.

Die Ausdehnung λ_s des Stabes (in μ) lässt sich durch die quadratische Formel

$$\lambda_s = 4{,}288\, t + 0{,}000\,640\, t^2 (\mu)$$

darstellen. Da die Länge, bezogen auf das Mittel der Striche an jedem Ende, 483,5 mm bei 0° betrug, so folgt für die Ausdehnung λ[1]) der Längeneinheit:

$$\lambda = \{8868\, t + 1{,}324\, t^2\}\, 10^{-9}.$$

1) Die früher (l. c. p. 509) mitgeteilte Formel bezog sich nur auf die Beobachtungen mit dem ersten Heizrohr.

Benoît[1]) hat für die Ausdehnung von reinem Platin aus Beobachtungen, die er zwischen 0 und 75° nach der **Fizeau'**schen Methode anstellte, die Formel

$$\lambda = \{8901\, t + 1{,}21\, t^2\}\, 10^{-9}$$

abgeleitet. Extrapolirt man diese Gleichung, so tritt erst bei 1000° ein Unterschied von 1 Proc. gegen unseren beobachteten Mittelwert auf.

2. Palladium.

Für den Palladiumstab (5 mm dick) sind in Tab. 2a und 2b die Beobachtungen mitgeteilt, die alle mit dem zweiten Heizrohr angestellt wurden. Anfangs war der Stab im ersten

Tabelle 2a.
Palladiumstab.

	t	M (mm)	M' (mm)	Σ (mm)	t	M (mm)	M' (mm)	Σ (mm)
26. Juni	19,6°				19,6°			
		1,349	0,036	1,385		1,362	0,018	1,380
	1810 MV				1819 MV			
		1,432	0,176	1,608		1,434	0,177	1,611
	4083				4098			
		1,197	0,526	1,723		1,198	0,515	1,713
	6571				6585			
		1,689	0,197	1,886		1,718	0,172	1,888
	9339				9343			
28. Juni	18,8°				18,8°			
		1,212	0,239	1,451		1,199	0,252	1,451
	1923 MV				1927 MV			
		1,305	0,224	1,529		1,347	0,198	1,545
	4072				4085			
		1,928	−0,205	1,723		1,934	−0,222	1,712
	6552				6555			
		2,313	−0,424	1,889		2,322	−0,428	1,894
	9345				9348			

Tabelle 2b.
Palladiumstab.

t	Σ' (mm)		λ_t (mm)	
	26. Juni	28. Juni	beob.	ber.
0°			0	0
	1,476	1,470		
250			1,473	1,475
	1,611	1,616		
500			3,087	3,082
	1,729	1,739		
750			4,821	4,821
	1,878	1,858		
1000			6,689	6,692

1) R. Benoît, Trav. et Mém. du Bureau international **6.** p. 1. 1888.

Heizrohr ausgeglüht. Hierbei sind zwischen 250, 500 und
für die Ausdehnung die Werte 1,617, 1,720 und 1,840 mm
obachtet. Nach der Abkühlung war eine Verlängerung
0,024 mm eingetreten, während die bleibenden Aenderu
nach den Beobachtungsreihen der Tabelle jedesmal u
0,01 mm blieben.

Für die Ausdehnung des Stabes ergiebt sich:

$$\lambda_s = 5{,}636\,t + 0{,}00106\,t^2 (\mu),$$

und da die Länge 482,9 mm bei 0° betrug, so folgt:

$$\lambda = \{11670\,t + 2{,}187\,t^2\}\,10^{-9}.$$

3. **Platiniridium** (80 Pt, 20 Ir).

Die Beobachtungen an dem Platiniridiumstabe, die in Tab. 3a und 3b enthalten sind, wurden alle mit dem er

Tabelle 3a.

Platiniridiumstab.

	t	M (mm)	M' (mm)	Σ (mm)
19. Jan.	16,9°			
		0,348	0,595	0,943
	1810 MV			
		0,850	0,318	1,168
	4193			
		0,636	0,592	1,228
	6757 ⎫			
		⎧ 0,969	0,322	1,291
	9514 ⎪			
		⎨ 1,045	0,276	1,321
	9569 ⎪			
		⎩ 1,043	0,273	1,316
	9560 ⎭			
24. Jan.	17,9°			
		0,675	0,291	0,966
	1862 MV			
		0,654	0,462	1,116
	4181			
		0,607	0,604	1,211
	6708			
		1,163	0,189	1,352
	9528			
26. Jan.	18,8°			
		0,557	0,406	0,963
	1843 MV			
		0,664	0,456	1,120
	4170			
		0,411	0,813	1,224
	6705 ⎫			
		⎧ 1,786	−0,450	1,336
	9527 ⎪			
		⎩ 1,797	−0,463	1,334
	9539 ⎭			

Tabelle 3b.

Platiniridiumstab.

t	Σ' (mm)			λ_s (mm)	
	19. Jan.	24. Jan.	26. Jan.	beob.	ber.
0°				0	0
	1,031	1,033	1,034		
250				1,033	1,033
	1,130	1,111	1,110		
500				2,150	2,151
	1,202	1,204	1,213		
750				3,357	3,355
	1,277	1,308	1,294		
1000	1,280		1,287	4,645	4,645
	1,280				

Heizrohr angestellt. Sie waren die ersten, bei denen noch nicht das oben beschriebene Schema überall innegehalten wurde. Nur bei 1000° ist mehr als ein Satz von Ablesungen gemacht. Der Stab, dessen Länge 483,1 mm bei 0° betrug, wurde nur im ausgeglühten Zustande beobachtet. Die berechneten Formeln lauten:

$$\lambda_s = 3,960\,t + 0,000\,685\,t^2\,(\mu),$$
$$\lambda = \{8198\,t + 1,418\,t^2\}\,10^{-9}.$$

4. **Silber.**

Der Silberstab war 6 mm dick und besass an jedem Ende sieben Teilstriche, die jedoch oft teilweise wegen der grossen Ausdehnung durch die Ofenwand verdeckt waren, sodass sie nicht alle bei jeder Temperatur abgelesen werden konnten. Der Stab wurde zuerst bei 900° ausgeglüht und dehnte sich dabei um 0,13 mm aus. Er war sehr weich geworden und konnte bei hoher Temperatur nur schwer gegen eine kleine Durchbiegung geschützt werden. Aus diesem Grunde wohl und weil die bleibenden Aenderungen auch später grösser als bei den vorhergehenden Stäben waren, weichen die Beobachtungen bei den höheren Temperaturen mehr voneinander ab. Die letzte Beobachtung bei 875° ist bei der Berechnung nicht berücksichtigt. Die Heizung des Silberstabes geschah ebenso, wie bei allen folgenden Metallen, im zweiten Rohr.

Tab. 4a und 4b geben die einzelnen Messungen. Der Stab hat sich nach dem ersten Tage um 0,027, nach dem zweiten um 0,039 mm dauernd gedehnt. Die Länge betrug zum Schluss 484,1 mm. Die Formeln lauten:

$$\lambda_s = 8{,}844\,t + 0{,}00232\,t^2\,(\mu),$$
$$\lambda = \{18270\,t + 4{,}793\,t^2\}\,10^{-9}.$$

Tabelle 4a.

Silberstab.

	t	M (mm)	M' (mm)	Σ (mm)	t	M (mm)	M' (mm)	Σ (mm)
22. Juni	20,2°				20,2°			
		1,216	0,945	2,161		1,252	0,929	2,181
	1787 MV				1797 MV			
		2,254	0,386	2,640		2,237	0,407	2,644
	4088				4103			
		2,802	0,096	2,898		2,815	0,073	2,888
	6548				6548			
23. Juni	20,2°				20,2°			
		0,149	2,325	2,176		0,111	2,304	2,193
	1792 MV				1804 MV			
		1,905	0,771	2,676		1,873	0,785	2,658
	4116				4132			
		1,340	1,487	2,827		1,394	1,456	2,850
	6516				6581			
		1,049	0,603	1,652		1,014	0,637	1,651
	7937				7949			

Tabelle 4b.

Silberstab.

t	Σ' (mm)		λ_s (mm)	
	22. Juni	23. Juni	beob.	ber.
0°			0	0
	2,352	2,360		
250			2,356	2,356
	2,640	2,640		
500			4,996	5,002
	2,970	2,921		
750			7,941	7,938
	—	1,649		
875			9,590	9,515

5. Nickel.

Der Nickelstab (6 mm dick) besass bei den ersten Beobachtungsreihen, die nur bis 750° ausgedehnt wurden, an jedem Ende fünf Striche, die auf einer angefeilten und gut polirten Ebene gezogen waren. Trotzdem das Metall bei dem Erwärmen etwas anlief, waren die Marken immer gut sichtbar,

bis die Heizung am Schluss der dritten Beobachtungsreihe auf 1000° getrieben wurde. Bei dieser Temperatur verschwanden nicht allein die Striche, sondern auch der ganze oxydirte Stab war kaum von der Rohrwandung zu unterscheiden.

Es wurde darauf an jedem Ende ein Platinplättchen (5 × 5 mm) von 0,5 mm Dicke in eine ausgefeilte, schwalbenschwanzförmige Nute eingeschoben. Auf der freien Platinoberfläche, die wieder in die Axe des Stabes zu liegen kam, wurden neue Striche gezogen, die bei den letzten beiden Beobachtungsreihen als Marken dienten. Nimmt man an, dass 1 Proc. der Ausdehnung bei dieser Anordnung von dem Platin herrührt, so macht dies bei 750° erst einen Unterschied von 0,01 (5,78 — 3,57) = 0,02 mm.

Tabelle 5a.

Nickelstab.

	t	M (mm)	M' (mm)	Σ (mm)	t	M (mm)	M' (mm)	Σ (mm)
30. Juni	19,1°				19,0°			
		1,354	0,227	1,581		1,377	0,218	1,595
	1811 MV				1815 MV			
		1,548	0,407	1,955		1,542	0,415	1,957
	4072				4081			
		1,257	0,882	2,139		1,261	0,865	2,126
	6551				6561			
2. Juli	19,8°				19,8°			
		1,102	0,469	1,571		1,142	0,463	1,605
	1803 MV				1815 MV			
		0,953	0,038	0,991		0,941	0,029	0,970
	2914				2927			
		0,651	0,330	0,981		0,639	0,343	0,982
	4066				4075			
		1,286	0,863	2,149		1,306	0,848	2,154
	6551				6563			
4. Juli	20,2°				20,2°			
		0,937	0,673	1,609		0,953	0,648	1,601
	1793 MV				1799 MV			
		1,766	0,202	1,968		1,753	0,218	1,971
	4078				4083			
		1,314	0,822	2,136		1,325	0,814	2,139
	6552				6560			
18. Sept.	17,7°				17,8°			
		5,674	−0,005	5,669		5,671	−0,013	5,658
	6541 MV				6537 MV			
		2,591	−0,205	2,386		2,612	−0,222	2,390
	9356				9358			
19. Sept.	18,4°				18,4°			
		5,942	−0,271	5,671		5,939	−0,275	5,664
	6578 MV				6578 MV			
		2,495	−0,158	2,337		2,505	−0,179	2,326
	9332				9330			

Tabelle 5b.

Nickelstab.

t	Σ' (mm)					λ_s (mm)	
	30. Juni	2. Juli	4. Juli	18. Sept.	19. Sept.	beob.	ber.
0°						0	0
	1,670	1,678	1,708				
250						1,685	(1,724)
		0,975					
375	1,957		1,953	5,770	5,748	2,660	2,661
		0,990					
500						3,643	3,648
	2,155	2,168	2,164				
750						5,782	5,772
	—	—	—	2,313	2,313		
1000						8,095	8,096

Die Länge des Stabes betrug bei der ersten Anordnung 482,6 mm bei 0°. Nach Anbringung der Platinplatten war der Abstand der neuen Striche um 0,2 mm grösser. Die letzten Beobachtungen sind deshalb etwas corrigirt. Der Stab hat sich infolge der Heizung immer verkürzt, und zwar um 0,024 und 0,018 mm nach den ersten beiden Reihen, um 0,016 und 0,035 mm nach den letzten.

Die Beobachtungen (Tab. 5a und 5b) lassen sich nur von 375° an durch eine quadratische Formel darstellen. Der Wert bei 250° fällt heraus, wie man sogleich erkennt, wenn man λ/t berechnet. Es ist dies erklärlich, weil das Nickel in der Nähe von 300° eine Zustandsänderung erleidet, mit der die Magnetisirbarkeit aufhört. Unterhalb dieser Temperatur gelten demnach die Formeln

$$\lambda_s = 6{,}496\, t + 0{,}00160\, t^2 (\mu),$$
$$\lambda = \{13460\, t + 3{,}315\, t^2\}\, 10^{-9}$$

nicht mehr. Das lineare Glied wird hier kleiner, während das quadratische zunimmt.

6. Constantan (60 Cu, 40 Ni).

Constantan, dessen elektrische Leitfähigkeit und Thermoelektricität sich eigentümlich verhalten, unterscheidet sich in Bezug auf seine Ausdehnung, die ungefähr das Mittel aus den Ausdehnungen der beiden Bestandteile darstellt, nicht wesentlich von anderen Legirungen. Die Sichtbarkeit der Striche,

die direct auf dem 6 mm dicken Stabe gezogen waren, nahm infolge allmählicher Oxydation ab, obwohl die Beobachtungen nur bis 500° ausgedehnt wurden. Die bleibenden Aenderungen des Stabes überschritten nicht 0,01 mm, die Länge bei 0° betrug 483,0 mm.

Tabelle 6a.

Constantanstab.

	t	M (mm)	M' (mm)	Σ (mm)	t	M (mm)	M' (mm)	Σ (mm)
24. Sept.	**17,9°**				**17,9°**			
		1,854	– 0,023	1,831		1,877	–0,057	1,820
	1818 MV				**1821 MV**			
		2,215	– 0,125	2,090		2,187	– 0,100	2,087
	4036				**4036**			
25. Sept.	**17,9°**				**17,9°**			
		1,723	0,090	1,818		1,750	0,052	1,802
	1815 MV				**1820 MV**			
		1,374	– 0,348	1,026		1,366	– 0,335	1,031
	2917				**2927**			
		0,972	0,056	1,028		0,956	0,063	1,019
	4007				**4011**			

Tabelle 6b.

Constantanstab.

t	Σ' (mm)		λ_t (mm)	
	24. Sept.	25. Sept.	beob.	ber.
0°			0	0
	1,916	1,903		
250			1,910	1,910
	} 2,159 (250–500)	1,040		
375			2,950	2,956
		1,106		
500			4,063	4,063

Die Ergebnisse (Tab. 6a und 6b) werden durch die folgenden Gleichungen dargestellt:

$$\lambda_t = 7,156\,t + 0,00194\,t^2 (\mu),$$

$$\lambda = \{14810\,t + 4,024\,t^2\}\,10^{-9}.$$

7. Schmiedeeisen.

Der Stab aus Schmiedeeisen, wie der aus Stahl, wurde sogleich anfangs mit Platinplättchen in derselben Weise versehen, wie es bei Nickel angegeben ist. Infolge der Er-

wärmung trat an dem einen Ende des Eisenstabes eine Vergrösserung eines Intervalls der Teilung um 0,03 mm auf, und zwar zum grössten Teil schon während der ersten Heizung. Die übrigen Marken haben sich nicht merklich verschoben. Die Heizung wurde nur bis 750° ausgedehnt, um dauernde Zustandsänderungen zu vermeiden, wie sie namentlich bei Stahl durch längeres Erhitzen auf höhere Temperaturen einzutreten pflegen.

Bekanntlich erfahren die magnetischen Metalle auch eine Längenänderung durch Magnetisirung. Bei Eisen und Stahl würde, entsprechend der schwachen Feldstärke der Heizspule (bei 250° war $H = 30$, bei 500° $H = 42$ für die Mitte des Stabes), eine Verlängerung zu erwarten sein, die höchstens 5×10^{-6} der Länge beträgt[1]) und deshalb hier vernachlässigt werden kann.

Tabelle 7a.

Eisenstab.

	t	M (mm)	M' (mm)	Σ (mm)	t	M (mm)	M' (mm)	Σ (mm)
19. Juli	22,0°				22,0°			
		1,267	0,227	1,494		1,277	0,211	1,488
	1841 MV				1847 MV			
		1,872	−0,030	1,842		1,857	−0,024	1,833
	4069				4068			
		1,823	0,170	1,993		1,854	0,129	1,983
	6564				6551			
21. Juli	22,7°				22,7°			
		1,259	0,207	1,466		1,294	0,166	1,460
	1816 MV				1823 MV			
		1,266	−0,364	0,902		1,247	−0,349	0,898
	2927				2930			
		0,987	−0,038	0,959		0,966	−0,014	0,952
	4077				4077			
		1,951	0,039	1,990		2,004	−0,027	1,977
	6572				6567			
25. Juli	22,6°				22,6°			
		1,334	0,129	1,463		1,376	0,093	1,469
	1803 MV				1807 MV			
		2,348	−0,473	1,875		2,305	−0,453	1,852
	4066				4065			
		0,963	0,016	0,979		0,956	0,036	0,992
	5248				5244			
		1,188	−0,188	1,000		1,213	−0,211	1,002
	6568				6569			

1) J. A. Ewing, Magnetische Induction p. 228.

Tabelle 7b.

Eisenstab.

t	Σ' (mm)			λ_s (mm)	
	19. Juli	21. Juli	25. Juli	beob.	ber.
0°				0	0
250	1,570	1,565	1,577	1,571	1,571
375	1,890	0,905	1,889	2,476	2,475
500		0,979		3,459	3,459
625	1,967	1,960	0,990	4,449	(4,522)
750			0,964	5,419	(5,664)

Der Eisenstab (6 mm dick) hatte bei 0° eine Länge von 482,7 mm und erfuhr nach den drei Heizungen eine dauernde Aenderung von + 0,01, − 0,025 und − 0,025 mm. Tab. 7a und 7b enthalten die Beobachtungen, die sich bis 500° in befriedigender Weise durch eine Parabel darstellen lassen. Die Gleichungen lauten:

$$\lambda_s = 5{,}650\,t + 0{,}00254\,t^2\,(\mu),$$

$$\lambda = \{11705\,t + 5{,}254\,t^2\}\,10^{-9}.$$

Oberhalb 500° wächst die Ausdehnung in geringerem Grade.

8. **Stahl.**

Um gegen Schmiedeeisen einen möglichst grossen Unterschied zu erhalten, wurde ein kohlenstoffreicher Stahl gewählt. Der 6 mm dicke Stab hatte anfangs eine Länge von 482,8 mm bei 0° und verkürzte sich bei der ersten Heizung um 0,10 mm, während die Aenderungen später 0,01 mm nicht überschreiten.

Die Beobachtungen sind in Tab. 8a und 8b aufgeführt. Legt man durch die Punkte 0, 250 und 500° die Curve

$$\lambda_s = 4{,}428\,t + 0{,}00402\,t^2\,(\mu),$$

$$\lambda = \{9173\,t + 8{,}336\,t^2\}\,10^{-9},$$

so stimmt diese schon mit dem Wert bei 375° nicht gut überein. Die Ausdehnung des Stahles scheint also schon unter 500° unregelmässig zu werden.

Tabelle 8a.

Stahlstab.

	t	M (mm)	M' (mm)	Σ (mm)	t	M (mm)	M' (mm)	Σ (mm)
6. Juli	19,7°				19,7°			
		0,850	0,436	1,286		0,854	0,441	1,295
	1801 MV				1809 MV			
		1,453	0,400	1,853		1,463	0,397	1,860
	4080				4088			
		1,431	0,140	1,571		1,435	0,145	1,580
	6535				6540			
16. Juli	20,5°				20,5°			
		0,981	0,319	1,300		1,007	0,298	1,305
	1824 MV				1828 MV			
		0,923	−0,047	0,876		0,914	−0,041	0,873
	2909				2913			
		0,628	0,394	1,022		0,609	0,399	1,008
	4150				4141			
17. Juli	22,2°				22,2°			
		1,080	0,204	1,284		1,108	0,173	1,281
	1813 MV				1817 MV			
		1,613	0,229	1,842		1,595	0,236	1,831
	4062				4060			
		0,555	0,445	1,000		0,550	0,443	0,993
	5274				5269			
		0,611	0,090	0,701		0,640	0,076	0,716
	6556							

Tabelle 8b.

Stahlstab.

t	Σ' (mm) 6. Juli	Σ' (mm) 16. Juli	Σ' (mm) 17. Juli	λ_t (mm) beob.	λ_t (mm) ber.
0°				0	0
	1,361	1,360	1,357		
250				1,359	(1,359)
		0,896			
375	} 1,866 (250–500)		} 1,871 (250–500)	2,255	(2,227)
		0,953			
500				3,221	(3,221)
			0,979		
625	} 1,582 (500–750)	—		4,200	(4,341)
			0,704		
750				4,904	(5,586)

(Eingegangen 7. November 1900.)

7. *Ueber die Unregelmässigkeiten Weston'scher Cadmiumelemente mit 14,3 proc. Amalgam in der Nähe von 0°;*
von W. Jaeger.

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

Eine kürzlich erschienene Arbeit von Hrn. H. T. Barnes[1]) über Untersuchungen, die er an Cadmiumelementen (mit 14,3 proc. Amalgam) angestellt hat, giebt mir im Zusammenhang mit anderen Angriffen, welche diese Elemente erfahren haben[2]), Veranlassung, meine bisher nicht veröffentlichten Versuchsreihen über das unregelmässige Verhalten von Cadmiumelementen (mit 14,3 proc. Amalgam) in der Nähe von 0° aus dem Jahre 1896[3]) hier mitzuteilen und bei dieser Gelegenheit einige nicht zutreffende Bemerkungen und Anschauungen über die Elemente und die Veröffentlichungen der Reichsanstalt richtig zu stellen.

Auf die betreffenden Unregelmässigkeiten der Cadiumelemente ist zuerst von Wachsmuth und von mir hingewiesen worden[4]); nach Aufstellung der Temperaturformel für das Cadmiumelement wurde (l. c. p. 583) geschrieben: „diese Formel gilt nach ihrer Ableitung zwischen 0° und 26°, doch haben spätere Beobachtungen gezeigt, dass einige Elemente sich zwischen 0° und etwa 5° in der Weise unregelmässig verhalten, dass ihre elektromotorische Kraft bedeutend (etwa $^1/_{1000}$ Volt) grösser ist, als diejenige der anderen Elemente. Den Grund für diese auffällige Erscheinung zu finden, muss einer späteren

---

1) H. T. Barnes, Journ. of phys. Chem. 4. p. 339. 1900.

2) E. Cohen, Zeitschr. f. phys. Chem. 34. p. 621. 1900. Vgl. auch die vorläufige Erwiderung darauf: W. Jaeger u. St. Lindeck, l. c. 35. p. 98. 1900 und Ann. d. Phys. 3. p. 366. 1900.

3) Vgl. Thätigkeitsbericht der Reichsanstalt, Zeitschr. f. Instrumentenk. 17. p. 143. 1897.

4) W. Jaeger u. R. Wachsmuth, Wied. Ann. 59. p. 575. 1896.

Untersuchung vorbehalten bleiben. Beim Erwärmen auf Zimmertemperatur zeigen aber auch diese Elemente wieder die normale elektromotorische Kraft. Der Bereich der obigen Formel ist daher vorläufig auf die Temperaturen zwischen 25^0 bis oberhalb 5^0 zu beschränken".

Nach den heute vorliegenden Erfahrungen erreichen die Abweichungen bei 0^0 zum Teil den Betrag von über 2 Millivolt, doch stimmen alle Elemente bereits bei + 10^0 bis auf wenige zehntel Millivolt mit der von uns aufgestellten Formel überein. Die obige Aeusserung ist also auch heute noch zutreffend. Für den praktischen Gebrauch der Elemente in Wissenschaft, wie Technik, sind zur Zeit Abweichungen von wenigen Zehntausendsteln meistens völlig belanglos; ausserdem ist man ja nicht gezwungen, bei 10^0 zu beobachten.

Hr. E. Cohen vermutete als Grund dieser Unregelmässigkeiten eine Umwandlung des Cadiumsulfates, wie sie in analoger Weise beim Zinksulfat vorhanden ist[1]) und fand in der That durch Löslichkeitsbestimmung des Cadmiumsulfats ($CdSO_4$, $^8/_3 H_2O$) in Gemeinschaft mit Hrn. Ph. Kohnstamm[2]) einen Umwandlungspunkt bei 15^0, der auch durch dilatometrische Messung bestätigt wurde. Neuerdings fand Hr. Cohen (l. c.) jedoch als Ursache der Unregelmässigkeiten das Verhalten des Cadmiumamalgams. Diese Thatsache scheint Hrn. Barnes bei Abfassung seiner Mitteilung noch nicht bekannt gewesen zu sein.

Hr. Barnes geht aus von diesen Untersuchungen über die Umwandlung des Cadmiumsulfaltes und bemerkt dann, anknüpfend an unsere oben citirte Aeusserung: „No idea can be obtained from the experiments of Jaeger and Wachsmuth as to the position of this important transition point, on account of the method they used of determining the temperature change, but it is a matter of very little difficulty to employ the Weston cell as a transition cell of the fourth type, in a manner similar to the Clark cell."

In der That besteht keine Schwierigkeit, das Cadmiumelement in dieser Weise zu benutzen und dass dies in der

1) Vgl. z. B. E. Cohen, Zeitschr. f. phys. Chem. **14.** p. 53, 535. 1894.
2) Ph. Kohnstamm u. E. Cohen, Wied. Ann. **65.** p. 344. 1898.

Reichsanstalt vor längerer Zeit geschehen ist, geht aus dem Schlusspassus in meiner Mitteilung über die Umwandlungserscheinungen beim Clarkelement[1]) hervor (p. 365): „Aehnliche Erscheinungen wie die hier beschriebenen (Umwandlung von Elementen, Doppelcurve der elektromotorischen Kraft), wurden auch an Cadmiumelementen beobachtet; diese waren sogar die Veranlassung zu den vorliegenden Versuchen. Bei den Clarkelementen lagen nämlich die Verhältnisse klarer, da bereits der Umwandlungspunkt des Zinksulfathydrates und seine beiden Modificationen bekannt waren, für das Cadmiumsulfat dagegen nicht. Man konnte dann aus dem hier Gefundenen Analogieschlüsse auf das Cadmiumelement machen. Die mit diesem Element erhaltenen Resultate sollen bei einer anderen Gelegenheit mitgeteilt werden.“

Nachdem Hr. Barnes seine Beobachtungen über die Umwandlung des Cadmiumelementes veröffentlicht hat, will ich auch meine Zahlen nicht länger zurückhalten, obwohl die Erscheinungen beim Cadmiumelement noch immer der Aufklärung bedürfen. Auf einige andere Bemerkungen von Hrn. Barnes werde ich weiter unten zurückkommen.

Ich bemerke noch ausdrücklich, dass sich sowohl die Messungen der Herren Barnes und Cohen wie die nachstehenden aus dem Jahre 1896 auf Elemente mit 14,3proc. Cadmiumamalgam beziehen, mit dem unsere ersten Elemente zusammengesetzt waren. Es wird öfter hervorgehoben, dass dieses Amalgam von uns empfohlen wird, doch mache ich demgegenüber darauf aufmerksam, dass ich nach der Untersuchung der Cadmiumamalgame[2]) (p. 110) ausgesprochen habe: „Für Cadmiumelemente empfiehlt es sich, ein etwas verdünnteres Amalgam zu nehmen, als $^1/_6$ (= 14,3 Proc.), da dieses schon nahe an der Umbiegung der Curve liegt.“ Etwas concentrirtere Amalgame zeigen nämlich schon bei Zimmertemperatur eine Veränderung ihres elektromotorischen Verhaltens; deshalb werden zur Zeit in der Reichsanstalt Amalgame mit ca. 13 Proc. Cd benutzt.

---

1) W. Jaeger, Wied. Ann. **63.** p. 354. 1897. Dieselbe Untersuchung ist später von Hrn. Barnes (Journ. phys. Chem. 4. p. 1. 1900) mit übereinstimmendem Resultat durchgeführt worden.

2) W. Jaeger, Wied. Ann. **65.** p. 106. 1898.

Da die Erscheinungen beim Cadmiumelement zwar eine gewisse Aehnlichkeit mit den Umwandlungserscheinungen beim Clarkelement zeigen, andererseits aber davon wesentlich abweichen, will ich kurz auf die letzteren zurückkommen. Wie aus Fig. 1[1]) hervorgeht, kann das Clarkelement unterhalb des Umwandlungspunktes des Zinksulfates (39°) zwei Zustände I und II annehmen, während oberhalb 39° nur der Zustand II

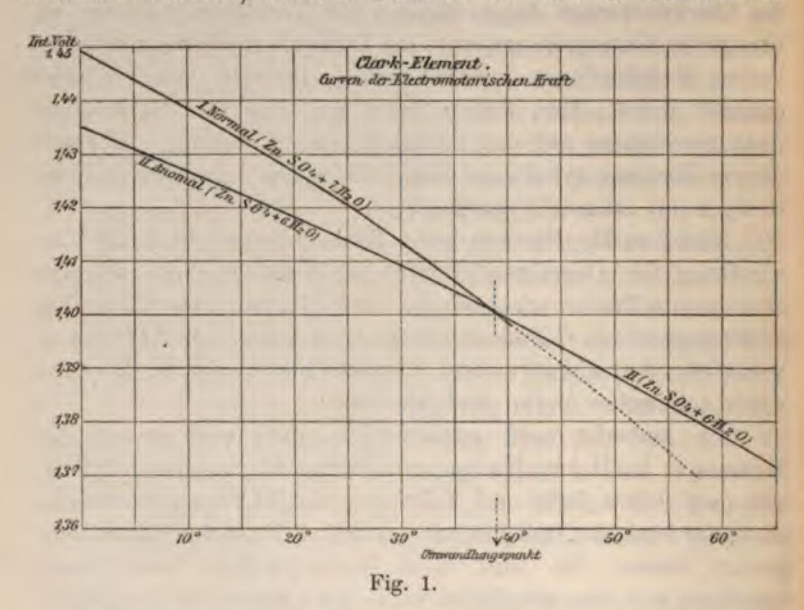


Fig. 1.

($ZnSO_4$, $6\,H_2O$ entsprechend) zu beobachten ist. Ein auf der Curve II unterhalb 39° befindliches Element kann durch Einwerfen eines Krystalles von $ZnSO_4$, $7\,H_2O$ in den Zustand I zurückgeführt werden. Betrachtet man nur das Element mit $ZnSO_4$, $7\,H_2O$, so erleidet seine Curve bei 39° einen Knick; der Umwandlungspunkt ist durch diesen Knick, sowie durch Beobachtung des Zustandes II unterhalb 39° genau festzustellen und stimmt mit dem anderweitig (durch Löslichkeits-Widerstands- oder Dilatometermessung) bestimmten Umwandlungspunkt überein.[2])

---

1) W. Jaeger, Wied. Ann. **63.** p. 355. 1897.
2) E. Cohen, Zeitschr. f. phys. Chem **31.** p. 169. 1899.

Für die beiden Zustände konnten Temperaturformeln aufgestellt werden; unterhalb 39° ist Zustand I der stabile, Zustand II der metastabile.

Die Erwartungen, beim Cadmiumelement analoge Erscheinungen zu finden, haben sich nicht erfüllt; auch die Zahlen und Curven von Hrn. Barnes entsprechen dieser Erwartung nicht, obwohl er in Uebereinstimmung mit den Beobachtungen von Kohnstamm und Cohen an Cadmiumsulfat bei 15° einen Umwandlungspunkt gefunden zu haben glaubt.

Es steht indessen jetzt auch nach Versuchen in der Reichsanstalt fest, dass die hier betrachteten Erscheinungen beim Cadmiumelement nichts mit der Umwandlung des Cadmiumsulfates zu thun haben; auch müsste man sonst wie beim Clarkelement zwei scharf ausgeprägte Curven der elektromotorischen Kraft unterhalb 15° finden.

Ich gehe nun zunächst auf meine Versuche ein. Einige Elemente habe ich in dem Intervall vom Gefrierpunkt der gesättigten Lösung des Cadmiumsulfates (ca. – 16°) bis über + 40° eingehend bei auf- und absteigender Temperatur untersucht, um einerseits die früher aufgestellte Temperaturformel zu prüfen, andererseits die Unregelmässigkeiten näher zu studiren. Ausserdem habe ich alle mir damals zur Verfügung stehenden Cadmiumelemente (34 an der Zahl) bei 0° durchgemessen, um zu sehen, in welchen Grenzen sich die Abweichungen bei dieser Temperatur bewegen. Von diesen Elementen waren vierzehn (Nr. 311, 312, 313, 314, 317, 323, 330, 352, 359, 373, 376, 377, 378, 381) normal, das heisst ihre elektromotorische Kraft bei 0° unterschied sich nicht mehr als zwei Zehntausendstel von dem durch die Formel angegebenen Wert. Die übrigen zwanzig Elemente zeigten Abweichungen, ansteigend bis über 2 Millivolt und zwar in dem Sinne, dass ihre elektromotorische Kraft grösser war, als der Formel entspricht. Die folgende Zusammenstellung (Tab. 1) enthält die Abweichungen vom Formelwert in Millivolt. Bei der Messung standen die Elemente in Petroleum, welches durch Eis auf 0° abgekühlt wurde. Die angegebenen Zahlen sind erhalten beim Aufenthalt der Elemente bei 0° nach einigen Stunden.

Tabelle 1.

Abweichung bei 0°.

Nr.	Mikrovolt	Nr.	Mikrovolt	Nr.	Mikrovolt	Nr.	Mikrovolt
366	+ 0,2	355	+ 0,6	330	+ 1,0	350	+ 1,3
380	+ 0,2	320	+ 0,7	360	+ 1,1	354	+ 1,3
364	+ 0,3	316	+ 0,7	368	+ 1,1	324	+ 1,3
315	+ 0,3	353	+ 0,9	331	+ 1,3	328	+ 1,5
361	+ 0,3	363	+ 0,9	340	+ 1,3	345	+ 2,3

Ausser dem durch die Formel gegebenen Zustand des Elementes bei 0°, dem eine Anzahl von Elementen entsprechen, giebt es also noch eine Reihe anderer Zustände, die continuirlich ineinander überzugehen scheinen. Von zwei Zuständen, einem stabilen und metastabilen, kann man somit bei diesem Element nicht reden. Dies wird auch durch die folgenden Beobachtungen bestätigt.

Die Elemente Nr. 316, 319 und 368 wurden im October 1896, zwischen $-16°$ und $+40°$, eingehend gemessen. Die Untersuchung geschah in der Weise, dass die Elemente verglichen wurden mit einem in Petroleum von Zimmertemperatur stehenden Element (Nr. 312). Die zu untersuchenden Elemente befanden sich ebenfalls in Petroleum; die Einrichtung und Messmethode war ganz dieselbe, wie sie bei den entsprechenden Versuchen über das Clarkelement (l. c.) beschrieben sind. Das Element Nr. 319, welches sich normal verhielt, war stets mit einem der abweichenden Elemente in demselben Bade, um dadurch eine Controle für die Richtigkeit der Temperatur zu erhalten. Die Temperatur des Elementes Nr. 312 schwankte zwischen 16° und 20°; die Differenzen der untersuchten drei Elemente gegen Nr. 312 sind auf eine Temperatur des letzteren von 20° C. reducirt. Die in den folgenden Tabellen als „berechnet" in Millivolt angegebenen Differenzen sind aus der von uns (l. c.) aufgestellten Temperaturformel

$$E_t = E_{20} - 0{,}000038\,(t - 20°) - 0{,}00000065\,(t - 20°)^2$$

abgeleitet. In der letzten Spalte sind die Abweichungen der Elemente (Beobachtete–Berechnete Differenz) eingetragen, aus denen man sieht, ob das Element sich normal verhält oder nicht.

Tabelle 2.

Lfde. Nr.	Datum	Zeit	Temp.	Differenz gegen 20° (MV.) beob.	Differenz gegen 20° (MV.) ber.	Abweichung (MV.)
			Cadmiumelement Nr. 319.			
1	23. X. 96	$12^h 25^m$	+ 8,0°	+ 0,43	+ 0,36	+ 0,07
2	"	2 45	+ 5,8	+ 0,43	+ 0,41	+ 0,02
3	24. X. 96	11 30	+ 4,0	+ 0,52	+ 0,44	+ 0,08
4	"	1 13	+ 2,0	+ 0,45	+ 0,47	− 0,02
5	"	2 13	+ 0,5	+ 0,49	+ 0,49	0
6	26. X. 96	—	+ 16,2	+ 0,16	+ 0,13	+ 0,03
7	"	12 47	0	+ 0,52	+ 0,50	+ 0,02
8	"	2 0	− 16,0	+ 0,76	+ 0,54	+ 0,22
9	"	3 0	− 15,5	+ 0,50	+ 0,54	− 0,04
10	"	5 43	− 13,7	+ 0,33	+ 0,54	− 0,21
11	"	9 15	− 11,5	− 0,02	+ 0,55	− 0,57
12	27. X. 96	—	+ 20,0	0	0	0
13	28. X. 96	—	+ 18,0	+ 0,08	+ 0,07	+ 0,01
14	"	2 45	− 7,8	+ 0,69	+ 0,55	+ 0,14
15	"	6 30	− 7,0	+ 0,44	+ 0,55	− 0,11
16	29. X. 96	10 0	− 3,9	+ 0,41	+ 0,53	− 0,12
17	"	12 50	0	+ 0,33	+ 0,50	− 0,17
18	"	1 35	+ 17,2	+ 0,10	+ 0,10	0
19	"	2 04	− 18,5	+ 0,71	+ 0,54	+ 0,17
20	"	3 45	+ 17,0	+ 0,08	+ 0,10	− 0,02
21	30. X. 96	—	− 7,8	+ 0,42	+ 0,55	− 0,13
22	"	12 15	+ 16,0	+ 0,14	+ 0,14	0
23	"	1 25	− 12,0	+ 0,59	+ 0,55	+ 0,04
24	"	2 10	− 11,0	+ 0,59	+ 0,55	+ 0,04
25	31. X. 96	—	− 1,2	+ 0,43	+ 0,52	− 0,09
26	"	12 0	+ 10,5	+ 0,30	+ 0,30	0
27	"	1 12	+ 28,0	− 0,39	− 0,34	− 0,05
28	"	2 25	+ 34,0	− 0,68	− 0,66	− 0,02
29	"	2 40	+ 42,0	− 1,15	− 1,15	0
30	"	2 55	+ 41,7	− 1,25	− 1,10	− 0,15
31	2. XI. 96	—	+ 17,5	+ 0,10	+ 0,09	+ 0,01
32	"	11 45	0	+ 0,54	+ 0,50	+ 0,04

Tabelle 3.

Lfde. Nr.	Datum	Zeit	Temp.	Differenz gegen 20° (MV.)		Abweichung (MV.)
				beob.	ber.	
			Cadmiumelement Nr. 316.			
1	21. X. 96	—	+ 14,0°	+ 0,22	+ 0,20	+ 0,02
2	„	—	+ 10,8	+ 0,30	+ 0,30	0
3	22. X. 96	—	+ 10,4	+ 0,55	+ 0,31	+ 0,24
4	„	—	+ 20,0	+ 0,06	0	+ 0,06
5	„	—	+ 12,0	+ 0,43	+ 0,26	+ 0,17
6	„	—	+ 8,0	+ 0,81	+ 0,36	+ 0,45
7	23. X. 96	$9^h 30^m$	+ 17,5	+ 0,13	+ 0,09	+ 0,04
8	„	12 20	+ 8,0	+ 0,70	+ 0,36	+ 0,34
9	„	2 50	+ 5,8	+ 0,92	+ 0,41	+ 0,51
10	24. X. 96	—	+ 15,2	+ 0,21	+ 0,16	+ 0,05
11	„	11 30	+ 4,4	+ 1,20	+ 0,43	+ 0,77
12	„	12 41	+ 2,0	+ 1,61	+ 0,47	+ 1,14
13	„	1 20	+ 2,2	+ 1,45	+ 0,47	+ 0,98
14	„	1 55	+ 0,6	+ 1,60	+ 0,49	+ 1,11
15	„	2 12	+ 0,6	+ 1,51	+ 0,49	+ 1,02
16	26. X. 96	—	+ 16,2	+ 0,17	+ 0,14	+ 0,03
17	„	12 47	0	+ 1,60	+ 0,50	+ 1,10
18	„	2 0	− 16,0	+ 5,03	+ 0,54	+ 4,49
19	„	3 0	− 15,5	+ 4,24	+ 0,54	+ 3,70
20	„	5 30	− 13,7	+ 3,21	+ 0,54	+ 2,67
21	„	9 15	− 11,5	+ 2,21	+ 0,55	+ 1,66
22	27. X. 96	—	+ 20,0	0	0	0
23	28. X. 96	1 30	+ 18,0	+ 0,13	+ 0,07	+ 0,06
24	„	2 45	− 7,8	+ 0,53	+ 0,55	− 0,02
25	„	6 30	− 7,0	+ 0,63	+ 0,55	+ 0,08
26	29. X. 96	10 0	− 3,8	+ 0,75	+ 0,53	+ 0,22
27	„	1 35	+ 17,2	+ 0,05	+ 0,10	− 0,05
28	30. X. 96	12 15	+ 16,0	+ 0,19	+ 0,14	+ 0,05
29	31. X. 96	11 0	− 1,7	+ 0,81	+ 0,52	+ 0,29
30	3. XI. 96	11 0	0	+ 0,44	+ 0,50	− 0,06
31	4. XI. 96	11 0	+ 17,2	+ 0,12	+ 0,10	+ 0,02

Tabelle 4.

Lfde. Nr.	Datum	Zeit	Temp.	Differenz gegen 20° (MV.) beob.	Differenz gegen 20° (MV.) ber.	Abweichung (MV.)
			Cadmiumelement Nr. 368.			
1	29. X. 96	$12^h 19^m$	− 3,5°	+ 3,41	+ 0,53	+ 2,88
2	„	1 50	0	+ 2,71	+ 0,50	+ 2,21
3	„	1 55	− 18,5	+ 3,74	+ 0,54	+ 3,20
4	„	8 45	+ 17,0	+ 0,24	+ 0,10	+ 0,14
5	30. X. 96	9 55	− 7,2	+ 2,74	+ 0,55	+ 2,19
6	„	12 15	+ 16,0	+ 0,38	+ 0,14	+ 0,24
7	„	1 25	− 12,0	+ 2,71	+ 0,54	+ 2,17
8	„	2 10	− 11,0	+ 2,82	+ 0,55	+ 2,27
9	31. X. 96	—	− 1,2	+ 2,24	+ 0,51	+ 1,73
10	„	11 45	+ 10,5	+ 0,60	+ 0,30	+ 0,30
11	„	1 12	+ 28,2	− 0,27	− 0,35	+ 0,08
12	„	2 25	+ 33,5	− 0,51	− 0,62	+ 0,11
13	„	2 35	+ 42,0	− 0,90	− 1,15	+ 0,25
14	„	2 55	+ 41,7	− 1,24	− 1,10	− 0,14
15	2. XI. 96	—	+ 17,5	+ 0,10	+ 0,09	+ 0,01
16	„	11 45	0	+ 0,49	+ 0,50	− 0,01

In den folgenden Figg. 2, 3, 4 sind die beobachteten Werte aus den obenstehenden Tabellen mit Angabe der laufenden Nummer des Versuches eingetragen[1]), gleichzeitig ist die aus der Formel berechnete Curve eingezeichnet.

Cadmiumelement Nr. 319.

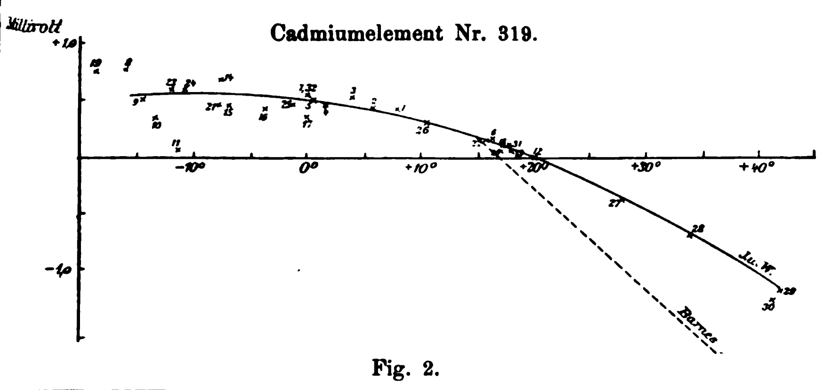


Fig. 2.

1) Mit Ausnahme von Nr. 18 für Element Nr. 316.

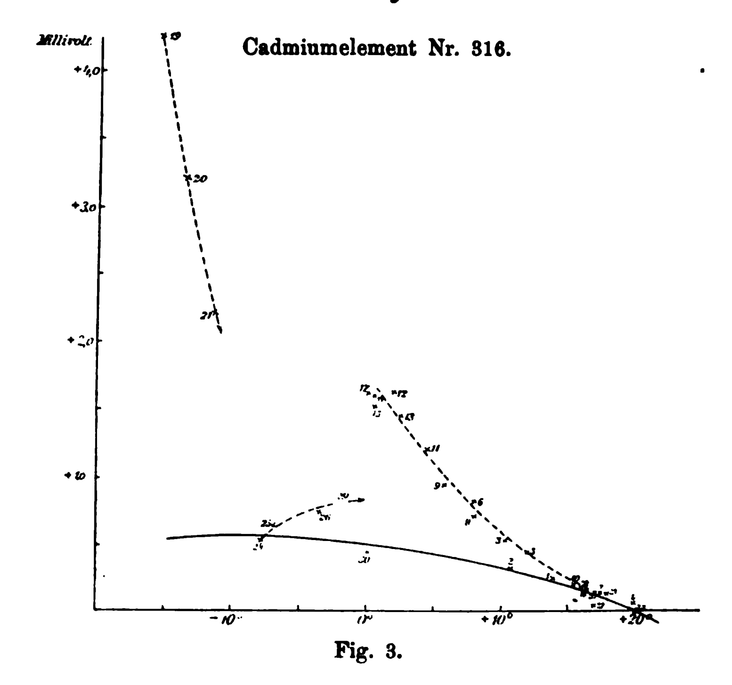

Cadmiumelement Nr. 316.
Millivolt
+4,0
+3,0
+1,0
-10°
+10°
+20°

Fig. 3.

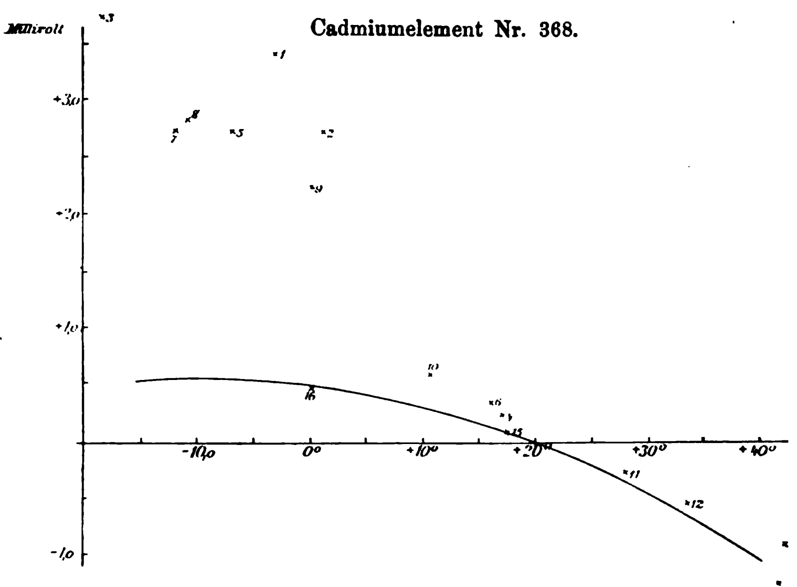

Cadmiumelement Nr. 368.
Millivolt
+3,0
-1,0
-10,0
0°
+10°
+20°
+30°
+40°

Fig. 4.

Man sieht nun zunächst aus Fig. 2, dass Element Nr. 319 die Temperaturcurve, welche nur zwischen 0° und 26° aufgestellt war, sogar von — 16° bis + 40° bestätigt. Man muss dabei ausschliessen die Versuche bei tiefer Temperatur vom 26. October (8 bis 11), bei welchen durch Abkühlung unter — 16° das Kryohydrat des Cadmiumsulfates entstanden war. In solchen Fällen war mehrmals eine starke stetige Abnahme der elektromotorischen Kraft des Elementes beobachtet worden; doch wurde dieses bei Zimmertemperatur stets wieder normal. Die von Hrn. Barnes (l. c.) aufgestellte Temperaturformel für das Cadmiumelement

$$E_t = E_{15} - 0{,}000\,086\,(t - 15^0),$$

welche oberhalb 15° gelten soll und mit unseren Versuchen unvereinbar ist, ist in Fig. 2 ebenfalls eingezeichnet. Hr. Barnes beanstandet (p. 341) an unserem Beobachtungsmaterial, dass nur wenige Versuche bei 26° angestellt wurden und hält die Uebereinstimmung zwischen Berechnung unterhalb 15° für zufällig. Demgegenüber möchte ich bemerken, dass die betreffenden Untersuchungen von Hrn. Wachsmuth und mir mit der grössten Sorgfallt ausgeführt worden sind. Wie a. a. O. angeführt, sind nicht alle Beobachtungszahlen mitgeteilt worden, da sie stets identisch dasselbe ergab; auch die vorliegenden Messungen zeigen ja wieder die Richtigkeit der damaligen Beobachtungen. Es ist mir daher unerklärlich, wodurch die abweichende Temperaturformel von Hrn. Barnes zu stande gekommen ist. Wenn dieselbe auch mit Angaben von Hrn. Dearlove übereinstimmt, so ist das noch kein Beweis für ihre Richtigkeit. Dass sich die von Hrn. Barnes zusammengesetzten Cadmiumelemente, welche hier in Betracht kommen, nicht wesentlich von unseren unterscheiden, scheint aus ihrem Verhältnis zum Clarkelement hervorzugehen. Denn Hr. Barnes giebt an für

$$\frac{\text{Clark } 15}{\text{Cadm. } 20^0} = 1{,}40658,$$

während von uns gefunden war

1,40663 (bez. 1,40679).[1]

1) W. Jaeger u. K. Kahle, Zeitschr. f. Instrumentenk. 18. p. 161. 1898; Wied. Ann. 65. p. 926. 1898 bez. St. Lindeck, Thätigkeitsbericht der Reichsanstalt, Zeitschr. f. Instrumentenk. 20. p. 176. 1900.

Was ferner die beiden abweichenden Elemente betrifft (Figg. 3 und 4), so stimmen dieselben auch nach Abkühlungen auf -20^0 bei $+10^0$ schon wieder auf einige Zehntausendstel mit dem Formelwert, können also von dieser Temperatur an unbedenklich zu allen Messungen benutzt werden.

Damit fällt auch die Behauptung von Hrn. Cohen, dass die Cadmiumelemente unterhalb 23^0 als Normalelemente unbrauchbar seien.

Wie sich neuerdings herausgestellt hat und mir auch von Hrn. Cohen privatim freundlichst mitgeteilt wurde, verlangen seine Versuche zum Teil eine andere als die früher gegebene Auslegung; der von ihm als metastabil bezeichnete Zustand ist gerade der stabile und die von uns aufgestellte Temperaturformel bezieht sich somit auf diesen stabilen Zustand. Die Abweichungen mancher Elemente mit 14,3 proc. Amalgam bleiben trotzdem bestehen und hängen offenbar mit Veränderungen des Cadmiumamalgams zusammen. Doch sind dadurch auch diese Elemente nicht unbrauchbar, solange man über 10^0 bleibt.

Auf Grund der bis jetzt bekannten Erscheinungen waren Hr. Lindeck und ich auf die Vermutung gekommen, dass die neueren, mit 13 proc. Amalgam hergestellten Elemente diese Unregelmässigkeiten viel weniger zeigen würden. Dies hat sich in der That bestätigt. Unsere ausgedehnten Versuche über Clark- und Cadmiumelemente bei verschiedenen Temperaturen sind bald abgeschlossen und sollen demnächst veröffentlicht werden. Diese Messungen bestätigen ebenfalls die im Vorstehenden enthaltenen Auseinandersetzungen.

Die Untersuchung der Elemente Nr. 316 und 319 bei tiefer Temperatur ergaben noch einige interessante Erscheinungen, die eine gewisse Analogie mit den Umwandlungsvorgängen beim Clarkelement zeigen.

Die elektromotorische Kraft des Elementes Nr. 316 bewegt sich bei den ersten Messungen (1 und 2) auf der normalen Curve, später aber (3 bis 17) auf einer stark abweichenden, die bei 0^0 eine Differenz von etwa 1,5 Millivolt gegen die normale ergiebt. Nach einer stärkeren Erwärmung auf ca. 40^0 befindet sie sich am 28. October unterhalb 0^0 wieder auf der normalen Curve (24), um sich dann langsam wieder dem

abweichenden Zustand (25, 26, 29) zu nähern; dazwischen war das Element auf Zimmertemperatur gewesen (27 und 28). Nach einer abermaligen starken Erwärmung war es dann am 3. November wieder bei 0^0 normal (30), ging jedoch später wieder in den abweichenden Zustand über. Auch bei diesem Element zeigt sich, wie bei Nr. 319 nach einer Abkühlung desselben unter den Gefrierpunkt der Cadmiumsulfatlösung (-16^0), in diesem Fall auf -18^0, ein starker Abfall der elektromotorischen Kraft (18 bis 21). Das Element Nr. 368 verhielt sich ähnlich; man muss bei der Betrachtung desselben berücksichtigen, dass seine elektromotorische Kraft durchschnittlich um ca. ein Zehntausendstel grösser ist, als die des Vergleichselementes Nr. 312 und muss diesen Betrag von den Abweichungen in Abrechnung bringen. Im allgemeinen weicht seine elektromotorische Kraft bei tieferen Temperaturen beträchtlich von der normalen Curve ab; dagegen ist es nach einer Erwärmung auf ca. 40^0 bei 0^0 normal geworden (16). Bei 10^0 unterscheidet es sich, wie Element Nr. 316 nur noch um wenige Zehntausendstel von normalen Elementen und befolgt die normale Curve ebenfalls noch über 30^0 hinaus. Die Abweichungen unterhalb 0^0 sind zu verschiedenen Zeiten so unregelmässig, dass sich keine Curve durch dieselben legen lässt.

Es ist also trotz der Aehnlichkeit der Erscheinungen mit denen beim Clarkelement hier nicht gelungen, eine zweite Curve zu finden, sondern es zeigen sich bei einer Anzahl von Elementen unregelmässige Abweichungen vom normalen Zustand. Ebensowenig ergeben die Curven von Hrn. Barnes diese zweite Curve; es ist augenscheinlich, dass die Abweichungen nichts mit der Umwandlung des Cadmiumsulfates zu thun haben. Auch sind die Aenderungen in der Löslichkeit des umgewandelten Salzes so minimal, dass sie wohl nicht zur Erklärung dieser starken Abweichungen herangezogen werden können. Dieser Ansicht ist auch Hr. Cohen (l. c.); die Abweichungen sind vielmehr auf Rechnung des 14,3 proc. Cadmiumamalgams zu setzen, das irgend welche unregelmässige Zustandsänderungen bei der Abkühlung erfährt, wahrscheinlich in analoger Weise, wie die concentrirteren Amalgame schon bei Zimmertemperatur sich verändern. Jedenfalls verläuft die Aenderung in demselben Sinne.

Mit Rücksicht auf die Veränderung, welche Hr. Cohen (l. c.) an einem 14,3 proc. Cadmiumamalgam beobachtet hatte, unterzieht er[1]) eine Veröffentlichung des Hrn. Marek[2]) einer Kritik, welche nach Vorstehendem einer wesentlichen Modification bedarf. Hr. Marek berechnete nach den von der Reichsanstalt aufgestellten Formeln zum Gebrauch in Laboratorien Tabellen für die elektromotorische Kraft der Clark- und Cadmiumelemente von 0° bis 30°. Hr. Cohen bemerkt nun, dass die Tabelle für das Cadmiumelement nur von 23 bis 26° Gültigkeit habe. Nach dem Vorstehenden kann man dagegen das Gültigkeitsbereich der Formel von + 10° bis über 30° festsetzen. Hr. Cohen dehnt seine Behauptung auch auf die Elemente der European Weston Electrical Instrument Co. aus. Da diese Firma indessen Amalgam von 12,5 Proc. benutzt[3]), so wäre diese Behauptung nur dann zutreffend, wenn die Unregelmässigkeiten bei 0° auch für dieses Amalgam nachgewiesen sind. Nach den neuerdings in Gemeinschaft mit Hrn. Lindeck angestellten Versuchen scheinen aber verdünntere Amalgame von diesen Unregelmässigkeiten bei 0° frei zu sein. Es bleibt also vorläufig nur das bestehen, dass bei Präcisionsmessungen Cadmiumelemente mit 14,3proc. Amalgam nicht unter + 10° gebraucht werden sollen.

Charlottenburg, den 6. November 1900.

---

1) E. Cohen, Ann. d. Phys. **2**. p. 863. 1900.

2) W. Marek, Ann. d. Phys. **1**. p. 617. 1900.

3) Vgl. z. B. W. Jaeger, Centralblatt für Accumulatoren- und Elementenkunde **1**. p. 3. 1900.

(Eingegangen 9. November 1900.)

8. *Beiträge zur Kenntnis der Vorgänge in Inductionsapparaten;* *von K. R. Johnson.*

(Fortsetzung von p. 744. Bd. 3. 1900.)

Der beim Schliessen inducirte secundäre Strom.

Wie oben gesagt, rühren die wichtigsten Wirkungen des Inductoriums fast ausschliesslich von dem zweiten (d. h. dem vom Oeffnungsstrome inducirten) secundären Strome her, und den ersten Inductionsstrom haben wir deshalb bisher vernachlässigt. Jedoch erhält man auch vom ersten Inductionsstrome Funkenentladungen, wenn nur die Funkenstrecke kurz genug genommen wird. Diese Entladungen, obwohl sie unbedeutend gegenüber denjenigen des zweiten Stromes sind, haben jedoch ein besonderes theoretisches Interesse, und der erste Strom soll daher etwas näher besprochen werden.

Vor dem Schliessen des primären Stromkreises ist der Condensator zu einer Potentialdifferenz, die der elektromotorischen Kraft der Batterie genau gleich ist, geladen. Beim Schliessen wird der Condensator durch die Oeffnungsstelle entladet, und die Entladung findet deswegen grösstenteils in einer Strombahn, die fast ausschliesslich von den Zuleitungsdrähten des Condensators entsteht, statt. Diese Strombahn besitzt somit nur einen sehr kleinen Widerstand w und eine sehr kleine Selbstinduction λ. Für diese Entladung erhält man somit die Gleichungen:

$$(22)\qquad \begin{cases} \lambda \dfrac{d\,i}{d\,t} + w\,i = e, \\ j_1 - i = C_1 \dfrac{d\,e}{d\,t}, \end{cases}$$

wo i die Stromstärke in der kurzen Strombahn der Oeffnungsstelle, j_1 diejenige in der primären Spule, und e die Potentialdifferenz des Condensators zur Zeit t bedeuten. C_1 bezeichnet wie oben die Capacität des primären Condensators. Zu den

obigen Gleichungen kommen die folgenden, die sich auf die gegenseitige Wirkung der beiden Spulen beziehen:

$$(23)\qquad \begin{cases} L_1 \dfrac{d j_1}{d t} + M \dfrac{d j_2}{d t} + W_1 j_1 = E_0 - e\,, \\ L_2 \dfrac{d j_2}{d t} + M \dfrac{d j_1}{d t} + W_2 j_2 = 0\,, \end{cases}$$

wo j_2 die Stromstärke in der secundären Spule zur Zeit t bezeichnet. Die Bedeutung der Constanten L_1, L_2, M, W_1, W_2 und E_0 sind schon oben angegeben worden.[1]) Die Ladung des Condensators sinkt vom Anfangswert E_0 bis beinahe zu Null herab, und die Verzögerung dieses Herabsinkens, die von dem Strome j_1 bewirkt wird, soll hier vernachlässigt werden.[2]) Dementsprechend wird j_1 aus der zweiten Gleichung (22) ausgelassen, und bei Integriren ergiebt sich somit aus den Gleichungen (22)

$$(24)\qquad e = \varepsilon^{-qt}(A \cos p t + B \sin p t)\,,$$

wo

$$q = \frac{w}{2\lambda} \quad \text{und} \quad p = \frac{\sqrt{1 - C_1 \dfrac{w_2}{4\lambda}}}{\sqrt{\lambda C_1}}.$$

Zur Zeit $t=0$, d. h. beim Schliessen des primären Stromes, hat man $i=0$ und $e=E_0$, und dadurch werden die Integrationsconstanten $A=E_0$ und $B=p/q\,.\,E_0$ bestimmt. Aus der Gleichung (24) ergiebt sich somit

$$(25)\qquad e = E_0\,\varepsilon^{-qt}\left(\cos p t + \frac{p}{q}\cdot \sin p\, t\right) = E_0 f(t)$$

und die Gleichungen (23) kann man demnach

$$(26)\qquad \begin{cases} L_1 \dfrac{d j_1}{d t} + M \dfrac{d j_2}{d t} + W_1 j_1 = E_0 - E_0 f(t)\,, \\ L_2 \dfrac{d j_2}{d t} + M \dfrac{d j_1}{d t} + W_2 j_2 = 0 \end{cases}$$

schreiben.

---

1) Vgl. Ann. d. Phys. **3.** p. 439. 1900.

2) Bei vollständiger Lösung der Differentialgleichungen (22) und (23) ergiebt sich zwar eine Hülfsgleichung vierten Grades, und die später mit $-q \pm p i$ bezeichneten Wurzeln erhalten etwas von den da gegebenen verschiedene Werte; die folgenden Schlussfolgerungen werden jedoch dadurch nicht beeinflusst, und die obige Annahme sei deswegen hier gerechtfertigt.

Wenn man diese Gleichungen nach vorherigem Multipliciren der letzteren mit x summirt, so ergiebt sich

$$(L_1 + M x)\frac{d j_1}{d t} + (M + L_2 x)\frac{d j_2}{d t} + W_1 j_1 + x W_2 j_2 = E_0 - E_0 f(t),$$

und wenn x die Bedingungen

$$\frac{W_1}{L_1 + M x} = \frac{x W_2}{L_2 x + M} = k$$

erfüllt, so kann man die obige Differentialgleichung durch

$$\frac{d U}{d t} + k U = k E_0 - k E_0 f(t) \tag{27}$$

ersetzen, wo $U = W_1 j_1 + x W_2 j_2$.

Die Bedingungsgleichungen genügen den Wurzeln

$$\begin{cases} \left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \dfrac{W_1 L_2 - W_2 L_1 \pm \sqrt{(W_1 L_2 + W_2 L_1)^2 - 4 L_1 L_2 W_1 W_2 \Delta}}{2 M W_2}, \\ \left.\begin{matrix} k_1 \\ k_2 \end{matrix}\right\} = \dfrac{W_1 L_2 + W_2 L_1 \mp \sqrt{(W_1 L_2 + W_2 L_1)^2 - 4 L_1 L_2 W_1 W_2 \Delta}}{2 L_1 L_2 \Delta}, \end{cases} \tag{28}$$

wo Δ die Differenz $1 - M^2 / L_1 L_2$ bezeichnet.

Demgemäss erhält man aus der Gleichung (27) zwei Lösungen, je nachdem man die Wurzeln (x_1, k_1) oder (x_2, k_2) benutzt. Die Lösungen sind wie folgt:

$$\begin{cases} U_1 = W_1 j_1 + x_1 W_2 j_2 = E_0 + A_1 \varepsilon^{-k_1 t} \\ \qquad - k_1 E_0 \varepsilon^{-k_1 t} \int \varepsilon^{k_1 t} . f(t)\, d t, \\ U_2 = W_1 j_1 + x_2 W_2 j_2 = E_0 + A_2 \varepsilon^{-k_2 t} \\ \qquad - k_2 E_0 . \varepsilon^{-k_2 t} \int \varepsilon^{k_2 t} f(t)\, d t. \end{cases} \tag{29}$$

Wenn man dabei berücksichtigt, dass das Integral

$$\varepsilon^{-k t} \int^t \varepsilon^{k t} f(t)\, d t = \frac{\varepsilon^{-q t}}{p^2 + (k - q)^2} \cdot \left[(k - 2 q) \cos p t + \frac{p^2 + q (k - q)}{p} \sin p t\right],$$

oder annäherungsweise

$$= \frac{\varepsilon^{-q t} \sin p t}{p}$$

geschrieben werden kann, so ergiebt sich aus der Differenz der Gleichungen (29):

$$(30)\left\{\begin{aligned}(x_1 - x_2) W_2 j_2 = A_1 \varepsilon^{-k_1 t} - A_2 \varepsilon^{-k_2 t} - k_1 E_0 \cdot \varepsilon^{-q t} \frac{\sin p t}{p} \\ + k_2 E_0 \cdot \varepsilon^{-q t} \frac{\sin p t}{p}.\end{aligned}\right.$$

Die Anfangsbedingungen sind $j_1 = 0$ und $j_2 = 0$ zur Zeit $t = 0$ und aus den Gleichungen (29) erhält man somit

$$A_1 = A_2 = - E_0;$$

die Gleichung (30) kann somit

$$j_2 = - \frac{E_0 . (\varepsilon^{-k_1 t} - \varepsilon^{-k_2 t})}{(x_1 - x_2) W_2} - \frac{(k_1 - k_2) E_0}{(x_1 - x_2) W_2 p} \cdot \varepsilon^{-q t} \sin p t$$

geschrieben werden, oder mit Berücksichtigung der in der Gleichung (28) gegebenen Werte der Constanten x_1, x_2, k_1 und k_2

$$(31)\left\{\begin{aligned}j_2 = - \frac{M W_1 i_0 (\varepsilon^{-k_1 t} - \varepsilon^{-k_2 t})}{\sqrt{(W_1 L_2 + W_2 L_1)^2 - 4 L_1 L_2 W_1 W_2 \Delta}} \\ + \frac{M E_0}{L_1 L_2 p \Delta} \cdot \varepsilon^{-q t} \sin p t,\end{aligned}\right.$$

wo i_0 die Stärke des constanten primären Stromes bedeutet.

Aus der Beziehung

$$j_2 = - C_2 \left(\frac{d E_2}{d t}\right)$$

zwischen der Potentialdifferenz E_2 und der Stromstärke j_2 im secundären Kreise erhält man die Spannung des ersten inducirten Stromes zur Zeit t durch Integriren. Es ergiebt sich dabei

$$(32)\left\{\begin{aligned}E_2 = - \frac{M i_0}{C_2 W_2} \cdot \left\{1 - \frac{L_1 L_2 \Delta [k_2 \varepsilon^{-k_1 t} - k_1 \varepsilon^{-k_2 t}]}{\sqrt{(W_1 L_2 + W_2 L_1)^2 - 4 L_1 L_2 W_1 W_2 \Delta}}\right\} \\ + \frac{M E_0}{C_2 p^2 L_1 L_2 \Delta} \{1 - \varepsilon^{-q t} \cos p t\}.\end{aligned}\right.$$

Messungen mit dem Galvanometer und Dynamometer im secundären Stromkreise.

Den Verlauf der beiden inducirten Ströme hat man nach den von ihnen bei diesen Messapparaten bewirkten gleichen oder verschiedenen Ausschlägen beurteilt. Aus den gleichen Galvanometerausschlägen schloss man somit, dass die bewegten

Elektricitätsmengen in beiden Fällen einander gleich sind. Aus den von dem zweiten Strome bewirkten grösseren Dynamometerausschlage wurde die Schlussfolgerung gezogen, dass der zweite Strom einen rascheren zeitlichen Verlauf hat, und dass die Stromintensität somit schneller steigt und dann wieder schneller herabfällt als bei dem ersten Strome. Die obige Theorie stimmt mit diesen Messresultaten und mit den daraus gezogenen Schlussfolgerungen völlig überein. Die Quantität oder das Zeitintegral des ersten Stromes erhält man aus der Beziehung

$$\int_0^\infty j_2\,dt = -C_2 \cdot \int_0^\infty dE_2 = -C_2\left[E_2\right]_0^\infty$$

und aus der Gleichung (32) ergiebt sich somit

$$(33) \qquad \int_0^\infty j_2\,dt = -\frac{M i_0}{W_2},$$

wenn die Werte von k_1 und k_2 in (28) berücksichtigt werden.

Mittels des Dynamometers wird bekanntlich das Integral

$$\int_0^\infty j_2^2\,dt$$

gemessen. Wird dasselbe Integral für den ersten inducirten Strom [mit Vernachlässigung des periodischen Gliedes aus der Gleichung (31)] berechnet, so ergiebt sich

$$(34)\left\{\begin{aligned} \int_0^\infty j_2^2\,dt &= \frac{M^2 W_1^2 i_0^2}{(W_1 L_2 + W_2 L_1)^2 - 4 \Delta L_1 L_2 W_1 W_2}\left[\frac{1}{2 k_1} + \frac{1}{2 k_2}\right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{k_1 + k_2}\right] = \left(\frac{M i_0}{L_2}\right)^2 \cdot \frac{\frac{W_1}{L_1}}{\frac{2 W_2}{L_2}\left(\frac{W_1}{L_1} + \frac{W_1}{L_2}\right)}. \end{aligned}\right.$$

Wir wollen die Integrale (33) und (34) mit den entsprechenden Integralen des zweiten Stromes vergleichen; da jedoch die früher gegebenen Formeln des zweiten Stromes sehr unbequem zu handhaben sind, so wird, um die Rechnung zu vereinfachen, angenommen, dass β sehr gross gegenüber α und γ sei — was z. B. bei einem Inductorium, das sich mit

einem primären Condensator von sehr geringer Capacität begnügt, eintrifft — und unter dieser Voraussetzung erhält man aus den Gleichungen (10) annäherungsweise

$$Y_0 = \frac{M i_0}{L_2}, \quad Y_1 = -\frac{M i_0}{L_2}, \quad Y_2 = 0$$

und aus (12)

$$B_0 = \frac{M}{W_2} i_0, \quad B_1 = 0, \quad B_2 = -\frac{M i_0}{\beta}.$$

Die letzte Gleichung (8), welche die secundäre Stromstärke darstellt, wird dadurch zu

$$(35) \qquad i_2 = \frac{M i_0}{L_2} \cdot (\varepsilon^{-\gamma t} - \varepsilon^{-\alpha t} \cos \beta t),$$

vereinfacht, und ebenso erhält man aus der Gleichung (11) die Annäherungsformel

$$(36) \qquad E_2 = \frac{M i_0}{C_2 W_2} (1 - \varepsilon^{-\gamma t}) - \frac{M i_0}{L_2 C_2 \beta} \cdot \varepsilon^{-\alpha t} \sin \beta t,$$

welche die secundäre Potentialdifferenz darstellt.

Aus der Gleichung (35) erhält man somit das Zeitintegral

$$\int_0^\infty i_2 \, d t = \frac{M i_0}{L_2} \left[\frac{1}{\gamma} - \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}\right] = \frac{M i_0}{W_2} \left[1 - \frac{\alpha \gamma}{\alpha_2 + \beta^2}\right]$$

und weil α und γ neben β vernachlässigt werden können, so ergiebt sich einfach

$$(37) \qquad \int_0^\infty i_2 \, d t = \frac{M i_0}{W_2}.$$

Aus den Gleichungen (33) und (37) geht somit hervor, dass die Zeitintegrale der beiden inducirten Ströme einander numerisch gleich sind und sich nur bei dem Vorzeichen voneinander unterscheiden. *Eine Galvanometernadel muss demzufolge dieselbe Ablenkung von dem ersten wie von dem zweiten inducirten Strome erfahren; nur die Richtung der Ablenkung ist im letzteren Falle entgegengesetzt.*[1])

---

1) Dieser Satz ist von Hrn. Thalén und mehreren anderen geprüft worden. Was die theoretische Ableitung betrifft, so kann sie unmittelbar aus den Differentialgleichungen weit einfacher dargestellt werden, und die obige Berechnung dient deswegen nur als eine Controle der An-

Ferner erhält man aus der Gleichung (35)

$$\int_0^\infty i_2^2\,dt = \left(\frac{M i_0}{L_2}\right)^2 \cdot \left[\frac{1}{2\gamma} + \frac{1}{4\alpha} - \frac{2(\alpha+\gamma)}{(\alpha+\gamma)^2+\beta^2} + \frac{\alpha}{4(\alpha^2+\beta^2)}\right].$$

Wenn man dabei berücksichtigt, dass β sehr gross gegenüber α und γ ist und ferner $\gamma = (W_2 / L_2)$, so erhält man annäherungsweise

$$(38) \qquad \int_0^\infty i_2^2\,dt = \left(\frac{M i_0}{L_2}\right)^2 \cdot \left[\frac{1}{\frac{2 W_2}{L_2}} + \frac{1}{4\alpha}\right].$$

Wird das obige Integral mit dem in Gleichung (34) dargestellten Integrale des ersten Stromes verglichen, so findet man, dass das erste Glied in (38) grösser als das ganze Integral (33) ist, und *ein Dynamometer, in dem secundären Kreise eingeschaltet, muss somit einen grösseren Ausschlag beim zweiten inducirten Strome als bei dem ersten geben.*

Eine graphische Darstellung des in den Gleichungen (32) und (35) gegebenen zeitlichen Verlaufes der beiden Inductionsströme zeigt deutlich, dass der zweite Strom schneller ansteigt, und eine grössere Intensität erreicht, als der erste Strom, dass er auch sogleich schneller herabfällt, und in dieser Hinsicht stimmt somit die Theorie mit den früher beobachteten Thatsachen überein. Dagegen können wir nicht die besonders kräftigen Wirkungen des zweiten Stromes nur dem schnelleren Verlaufe desselben allein zuschreiben, sondern dieselben hängen grösstenteils von den Schwingungen des zweiten Stromes ab, wie später näher erörtert werden soll.

Die Entladungsbedingungen.

Die Bedingungen, unter welchen die Funkenentladungen erfolgen, sind sehr unvollständig bekannt; zwar fehlt es nicht an Hypothesen, die von der Erfahrung mehr oder weniger stark gestützt werden, aber eine Entscheidung, welche unter ihnen die wahrscheinlichste ist, hat man noch nicht erzielt.

---

näherung. Die Unabhängigkeit dieses Satzes von der Verteilung des Stromes im Querschnitte ist von Lord Kelvin nachgewiesen worden (Phil. Mag. (5) **29.** p. 276. 1890).

1. Die älteste Ansicht über die Ursache des Funkens ist wohl die von Faraday ausgesprochene. Beim Vergleichen des Oeffnungssstromes mit hydrodynamischen Vorgängen wurde Faraday zu einer Anschauung geführt, nach welcher der Oeffnungsfunke der Energie des Oeffnungsstromes zugeschrieben werden muss, eine Ansicht, der hinsichtlich des Oeffnungsfunkens von Hrn. S. Thompson u. a. beigetreten wird.[1])

2. Bald traten die Untersuchungen über die sogenannten elektrostatischen Entladungen in den Vordergrund, und die dabei gemessenen Entladungspotentiale wurden unter der Voraussetzung ermittelt, dass bei einem bestimmten Gase von bestimmtem Drucke in der Funkenstrecke und einer bestimmten Form der Elektroden das Funkenpotential nur von dem Elektrodenabstande abhängt.

3. Zuletzt wurde von Hrn. Jaumann die Abhängigkeit des Funkenpotentiales von der zeitlichen Aenderung des Entladungsfeldes nachgewiesen, was offenbar mit der Faraday'schen Anschauung im Einklang steht oder wenigstens sich davon wenig unterscheidet. Zwischen der Stromstärke i und der Potentialdifferenz E besteht, z. B. bei Flaschenentladungen, die Beziehung $i = C(dE/dt)$, wo C eine Capacität bedeutet, und die Energie des Stromes ist somit $iE = CE(dE/dt)$. Die von Hrn. Jaumann dargestellte Entladungsbedingung ist $E(dE/dt)$ und nach Faraday soll die Entladung von der Grösse $CE(dE/dt)$ abhängen; die beiden Grössen sind nur bei der Constante C verschieden.

Was die zweite Ansicht betrifft, so kann sie schwerlich eine vollständige Entladungsbedingung enthalten, und jedenfalls hängen die Messungen von Umständen ab, die uns den gemessenen Potentialen eine bestimmte Bedeutung zu erteilen kaum erlauben. Sie wurde anfangs in der Vorstellung, dass bei der Ladung das Potential allmählich ohne Schwankungen wächst, begründet; aber die zur Erzeugung der elektrostatischen Entladungen benutzten elektrostatischen Maschinen erlauben nicht ein allmähliches stetiges Anwachsen des Potentiales, wie sich aus einem Versuche von Wollaston, welcher von Faraday wiederholt wurde, ergiebt.[2]) Dieser Versuch zeigt, wie schon

1) S. Thompson, The Elektromagnet p. 363 u. f. 1891.

2) M. Faraday, Experimental Researches I. Art. p. 327—329. 1849.

früher hervorgehoben wurde[1]), dass bei Spitzenelektroden die Potentialschwankungen wahrscheinlich am wenigsten, 8 Volt, betragen; bei Kugelelektroden dürfen diese Oscillationen etwas schwächer sein, aber es ist jedoch nicht sichergestellt, ob sie die gemessene Potentiale beeinflussen oder nicht; jedenfalls können sie bei kleineren Potentialen, d. h. bei kleinerem Elektrodenabstande, kaum ohne Einfluss sein. Die dabei gemessenen Potentiale beziehen sich auf keine rein elektrostatische Ladung, und die einzige daraus zu ziehende Schlussfolgerung ist, dass die zur Entladung nötige Potentialdifferenz in einem mehr oder minder beschränkten Gebiete der Funkenlänge proportional wächst. Andererseits ist die Beziehung der Entladung zu dem Quotienten dE/dt nicht sicher festgestellt worden, und wir sind somit ungehindert, die Entladungsbedingungen eben in den Vorgängen beim Inductorium zu suchen.

Zu diesem Zwecke mögen wir zuerst die beiden secundären Ströme vergleichen. Von beiden werden dieselben Elektricitätsmengen Mi_0/W_2 von dem einen Pole zu dem anderen geführt, und es wäre ja ganz unbegreiflich, wenn diese Menge, in einem Sinne bewegt, eine grössere Potentialdifferenz hervorbringen würde, als wenn sie in entgegengesetztem Sinne fortgeführt wird. *Die maximale Spannung im secundären Kreise muss somit wesentlich dieselbe bei den beiden Strömen sein*, und die vom zweiten Strome erzeugte Funkenentladung kann somit nur der zeitlichen Aenderung der Potentialdifferenz zugeschrieben werden; aus dem schnelleren Verlaufe des zweiten Stromes folgt nämlich, dass die secundäre Stromstärke i_2 und damit ebenso dE/dt einen grösseren Betrag beim zweiten Strome erreicht, was mit der Jaumann-Faraday'schen Entladungsbedingung übereinstimmt. Eine nähere Begründung der oben erwähnten Erscheinungen führt jedoch zu einer abgeänderten Formulirung dieser Bedingung. Es geht aus den Beobachtungen der Herren Walter und Mizuno hervor, dass die maximale Funkenlänge im secundären Kreise mit der Quadratwurzel aus der primären Capacität umgekehrt proportional ist, und diese Capacität beeinflusst nicht das erste Glied des in Gleichung (35) dargestellten Ausdruckes des zweiten

1) K. R. Johnson, Ann. d. Phys. 3. p. 463. 1900.

secundären Stromes, sondern nur die letzte periodische Componente dieses Stromes hängt von der Capacität C_1 ab, und zwar so, dass die Frequenz $\beta / 2\pi$ der Quadratwurzel aus C_1 umgekehrt proportional ist, wogegen die Schwingungsamplitude von dieser Capacität unabhängig ist. Die Frequenz $\beta / 2\pi$ beeinflusst also nicht die maximale Secundärspannung, jedoch *ist die maximale Funkenlänge dieser Frequenz proportional.*

Diese Schlussfolgerung wird von den elektrolytischen Vorgängen im secundären Kreise völlig bestätigt und gerechtfertigt. Die Knallgasentwickelung, die in einem im secundären Kreise eingeschalteten Voltameter stattfindet, wird nur von dem zweiten Strome erzeugt, wie oben erwähnt wurde[1]), und zwar ist die pro Zeiteinheit entwickelte Gasmenge der Quadratwurzel aus der primären Capacität umgekehrt proportional. Die Erzeugung von Knallgas im secundären Kreise beweist somit die Anwesenheit von sehr schnellen Potentialschwankungen in dem zweiten Strome, und die übereinstimmende Abhängigkeit der entwickelten Knallgasmenge und der maximalen Funkenlänge von der primären Capacität zeigt ja deutlich, dass sie alle beide von der Frequenz herrühren müssen. In der Gleichung (35) haben die beiden Glieder denselben Coefficient, und es ist deswegen dabei nicht möglich zu entscheiden, ob die Funkenlänge von der Amplitude abhängt. Wenn man bedenkt, dass die Schwingungen bei einer Amplitude Null aufhören, so ist es wohl kaum wahrscheinlich, dass die Entladung von der Amplitude unabhängig sein kann. Dies folgt auch von den vom Schliessungsstrome erzeugten secundären Funkenentladungen. Die maximale Länge der beim Schliessen erzeugten sekundären Funken wird nach den Beobachtungen Hrn. Beattie's[2]) bei constanter Stärke des stationären Stromes von keiner Abänderung im primären Kreise beeinflusst, die elektromotorische Kraft der Batterie jedoch ausgenommen. Bei einer Stärke des stationären Stromes von 2,5 Amp. zeigte sich eine rauhe Proportionalität („a rough proportionality") zwischen der Funkenlänge und der elektromotorischen Kraft, welche letztere dabei von 10—90 Volt variirt wurde. Die Gleichung (31), die den Verlauf des ersten

1) Vgl. Inaugural-Dissertation p. 26—30.
2) J. C. Beattie, Phil. Mag. (5) **50**. p. 139. 1900.

Stromes darstellt, giebt eine Frequenz der schwingenden Bewegung von $p/2\pi$, welche aus der primären Capacität C_1 in ebenderselben Weise wie $\beta/2\pi$ abhängt; die Amplitude ist dagegen p umgekehrt proportional. Weil die Funkenlänge von p unabhängig ist, so muss sie somit von dem Producte aus der Frequenz und der Amplitude abhängen; denn dieses Product ist von p unabhängig und der elektromotorischen Kraft E_0 proportional. Eine genaue Proportionalität zwischen der Funkenlänge und der elektromotorischen Kraft kann dagegen nicht experimentell gefunden werden, denn dafür ist dieselbe maximale Secundärspannung nötig. Wie aus der Gleichung (31) hervorgeht, ist jedoch das erste Glied des Stromes j_2 von der Aenderung des primären Widerstandes nicht ganz unabhängig, und die unperiodische Stromcomponente, die zur Ladung des secundären Poles dient, muss somit demselben eine je nach dem Widerstande abgeänderte Maximalspannung erteilen.

Aus dem oben erwähnten Ergebnisse kann man somit schliessen, dass *die maximale Funkenlänge der Amplitude der Schwingungen proportional ist.*

Wird den obigen Entladungsbedingungen die dritte, dass *die Funkenlänge mit dem Entladungspotentiale proportional wächst,* zugefügt, so ergiebt sich

$$\text{(I)} \qquad l_{max} = K \cdot A_i \cdot \frac{\beta}{2\pi} \cdot (V - V_0),$$

wo l_{max} die maximale Funkenlänge, A_i die Amplitude und $\beta/2\pi$ die Frequenz des Stromes bedeuten, und V die vom Strome erzeugte Potentialdifferenz bezeichnet.

Wir haben die Entladungsbedingungen bis jetzt in der secundären Stromstärke gesucht; dies ist jedoch eine Willkürlichkeit; es zeigt sich nämlich, dass dieselben gleich gut von den Potentialschwankungen abgeleitet werden können. Wenn eine der obigen Ableitung ähnliche bezüglich der Aenderung der Secundärspannung ausgeführt wird, so erhält man die Beziehung:

$$\text{(II)} \qquad l_{max} = K_1 \cdot A_e \cdot \left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^2 \cdot (V - V_0),$$

und es ist gegenwärtig nicht möglich zu entscheiden, ob (I) oder (II) die wahre Beziehung zwischen Funkenlänge und Potentialdifferenz liefert. Bei Benutzung der Gleichung (I) erhält man für den zweiten Strom

$$l_{max} = K \cdot \frac{M i_0}{L_2} \cdot \frac{\beta}{2\pi} \cdot (V - V_0),$$

und für den ersten

$$l_{max} = K \cdot \frac{M E_0}{2\pi L_1 L_2 \Delta} \cdot (V - V_0).$$

Verwendet man wieder die Gleichung (II), so ergiebt sich für den ersten Strom

$$l_{max} = K_1 \cdot \frac{M E_0}{(2\pi)^2 . L_1 L_2 C_2 \Delta} \cdot (V - V_0)$$

und für den zweiten

$$l_{max} = K_1 \cdot \frac{M i_0 \beta}{(2\pi)^2 . L_2 C_2 \beta} (V - V_0).$$

Die obigen Erscheinungen werden gleich gut in beiden Fällen befriedigt.

Wenn wir eine Beziehung

$$l = K \cdot \frac{M i_0}{L_2} \cdot \frac{\beta}{2\pi} (V - V_0)$$

oder

$$V - V_0 = \frac{2\pi L_2 . l}{K . M i_0 \beta}$$

zwischen Funkenlänge und Potentialdifferenz annehmen, so erhält man

$$\text{(39 I)} \qquad \tau_n = \frac{2\pi . l . L_2^2 C_2}{K . \beta M^2 i_0^2} . \varepsilon^{-\gamma t_n}$$

wenn die Grösse $E - E_0$ in der Gleichung (19 a) mit dem oben angegebenen Werte von $V - V_0$ ersetzt wird und die periodischen Glieder in (19 a) vernachlässigt werden.

Geht man im Gegenteil von der Beziehung

$$l = K_1 \cdot \frac{M i_0}{L_2 C_2} \cdot \frac{\beta}{(2\pi)^2} \cdot (V - V_0)$$

aus, so erhält man

$$\text{(39 II)} \qquad \tau_n = \frac{(2\pi)^2 . l . L_2^2 C_2^2}{K_1 \beta M^2 i_0^2} . \varepsilon^{-\gamma t_n}.$$

Nach der ersten Gleichung (39 I) sollen die Zeitabständen t_n der secundären Capacität, nach der zweiten (39 II) dem Quadrate der secundären Capacität proportional sein. Bei Aenderung der secundären Capacität sollte man somit eine Entscheidung über die wahre Entladungsbedingung erzielen. Die Tab. 7 und 8 in der oben erwähnten Arbeit von Hrn **Moll**[1]) werden zu diesem Zwecke mitgeteilt. Sie enthalten die secundäre Capacität einer im secundären Kreise eingeschalteten Leydener Batterie in elektrostatischem Maasse; die Zeitabstände der

1) T. **Moll**, Bih. till K. Sv. Vet. Akad. Handl. **12.** 1886.

einzelnen elementaren Funken sind zwar nicht angegeben worden, sondern statt derselben ihr Mittelwert u. Wenn die einzelnen Zeitabstände τ_n mit C_2 oder C_2^2 proportional sind, so muss dasselbe auch vom Mittelwerte u gelten. Einer Constanz des Quotienten u/C_2^2 wird in den Tabellen entschieden widersprochen; dagegen sind die Abweichungen von einer Constanz u/C_2 nicht grösser, als dass sie mit der Gleichung (39 I) vereinbar sind. Ich schloss demzufolge, dass die zweite Gleichung (II und 39 II) verworfen werden musste; es zeigte sich indessen, dass dies ein Trugschluss war, wie im Folgenden erwiesen wird.

Tabelle 7.

Stromstärke 3,98 Amp.; Funkenlänge 2 mm.

Capacität C_2	Verlauf der Entladung[1]	Mittelwert der Funkenzahl			Die ganze Entladungsdauer	Mittelwert der Zeitabstände der elementaren Funken u	Die Dauer der stillen Entladung in Proc. der ganzen Entladungsdauer	Verhältnis zwischen dem ersten und zweiten Teile der stillen Entladung	$\frac{u}{C_2}$	Zahl der Beobachtungen
			Vor der stillen Entladung	Nach der stillen Entladung						
285	1, 1, 2	1,3	—	—	0,00223	0,00223	—	—	78	3
143	3, 3, 3	3,0	—	—	0,00295	0,00148	—	—	103	3
78,5	10, 11, 8	9,7	—	—	0,00456	0,00528	—	—	68	3
67	15, 12, 8	11,7	—	—	0,00453	0,00438	—	—	66	3
31	25	25,0	—	—	0,00632	0,00263	—	—	85	1
31	4, *a*, 20	—	4,0	20,0	0,00632	—	18,9	—	—	—
23	2, *a*, 9	—	—	—						
23	1, *a*, 14	—	—	—	0,01275	—	72,1	—	—	—
23	3, *a*, 14	—	2,0	12,3						
x[2]	3, *a*, 9	—	—	—						
x[2]	1, *a*, 1	—	—	—	0,01523	—	91,3	—	—	—
x[2]	1, *a*, 5	—	1,7	5,0						
x[2]	1, *a*, 1, *a*, 5	—	—	—						
x[2]	1, *a*, 1, *a*, 5	—	—	—	0,01815	—	91,3	3,8	—	—
x[2]	1, *a*, 1, *a*, 6	—	1,0	5,3						

1) Der Buchstabe *a* bedeutet stille Entladung; 1, *a*, 1, *a*, 5 bedeutet somit ein Funke, stille Entladung, ein Funke, stille Entladung, fünf Funken.

2) Mit x wird eine Capacität < 23 bezeichnet, die jedoch nicht bestimmt wurde.

Tabelle 8.

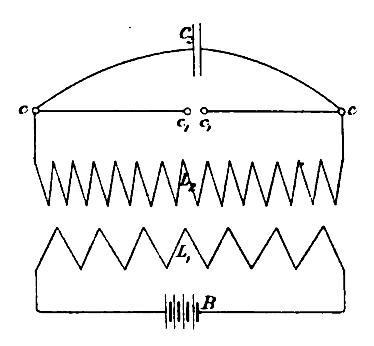
Stromstärke 3,98 Amp.; Funkenlänge 1 mm.

Capacität C_2	Verlauf der Entladung	Mittelwert der Funkenzahl			Die ganze Entladungsdauer	Mittelwert der Zeitabstände der elementaren Funken u	Die Dauer der stillen Entladung in Proc. der ganzen Entladungsdauer	Verhältnis zwischen dem ersten und zweiten Teile der stillen Entladung	$\frac{u}{C_2}$	Zahl der Beobachtungen
			Vor der stillen Entladung	Nach der stillen Entladung						
347	4, 4, 5	4,3	—	—	0,005 12	0,001 525	—	—	44	3
285	6, 5	5,5	—	—	0,006 31	—	—	—	49	3
143	12, 13, 13	12,7	—	—	—	—	—	—	—	3
78,5	einige, *a*, 16	—	—							
78,5	einige, *a*, 16	—	—	15	0,010 24	—	24,7	—	—	3
78,5	einige, *a*, 13	—	—							
67	34	34	—	—	0,010 27	0,000 311	—	—	47	2
67	34									
67	5, *a*, 21	—	5	21	0,015 28	—	44,5	—	—	1
31	2, *a*, 27	—								
31	1, *a*, 27	—	1,3	29,7	0,019 09	—	67,5	—	—	3
31	1, *a*, 35	—								
23	1, *a*, 18	—								
23	1, *a*, 15	—	1,0	15,7	0,021 71	—	76,7	—	—	3
23	1, *a*, 14	—								
x	1, *a*, 20	—	1,0	20,0	0,022 98	—	77,7	—	—	2
	1, *a*, 20	—								
31	1, *a*, 1, *a*, 18	—								
31	1, *a*, 1, *a*, 22	—	1,3	19,7	0,021 28	—	75,7	2,7	—	3
31	2, *a*, 1, *a*, 19	—								
23	1, *a*, 1, *a*, 12	—								
23	1, *a*, 1, *a*, 18	—	1,0	17,3	0,022 24	—	81,9	3,6	—	3
23	1, *a*, 1, *a*, 22	—								
x	1, *a*, 1, *a*, 11	—	1,0	11,0	0,022 64	—	81,4	4,2	—	2
	1, a, 1, *a*, 11	—								

Die Abzweigung des secundären Stromkreises mittels eines Condensators.

Bei Parallelschaltung eines Condensators mit der Funkenstrecke wird der secundäre Strom verteilt, und zwar so, dass der grösste Teil des Stromes zum Condensator geht, während

nur ein kleiner Teil zum Funkenmikrometer erlangt. Es wird dabei vorausgesetzt, dass die Anordnung eine ganz symmetrische ist (vgl. beistehende Figur); von dem secundären Pole c führt ein Kupferdraht zum Funkenmikrometer c_1 und ein anderer Draht zum Condensator C_2. L_1 ist die primäre und L_2 die secundäre Rolle des Inductors, der mit der Batterie B gespeist wird. Der Verzweigungspunkt c besitzt eine Capacität c (z. B. diejenige einer Klemmenschraube) und dem Funkenmikrometer wird die Capacität c_1 erteilt. C_2 ist die Capacität des Condensators C_2. Es sei ferner w_1 der Widerstand und λ_1 die Selbstinduction des Drahtes $c\,c_1$; w_2 und λ_2 die entsprechenden Grössen des Drahtes $c\,C_2$. Wie oben wird vorausgesetzt, dass die Rückwirkung des Condensators und der ganzen Verzweigungsvorrichtung den secundären Strom des Inductors nicht beeinflusst. Die Stärke dieses Stromes ist demzufolge



$$(40) \qquad i = \frac{M i_0}{L_2} (\varepsilon^{-\gamma t} - \varepsilon^{-\alpha t} \cos \beta t),$$

wie sie in der Gleichung (35) dargestellt worden ist.

Wird die Stromstärke im Zweige $c\,c_1$ mit i_1, und diejenige in $c\,C_2$ mit i_2 bezeichnet, und nennt man ferner V, V_1 und V_2 die Potentiale in c, c_1 und C_2 zur Zeit t, so erhält man folgende Gleichungen:

$$(41) \qquad \begin{cases} \lambda_1 \dfrac{d i_1}{d t} + w_1 i_1 = V - V_1, \\ \lambda_2 \dfrac{d i_2}{d t} + w_2 i_2 = V - V_2, \\ i_1 = c_1 \dfrac{d V_1}{d t}, \\ i_2 = C_2 \dfrac{d V_2}{d t}, \\ i = i_1 + i_2 + c \dfrac{d V}{d t}. \end{cases}$$

Beim Eliminiren von V, V_1 und V_2 ergiebt sich

$$(42)\quad \begin{cases} \frac{d^2 i_1}{d t^2} + 2 q_1 \frac{d i_1}{d t} + i_1 \left(\frac{1}{\lambda_1 c} + \frac{1}{\lambda_1 c_1} \right) + \frac{i_2}{\lambda_1 c} = \frac{i}{\lambda_1 c}, \\ \frac{d^2 i_2}{d t^2} + 2 q_2 \frac{d i_2}{d t} + i_2 \left(\frac{1}{\lambda_2 c} + \frac{1}{\lambda_2 C_2} \right) + \frac{i_1}{\lambda_2 c} = \frac{i}{\lambda_2 c}, \end{cases}$$

wo

$$q_1 = \frac{w_1}{2 \lambda_1} \quad \text{und} \quad q_2 = \frac{W_2}{2 \lambda_2}.$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichungen hängt von einer Hülfsgleichung vierten Grades ab, und es sollen daher nur einzelne Fälle behandelt werden.

Erster Fall. Die Selbstinduction des zum Funkenmikrometer führenden Drahtes ist sehr gross. Wir setzen die Beziehung

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\frac{1}{c} + \frac{1}{c_1}}{\frac{1}{c} + \frac{1}{C_2}} = \frac{q_2}{q_1} = m$$

voraus, wo demnach m eine sehr grosse Zahl ist. Wenn die erste Gleichung (42) mit m multiplicirt und dann die zweite davon subtrahirt wird, so ergiebt sich

$$\frac{d^2}{d t^2} (m i_1 - i_2) + \frac{m i_1 - i_2}{\lambda_2} \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{C_2} \right) = 0$$

und diese Gleichung liefert das Integral

$$m i_1 - i_2 = A \cos p t + B \sin p t,$$

wo

$$p = \pm i \sqrt{\frac{1}{\lambda_2} \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{C_2} \right)}.$$

Zur Zeit $t = 0$ hat man $i_1 = i_2 = 0$ und aus den Gleichungen (41) ergiebt sich dabei auch $d i_1 / d t = 0$ und $d i_2 / d t = 0$. Die Integrationsconstanten A und B sind damit beide Null, und demzufolge hat man einfach $m i_1 - i_2 = 0$ oder

$$\frac{i_2}{i_1} = m.$$

Je grösser m ist, d. h. je grösser die Selbstinduction des zum Funkenmikrometer führenden Zweiges ist, um so schwächer ist die Stärke des zum Funkenmikrometer führenden Stromes, und um so kleiner sind daher die Potentialschwingungen, die von diesem Strome erzeugt werden.

Dieses Verhalten wird von Hrn. Hemsalech bestätigt; statt einer Funkenstrecke benutzte er eine Geissler'sche Röhre (oder eine Funkenstrecke und die Röhre wurden nacheinander eingeschaltet). Der Zweig $c c_1$ bestand aus einer Inductionsspule. Ohne Eisenkern in die Spule leuchtete noch die Röhre. Wurde der Eisenkern in die Inductionsspule gebracht, so nahmen die Oscillationen allmählich ab und hörten zuletzt ganz auf.[1]) Die Übereinstimmung der dabei benutzten Anordnung mit unseren Annahmen ist ja unmittelbar ersichtlich.

Dieselbe Erscheinung wurde auch beobachtet, wenn statt des Inductoriums eine Wimshurstmaschine als Stromquelle verwendet wurde. Wie aus den Rechnungen hervorgeht ist ja die Erscheinung mit den elektrostatischen Funkenentladungen ganz ähnlich.[2]) In der That ist ja die Verzweigung ganz dieselbe wie bei den elektrostatischen Entladungen; der Saugkamm des Conductors der Holtz'schen Maschine wird hier von der Klemmenschraube im Verzweigungspunkte vertreten und statt des intermittirenden Zuflusses der Elektricität von den Spitzen des Saugkammes wird die Ladung hier von dem Strom des Inductors bewirkt.

Zweiter Fall. Es wird $q_1 = q_2$ vorausgesetzt, was z. B. eintrifft, wenn die Drähte $c c_1$ und $c C_2$ einander gleich sind. Die Gleichungen (42) werden nach vorherigem Multipliciren der ersteren mit x summirt, und man erhält dabei

$$\frac{d^2 U}{d t^2} + 2 q \frac{d U}{d t} + i_1 \left(\frac{x}{\lambda_1 c_1} + \frac{x}{\lambda_1 c} + \frac{1}{\lambda_2 c}\right) + i_2 \left(\frac{x}{\lambda_1 c} + \frac{1}{\lambda_2 c} + \frac{1}{\lambda_2 C_2}\right) = i \left(\frac{x}{\lambda_1 c} + \frac{1}{\lambda_2 c}\right),$$

wo $x i_1 + i_2$ mit U bezeichnet wird.

Wenn x den Bedingungen

$$(43) \qquad \begin{cases} \dfrac{x}{\lambda_1 c} + \dfrac{x}{\lambda_1 c_1} + \dfrac{1}{\lambda_2 c} = k x \\ \dfrac{x}{\lambda_1 c} + \dfrac{1}{\lambda_2 c} + \dfrac{1}{\lambda_2 C_2} = k \end{cases}$$

1) G. A. Hemsalech, Compt. rend. **130.** p. 898. 1900; Beibl. **24.** p. 827. 1900.

2) Vgl. K. R. Johnson, Ann. d. Phys. **3.** p. 461. 1900.

genügt, so nimmt die obige Differentialgleichung die Form

$$\frac{d^2 U}{d t^2} + 2 q \frac{d U}{d t} + k U = \frac{i}{c}\left(\frac{x}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right) \tag{44}$$

an. Aus den Bedingungsgleichungen (43) erhält man folgende Werte von x und k:

$$\left.\begin{aligned} \left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} &= \tfrac{1}{2}\left[1 + \frac{c}{c_1} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \frac{\lambda_1 c}{\lambda_2 C_2}\right] \\ &\quad \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\left[1 + \frac{c}{c_1} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \frac{\lambda_1 c}{\lambda_2 C_2}\right]^2 + \frac{4\lambda_1}{\lambda_2}}, \\ \left.\begin{matrix} k_1 \\ k_2 \end{matrix}\right\} &= \tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{\lambda_1 c} + \frac{1}{\lambda_1 c_1} + \frac{1}{\lambda_2 c} + \frac{1}{\lambda_2 C_2}\right] \\ &\quad \pm \frac{1}{2\lambda_1 c}\sqrt{\left[1 + \frac{c}{c_1} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \frac{\lambda_1 c}{\lambda_2 C_2}\right]^2 + \frac{4\lambda_1}{\lambda_2}}. \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Je nachdem man die Werte k_1 und x_1 oder k_2 und x_2 wählt, erhält man zwei verschiedene Lösungen der Differentialgleichung (44), und diese Lösungen hängen von den Wurzeln der Gleichungen

$$z^2 + 2 q z + k_1 = 0 \quad \text{und} \quad z^2 + 2 q z + k_2 = 0$$

ab.

k_1 und k_2 sind positive Grössen, deren Product

$$k_1 k_2 = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \cdot \left(\frac{1}{c c_1} + \frac{1}{c C_2} + \frac{1}{c_1 C_2}\right) \tag{45a}$$

ist. Die Wurzeln der ersten Hülfsgleichung sind immer complexe Zahlen $-q \pm p_1 i$; die der zweiten Hülfsgleichung $z^2 + 2 q z + k_2 = 0$ können sowohl complexe als reelle Zahlen sein, je nach dem Betrage der Grösse k_2. Bei der Behandlung der entsprechenden Gleichungen für die elektrostatischen Entladungen[1]) nahmen wir den Fall an, dass diese Wurzeln reell waren. Wegen der Leichtigkeit der Rechnung wollen wir dieselben hier als complexe Zahlen $-q \pm p_2 i$ behandeln. Aus der Gleichung (44) erhält man somit die Integrale:

$$\left\{\begin{aligned} U_1 &= x_1 i_1 + i_2 = \varepsilon^{-qt}(A_1 \cos p_1 t + B_1 \sin p_1 t) \\ &\quad + X_1 \varepsilon^{-\gamma t} + \varepsilon^{-\alpha t}(Y_1 \cos \beta t + Z_1 \sin \beta t), \\ U_2 &= x_1 i_1 + i_2 = \varepsilon^{-qt}(A_2 \cos p_2 t + B_2 \sin p_2 t) \\ &\quad + X_2 \varepsilon^{-\gamma t} + \varepsilon^{-\alpha t}(Y_2 \cos \beta t + Z_2 \sin \beta t), \end{aligned}\right. \tag{46}$$

1) l. c.

wo A_1, B_1, A_2 und B_2 Integrationsconstanten sind. Das Glied, welches die Constanten X_1, Y_1 und Z_1 (bez. X_2, Y_2 und Z_2) enthält, rührt vom rechten Gliede der Differentialgleichung her und diese Coefficienten sind daher von dieser Gleichung bestimmt. Ihre Werte sind wie folgt:

$$(46) \quad \begin{aligned} X &= \frac{M i_0}{L_2 c}\left(\frac{x}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right) \cdot \frac{1}{\gamma^2 - 2 q \gamma + k}, \\ Y &= -\frac{M i_0}{L_2 c}\left(\frac{x}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right) \frac{\alpha^2 - \beta^2 - 2 \alpha q + k}{(\alpha^2 - \beta^2 - 2 \alpha q + k)^2 + 4 \beta^2 (\alpha - q)^2}, \\ Z &= \frac{M i_0}{L_2 c}\left(\frac{x}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right) \frac{2 \beta (\alpha - q)}{(\alpha^2 - \beta^2 - 2 \alpha q + k)^2 + 4 \beta^2 (\alpha - q)^2}, \end{aligned}$$

wo die Indices 1 oder 2 den Grössen x und k beizulegen sind, je nachdem X_1, Y_1, Z_1 oder X_2, Y_2, Z_2 evaluirt werden sollen. Zur Zeit $t = 0$ sind sowohl i_1 als i_2 gleich Null und ebenso $d i_1 / d t$ und $d i_2 / d t$. Aus diesen Anfangsbedingungen ergiebt sich somit:

$$\begin{aligned} A_1 &= -(X_1 + Y_1), \qquad A_2 = -(X_2 + Y_2); \\ B_1 &= \frac{1}{p_1}\left[(\gamma - q) X_1 + (\alpha - q) Y_1 - \beta Z_1\right], \\ B_2 &= \frac{1}{p_2}\left[(\gamma - q) X_2 + (\alpha - q) Y_2 - \beta Z_2\right]. \end{aligned}$$

Es wurde oben angenommen, dass β sehr gross gegenüber α und β ist; ferner geht aus den Gleichungen (45) hervor, dass k_1 sehr gross gegenüber β^2 ist, und dass unter Umständen dasselbe auch von k_2 gilt. Dementsprechend können wir den Constanten folgende Annäherungswerte beilegen:

$$\begin{aligned} X_1 &= -Y_1 = \frac{M i_0}{L_2 c k_1}\left(\frac{x_1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right), \quad Z_1 = 0, \\ X_2 &= -Y_2 = \frac{M i_0}{L_2 c k_2}\left(\frac{x_2}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right), \quad Z_2 = 0, \\ A_1 &= 0, \quad B_1 = \frac{\gamma - \alpha}{p_1} \cdot \frac{M i_0}{L_2 c k_1}\left(\frac{x_1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right), \\ A_2 &= 0, \quad B_2 = \frac{\gamma - \alpha}{p_2} \cdot \frac{M i_0}{L_2 c k_2}\left(\frac{x_2}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right). \end{aligned}$$

Werden i_1 und i_2 in den Gleichungen (46) getrennt, so erhält man

$$(47) \quad \left\{ \begin{aligned} (x_1 - x_2) i_1 &= \varepsilon^{-q t}(B_1 \sin p_1 t - B_2 \sin p_2 t) \\ &\quad + (X_1 - X_2)(\varepsilon^{-\gamma t} - \varepsilon^{-\alpha t} \cos \beta t), \\ (x_1 - x_2) i_2 &= \varepsilon^{-q t}(-x_2 B_1 \sin p_1 t + x_1 B_2 \sin p_2 t) \\ &\quad + (-x_2 X_1 + x_1 X_2)(\varepsilon^{-\gamma t} - \varepsilon^{-\alpha t} \cos \beta t). \end{aligned} \right.$$

Werden die Coefficienten dieser Gleichungen mittels der Gleichungen (43) und (45) reducirt, und dabei $1/k\lambda_2 C_2$ neben 1 vernachlässigt, so ergiebt sich

$$(48)\quad \begin{cases} i_1 = \dfrac{\gamma-\alpha}{x_1-x_2}\cdot\dfrac{M i_0}{L_2}\cdot\varepsilon^{-qt}\left[\dfrac{\sin p_1 t}{p_1} - \dfrac{\sin p_2 t}{p_2}\right] \\ \quad + \dfrac{M i_0}{L_2}\cdot\dfrac{c_1}{c+c_1+C_2}\cdot(\varepsilon^{-\gamma t} - \varepsilon^{-\alpha t}\cos\beta t) \\ i_2 = \dfrac{\gamma-\alpha}{x_1-x_2}\cdot\dfrac{M i_0}{L_2}\cdot\varepsilon^{-qt}\left[-\dfrac{x_2\sin p_1 t}{p_1} + \dfrac{x_1 \sin p_2 t}{p_2}\right] \\ \quad + \dfrac{M i_0}{L_2}\cdot\dfrac{C_2}{c+c_1+C_2}\cdot(\varepsilon^{-\gamma t} - \varepsilon^{-\alpha t}\cos\beta t). \end{cases}$$

Die beiden Zweigströme enthalten jeder eine zu der Capacität an dem Ende des Zweiges proportionale Componente des secundären Hauptstromes, was auch vorauszusehen war. Der zum Funkenmikrometer führende Strom i_1 hat eine Intensität, die der Capacität des Condensators umgekehrt proportional ist, das rechte Glied der Gleichung (39 I) muss somit mit der Grösse $c + c_1 + C_2/c_1$ multiplicirt werden, wenn man die Entladungsbedingungen des verzweigten Stromkreises verwerten soll. Man kommt somit auch in diesem Falle bei den Beobachtungen in Tab. 7 und 8 zu ganz widersprechenden Resultaten, nämlich dass die Zeitabstände der elementaren Funken dem Quadrate der Capacität proportional sein sollen. Diese fehlerhafte Schlussfolgerung hängt, wie sich nachweisen lässt, von der Annahme her, dass die Funkenentladung von den Schwingungen des Hauptstromes bedingt sein sollte. Bilden wir von der Bedingungsgleichung

$$l_m = K \,.\, A_i \frac{\beta}{2\pi}\cdot(V - V_0),$$

die die maximale Funkenlänge (nach I) bestimmt, das Product $A_i\,.\,(\beta/2\pi)$ für die Schwingungen des Hauptstromes, die zum Funkenmikrometer gehen, so erhalten wir

$$A_i \frac{\beta}{2\pi} = \frac{M i_0}{L_2}\cdot\frac{c_1}{c+c_1+C_2}\cdot\frac{\beta}{2\pi}.$$

Bilden wir dasselbe Product für die Stromcomponente, deren Frequenz $p_1/2\pi$ ist, so ergiebt sich

$$(49)\quad \frac{\gamma-\alpha}{x_1-x_2}\cdot\frac{M i_0}{L_2}\cdot\frac{1}{p_1}\cdot\frac{p_1}{2\pi} = \frac{\gamma-\alpha}{x_1-x_2}\cdot\frac{M i_0}{2\pi L_2}$$

und wenn die Entladung von der Componente, deren Frequenz $\beta/2\pi$ ist, über die Componente p_1 walten soll, so ist die notwendige Bedingung dafür, dass das erste Product viel grösser als das zweite ist, oder

$$\frac{c_1}{c + c_1 + C_2} \cdot \beta > \frac{\alpha - \gamma}{x_1 - x_2}.$$

Zwar ist β gross gegenüber α und γ, aber dasselbe gilt auch von C_2 gegenüber c_2, und es lässt sich ohne Zahlenangaben nicht entscheiden, wann die obige Bedingung erfüllt ist. Bei dem von Hrn. Moll benutzten Inductorium waren die Constanten, wie früher angegeben wurde[1]),

$$\gamma = 52{,}6, \quad \alpha = 81{,}8 \quad \text{und} \quad \beta = \frac{2\pi}{0{,}000898}$$

und als Elektroden in der Funkenstrecke wurden Eisendrähte von 1,94 mm Durchmesser benutzt. Die zu erfüllende Bedingung wird somit zu

$$\frac{c_1}{C_2}(x_1 - x_2) > 0{,}00417$$

reducirt, und weil $x_1 - x_2$ annäherungsweise etwa $\sqrt{4 + (c^2/c_1^2)}$ ist, so ergiebt sich

$$\frac{\sqrt{c^2 + 4c_1^2}}{C_2} > 0{,}00417,$$

eine Bedingung[2]), der kaum bei dieser Anordnung genügt werden konnte.

Wir gelangen daher zu der Schlussfolgerung, dass die örtlichen Schwingungen, die bei der Verzweigung hervorgebracht werden, neben den Schwingungen des secundären Stromes eine hervorragende Rolle spielen. Wie in (49) dargestellt wurde, ist das Product aus der Amplitude und der Frequenz dieser örtlichen Schwingungen in den Zweigen fast vollständig unabhängig von der Capacität C_2 des primären Condensators, und die Capacität kann somit nur den Zufluss der Elektricität, welcher hauptsächlich von dem Gliede $\varepsilon^{-\gamma t}$ bewirkt wird, beeinflussen. Daraus ergiebt sich somit, dass die Zeitabstände

1) Vgl. K. R. Johnson, Ann. d. Phys. 3. p. 461—470. 1900.

2) In der That stellt sich die Bedingung noch ungünstiger, weil α aus dem Ohm'schen Widerstande des primären Kreises berechnet worden ist und demzufolge 81,8 ein allzu niedriger Wert von α ist.

der einzelnen Funken der Capacität C_2 proportional sein müssen, was durch die Beobachtungen wenigstens nicht widerlegt wird. Wenn die Beobachtungen diese Proportionalität nicht gut bestätigen, so ist dies eine ganz natürliche Folge, da die Anwesenheit von drei verschiedenen Oscillationen (oder nur wenigsten zwei) jedenfalls die Entladung sehr verwickelt macht. Aus dem Obigen ist es leicht einzusehen, dass die Potentialschwankungen, die von der secundären Spule des Inductors herrühren, neben den Oscillationen der Verzweigung keinen unmittelbaren Einfluss auf die Leitfähigkeit der Funkenstrecke ausüben, wodurch sie nur den Zufluss der Elektricität beeinflussen und somit die von Hrn. Moll beobachteten periodischen Schwankungen der Zeitabstände bei beginnender Entladung bewirken.

Die stille Entladung.

Wenn man bedenkt, dass die Frequenz der Schwingungen, die örtlich in der Verzweigung hervorgebracht werden

$$\left(\frac{p_1}{2\pi} = \frac{\sqrt{k_1}}{2\pi} \text{ und } \frac{p_2}{2\pi} = \frac{\sqrt{k_2}}{2\pi}\right)$$

von Selbstinductionscoefficienten, die Kupferdrähte von etwa 0,5 oder 1 m Länge besitzen, und von Capacitäten, die kleiner als die elektrostatische Einheit oder etwa 10^{-20} sind, herrühren, so ist leicht einzusehen, dass diese Schwingungen so schnell nacheinander folgen, dass, wenn von jeder Schwingung ein kleines Funkchen gebildet würde, diese Fünkchen eine dauernde continuirliche Lichtempfindung geben würden. Unter dieser Voraussetzung sollte man somit eine der stillen Entladung entsprechende Erscheinung haben. Obwohl es somit aus dem Obigen hervorgeht, dass die stille Entladung wesentlich aus einer Reihe schnell aufeinander folgender Fünkchen besteht, so steht jedoch nichts im Wege, dieselbe als eine continuirliche Erscheinung zu betrachten.

Zuerst soll die Beschreibung, die von Hrn. Moll im Anschluss der Tab. 7 und 8 gegeben wird, angeführt werden:

„Bei grösserem Betrage der Capacität ist die Entladungsart gewöhnlich die folgende: eine Reihe von elementaren Funken, mit gegen dem Ende zunehmenden Zeitabständen. *Bei Verkleinerung der Capacität nimmt die Zahl der einzelnen*

Funken zu. Anfangs sind sie sehr kräftig, werden aber bald abgeschwächt."

„*Wenn die Capacität noch mehr verkleinert wird, so wird die Entladung zum Teil continuirlich.* Weil das continuirliche Licht auf dem lichtempfindlichen Papiere nicht zu wirken vermochte, so erschien auf den photographischen Aufnahmen nur ein Abbrechen in der Funkenreihe".

„Die stille Entladung tritt nach einigen einzelnen Funken ein und eine grössere Anzahl von Funken folgen nach. Die Anfangs- und Endefunken sind oft sehr lichtschwach. Besonders gilt dies von dem letzten Anfangs- und dem ersten Endfunken. Es ist demzufolge manchmal schwierig zu entscheiden, wo die stille Entladung beginnt oder endet, und die Funkenzahlen in den Tab. 7 und 8 sind demzufolge nicht immer ganz sicher. Die Schwierigkeit, die Zahl der Funken zu berechnen, wird überdies von dem Naheliegen derselben vermehrt. Kräftig ist oft der erste Funke."

„*Bei abnehmender Capacität nimmt auch die Zahl der Anfangsfunken ab, und erreicht bald die Grenzzahl 1.* Für eine Fernstrecke von 2 mm nimmt dabei die Zahl der Endfunken ebenso ab, was jedoch nicht bei 1 mm Funkenlänge der Fall ist. Um dieses Verhalten zu untersuchen wurden einige Ocularbeobachtungen ausgeführt, und es ergab sich dabei, dass die Funkenzahl im allgemeinen sehr variabel war. Bei bedeutender Funkenlänge (z. B. 4,5 mm) wurde die Zahl offenbar mit der Capacität vermindert, und wenn der Condensator weggenommen wurde, erhielt ich keinen einzigen Endfunken. Bei kleiner Funkenlänge (0,7 mm) wurde die Zahl, obwohl zuerst abnehmend, jedoch zuletzt vergrössert, denn bei der Entfernung des Condensators wurde eine sehr beträchtliche Funkenzahl erhalten".

Die in Tab. 8 unter der horizontalen Linie angeführten Reihen, die unter dieselben Versuchsbedingungen wie die nächst obenstehenden ausgeführt worden sind, wurden an verschiedenen Tagen erhalten, und waren dabei Temperatur und Druck etwas abgeändert worden.

Wie aus dem Obigen hervorgeht, können die Funken nicht scharf bei der stillen Entladung getrennt werden; es liegt daher die Vermutung nahe, dass die Funken, die während

der stillen Entladung beobachtet worden sind, von einer Steigerung der Potentialdifferenz, die von den Schwingungen in der secundären Spule herrührt, oder vielleicht von einem Interferiren dieser Schwingungen mit den örtlichen Oscillationen in der Verzweigung abhängen. Da die Oscillationen unter Umständen drei verschiedene sein können, so kann dieses Verhalten wohl kaum berechnet werden.

Sieht man indessen von diesen Fünkchen ab, so kann man mit der stillen Entladung als einer continuirlichen Erscheinung rechnen, wenn man die einzelnen Fünkchen, aus welchen dieselbe wahrscheinlich besteht, durch eine continuirliche Strömung zwischen den Elektroden ersetzt und der Funkenreihe einen Widerstand ϱ beilegt. Setzt man voraus, dass die zur Entladung nötigen Schwingungen vorhanden sind und regelmässig verlaufen, so wird überdies nur eine bestimmte Potentialdifferenz nötig, die wenigstens während der ganzen Entladungsdauer unterhalten werden muss. Wenn die Potentialdifferenz des Condensators dieselbe ist, wie für die Elektroden angenommen wird, und für dieselbe die aus der Gleichung (36) abgekürzte Gleichung

$$E_2 = \frac{M i_0}{C_2 W_2} \cdot (1 - \varepsilon^{-\gamma t})$$

gilt, so wird während der Zeit dt eine Elektricitätsmenge

$$C_2 \, d E_2 = \frac{M i_0}{W_2} \cdot \gamma \, . \, \varepsilon^{-\gamma t} \, dt$$

dem Condensator und dem Funkenmikrometer zugeführt. Gleichzeitig wird von dem Funkenmikrometer die Menge

$$\frac{E_2}{\varrho} \, dt$$

durch die Strömung weggenommen, die statt der einzelnen kleinen Fünkchen in Rechnung gezogen wird. Der Bedingung

$$\left(\frac{M i_0}{W_2} \cdot \gamma \, . \, \varepsilon^{-\gamma t} - \frac{E_2}{\varrho} \right) dt \geqq 0 \tag{50}$$

muss somit während des Verlaufes der stillen Entladung genügt werden.

Es sei θ_0 die Zeit, zu welcher die stille Entladung beginnt, und E'_2 die dafür nötige Potentialdifferenz, so ergiebt sich somit

(51) $$E_2 = \frac{M i_0}{C_2 W_2}(1 - \varepsilon^{-\gamma\theta_0}).$$

Zwar braucht, wie aus den elektrostatischen Entladungen bekannt ist, der erste Funke eine etwas grössere Potentialdifferenz als die folgenden, und es scheint ebenso hier zu sein, denn die Entladung wird ja immer von einem schwachen Fünkchen eingeleitet; sieht man indessen davon ab, so gehören E_2' und θ_0 zusammen, wie in Gleichung (51) dargestellt wird. Ist ferner $\theta_0 + \theta$ die Zeit, zu welcher die stille Entladung abbricht, so erhält man aus der Gleichung (50)

$$\int\limits_{\theta_0}^{\theta}\left(\frac{M i_0}{W_2}\cdot\gamma\varepsilon^{-\gamma t} - \frac{E_2}{\varrho}\right)dt = \frac{M i_0}{W_2}\cdot\left[\left(\gamma + \frac{1}{C_2\varrho}\right)\frac{\varepsilon^{-\gamma\theta_0} - \varepsilon^{-\gamma(\theta+\theta_0)}}{\gamma} - \frac{\theta+0}{C_2\varrho}\right] = 0,$$

wenn man voraussetzt, dass die stille Entladung sofort aufhört, wenn die Potentialdifferenz unter E'_2 sinkt. Wird der Wert von $\varepsilon^{\gamma\theta_0}$ aus (51) in die obige Gleichung eingesetzt, so ergiebt sich

$$\left(\gamma + \frac{1}{C_2\varrho}\right)\left(1 - \frac{C_2 W_2 E_2'}{M i_0}\right)\left(\frac{1 - \varepsilon^{-\gamma\theta}}{\gamma}\right) - \frac{\theta}{C_2\varrho} = 0$$

oder annäherungsweise

$$\left(\gamma + \frac{1}{C_2\varrho}\right)\left(1 - \frac{C_2 W_2 E'_2}{M i_0}\right)\left(\theta - \frac{\gamma\theta^2}{2}\right) - \frac{\theta}{C_2\varrho} = 0.$$

Die Dauer der stillen Entladung ist somit

(52) $$\theta = \frac{2}{\gamma}\left(1 - \frac{1}{\left(1 + \gamma C_2\varrho\right)\left(1 - \frac{C_2 W_2}{M i_0}\cdot E'_2\right)}\right).$$

Um die Bedingung (50) zu erfüllen, muss die Differenz

$$1 - \frac{C_2 W_2}{M i_0}\cdot E'_2$$

stets eine positive Grösse sein, und wenn die Capacität C_2 hinlänglich gross genommen wird, so ist demzufolge eine stille

Entladung unmöglich. Wenn C_2 so variirt wird, dass die Bedingung (50) stets erfüllt wird, so erreicht θ einmal ein Maximum oder ein Minimum, je nachdem

$$\gamma C_2 \varrho - \frac{C_2 W_2}{M i_0} > \text{ oder } < 0 \text{ ist.}$$

Beim Variiren der Länge der Funkenstrecke ergiebt sich etwa dasselbe, denn ϱ und E'_2 nehmen alle beide mit der Funkenlänge zu.

(Eingegangen 6. November 1900.)

Nachtrag zur Correctur.

Aus der Gleichung (52), welche die Dauer der stillen Entladung θ enthält, lassen sich die zur Entladung nötige Potentialdifferenz und der Widerstand der Funkenstrecke berechnen. Die Constanten des Inductoriums sind aus den Messungen des Hrn. Holmberg bekannt[1]); die Dauer θ und die entsprechende Capacität C_2 sind in Tab. 8 angegeben worden. Bei einer Capacität von 23 elektrostatischen Einheiten oder $C_2 = (23/9).10^{-20}$ ist die Dauer der ganzen Entladung 0,02171 Sec., und die Dauer der stillen Entladung beträgt davon 76,7 Proc. oder $\theta = 0{,}01665$ Sec. Bei der Capacität $C_2 = (31/9).10^{-20}$ ist $\theta = 0{,}01289$ etc. Mittels dieser Angaben erhält man bei Einsetzen in (52) zwei Gleichungen, aus denen man

$$E_2' = 1964000 \text{ Volt,}$$
$$\varrho = 3126 \text{ Megohm}$$

erhält. Ferner ergiebt sich aus den Capacitäten 23 und 67

$$E_2' = 1860000 \text{ Volt,}$$
$$\varrho = 2040 \text{ Megohm;}$$

aus den Capacitäten 31 und 78,5

$$E_2' = 279000 \text{ Volt,}$$
$$\varrho = 309 \text{ Megohm.}$$

---

1) Vgl. Ann. d. Phys. 3. p. 443. 1900.

Diese berechneten Zahlen sind ja voneinander ganz verschieden; es muss auch selbstverständlich so sein, denn der Funkenstrom kann nicht aus identisch gleichen elementaren Fünkchen bestehen, und daher müssen Schwankungen entstehen, die nicht bei den einzelnen Fällen gleichmässig verlaufen können. Die berechneten Werte scheinen somit die obige Annahme zu bestätigen, dass die stille Entladung nicht aus einer continuirlichen Strömung besteht, sondern aus einer Reihe elementarer Fünkchen, die einander so nahe folgen, dass sie im rotirenden Spiegel nicht getrennt wahrgenommen werden können.

Im Anschluss des oben Gesagten will ich hier an eine Arbeit von Hrn. Arrhenius erinnern, welche zu ähnlichen Resultaten führt.[1]) Die dabei geleisteten Angaben beziehen sich zwar auf sehr niedrige Drucke — die Entladung wurde in einer Vacuumröhre mittels einer Influenzmaschine erzeugt und ein secundärer Strom lief von einer Batterie zwischen zwei in die Röhre eingeschmolzenen Platindrähten durch dieselbe —, jedoch liefern diese Beobachtungen hinsichtlich sowohl der Grössenordnung der Widerstände als ihrer schwankenden Werte mit den obigen Berechnungen sehr ähnliche Resultate. Die Stärke des Stromes (i) wurde dabei unmittelbar mit dem Galvanometer gemessen und die Spannung (e) ist die elektromotorische Kraft der Batterie. Nehmen wir nun den Quotienten e/i als ein Maass des Widerstandes an, so ergiebt sich:

1. Druck = 7,4 mm

$$e/i = \begin{cases} 33,\ 33,\ 31{,}7 \text{ Megohm;} \\ 2000 \qquad\qquad ,, \end{cases}$$

2. Druck = 4,4 mm

$$e/i = \begin{cases} 333,\ 571,\ 444 \text{ Megohm,} \\ 43,\ 49,\ 42,\ 21 \quad ,, \quad \text{etc.} \end{cases}$$

Die elektromotorische Kraft der Batterie betrug dabei höchstens 40 Volt, und der Funkenstrom wurde unabhängig von der Batterie durch die Influenzmaschine dargestellt. Der Widerstand der verdünnten Luft ist ebenso in diesem Falle sehr schwankend und von derselben Grössenordnung, wie die

1) S. Arrhenius, Wied. Ann. 32. p. 545. 1887.

aus den Moll'schen Beobachtungen berechneten Werte. Nur die Spannung weicht von unserem E_2' besonders ab, und es ist ja eine wohl bekannte Thatsache, dass Funkenentladungen in verdünnten Gasen bei sehr niedriger Spannung stattfinden.

Die oben berechneten Werte ϱ und E_2' können selbstverständlich keine Ansprüche der Genauigkeit erfüllen und ich hielt es deswegen anfangs nicht nötig, dieselben anzuführen. Wegen der eigentümlichen Schlussfolgerung, die von Hrn. Boynton hinsichtlich der Teslaspule erreicht worden ist[1]), nämlich dass eine Funkenstrecke im Hochfrequenzfelde einen Widerstand von 10—100 Ohm besitzen soll, darf wohl die hier geleistete Berechnung nützlich sein. Trowbridge und Richards[2]) geben einen Widerstand von 5—6 Ohm für eine Vacuumröhre an. Die experimentelle Grundlage dieser Anschauung haben die letzteren durch einen Stromkreis erzielt, der drei Unstetigkeitsstellen enthält, nämlich einen Wasserwiderstand, eine Vacuumröhre und eine Funkenstrecke, und die Beobachtungen sind nicht derart, dass sie eine Prüfung zugeben. Der Widerstand 10—100 Ohm wird von Hrn. Boynton zuerst mittels drei bedenklicher Annahmen erreicht, nämlich:

1. dass die zur Entladung nötige Potentialdifferenz bei dem Teslatransformator dieselbe wie bei den elektrostatischen Entladungen sein sollte;

2. dass der Strom der Secundärspule unvermindert durch die Funkenstrecke gehe, und

3. dass der Widerstand eines metallischen Leiters bei sehr hoher Frequenz nicht demselben Gesetz wie bei Wechselströmen folgt.

Wenn man so viele Annahmen braucht, um der Funkenstrecke eine besondere Leitfähigkeit zu erteilen, so scheint es wohl besser, diese hypothetische Leitfähigkeit fahren zu lassen.

1) W. P. Boynton, Phil. Mag. **46.** p. 312. 1898.
2) J. Trowbridge u. W. Richards, Phil. Mag. **43.** p. 349. 1897.

(Eingegangen 2. December 1900.)

9. *Ueber die Oberflächenspannung;*
von H. Hulshof.

Der Zweck dieser Abhandlung ist zu zeigen, dass man aus den Annahmen, worauf die Zustandsgleichung sich stützt, in der Supposition von continuirlicher Dichtigkeitsänderung in der capillaren Schicht, zum Schluss kommen kann, dass eine Oberflächenspannung existirt. Die Grösse dieser Oberflächenspannung wird für die Oberflächenenergie einen Wert liefern, welcher ganz derselbe ist als der von der thermodynamischen Theorie von J. D. van der Waals gefundene, nämlich die Molecularconstante σ.[1])

Wir wollen uns eine Flüssigkeit denken, über welcher sich gesättigter Dampf befindet. Die Oberflächenschicht sei horizontal, wiewohl wir äussere Kräfte wie zum Beispiel die Schwerkraft ausschliessen. Den Uebergang der Flüssigkeitsphase zu der Dampfphase nehmen wir continuirlich an. Die Voraussetzung von continuirlicher Dichtigkeitsänderung bringt mit sich, dass in der capillaren Schicht alle Dichtigkeiten zwischen der Dichtigkeit der Flüssigkeit und des gesättigten Dampfes anwesend sind. Doch darf man daraus nicht schliessen, dass die Zustände, durch die Isotherme vorgestellt, in der capillaren Schicht auftreten werden. Denn die Zustände, durch die verschiedenen Punkte der Isotherme vorgestellt, setzen bestimmt homogene Zerteilung der Materie voraus. Nur die Grössen, welche durch die Geschwindigkeit der molecularen Bewegung und durch die Dichte bestimmt sind, werden in der Uebergangsschicht denselben Wert haben als bei homogener Stoffzerteilung. Ebenso wie dies mit mit der Entropie der Fall ist (J. D. van der Waals), wird auch der thermische Druck (ϑ) nur abhängig sein von der Dichte (ϱ) und von der Temperatur (t).

1) J. D. van der Waals, Zeitschr. f. Physik. Chem. 13. p. 657 bis 725. 1894.

Der thermische Druck ist die Summe des Moleculardrucks und des äusseren Drucks (p). Wenn wir als Isotherme nehmen nicht die Linie $p = f_1 \ (v, t_1)$, sondern $\vartheta = f_2 \ (v, t_1)$, worin $v = 1/\varrho$, werden wir also sagen können, dass in diesem Falle die Zustände, vorgestellt durch die Punkte der Isotherme zwischen dem homogenen Flüssigkeits- und Dampfvolumen in der Uebergangsschicht anwesend sind.

Der Moleculardruck ist die directe Folge der Attraction der Teilchen und soll also in einem Punkte bestimmt werden aus dem Zustande der Umgebung. Wenn die moleculare Wirkung sich nur ausdehnt zu Entfernungen, welche so klein sind als gewöhnlich angenommen wird, lässt sich dies sofort erklären; aber auch wenn die Attractionssphäre grösser sein sollte, lässt sich eine moleculare Wirkung denken, welche diese Voraussetzung rechtfertigt. Man definire den Moleculardruck pro Flächenelement $d\,o$ als *die Kraft, mit der aller Stoff, an der einen Seite der platten Fläche, worin $d\,o$ liegt, die stoffliche Säule, welche $d\,o$ zur Grundfläche hat, an der anderen Seite der Fläche liegend und senkrecht darauf ruhend, anzieht in der Richtung senkrecht auf dieser Fläche.*

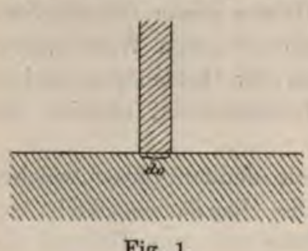


Fig. 1.

In homogenen Phasen liefert diese Definition des Moleculardrucks vollkommen den gleichen Wert als die Definition, welche denselben an den Grenzen berechnet. Wenn die Stoffzerteilung nicht homogen ist, wird der Moleculardruck in verschiedenen Richtungen verschiedene Werte haben. *Der Thatsache, dass in der Uebergangsschicht der Moleculardruck in der Richtung des Flüssigkeitsspiegels einen anderen Wert haben wird als in der Richtung senkrecht auf dem Flüssigkeitsspiegel, wird das Vorhandensein der Oberflächenspannung zugeschrieben werden müssen.*

Zur Berechnung der Grösse des Moleculardrucks werden wir die moleculare Structur ausser Acht lassen und uns den Stoff continuirlich über den von demselben eingenommenen Raum verteilt denken. Wir folgen dabei vorläufig den Weg, den in der thermodynamischen Theorie van der Waals betritt zur

Berechnung der potentiellen Energie. Wir bestimmen zuerst die Attraction, welche eine flache Schicht mit einer Dicke du und mit einer constanten Dichte ϱ ausüben wird auf die Masseneinheit, in einer Entfernung u von dieser Schicht. Wir schneiden zu dem Ende aus der flachen Schicht einen Ring und zwar so, dass der Mittelpunkt dieses Ringes zusammenfällt mit dem Fusspunkt der Senkrechte, aus dem Punkte, wo die Masseneinheit concentrirt ist, auf die flache Schicht niedergelassen. Der Radius dieses Ringes sei t und der Inhalt $2\pi t\,dt\,du$, dann wird der Component der Attraction in der Richtung senkrecht auf der flachen Schicht sein

$$\varrho\, 2\pi t\,dt\,du \frac{u}{r}\, \Phi(r),$$

wenn ϱ die constante Dichtigkeit in der Schicht, r die Entfernung unserer Masseneinheit von den Teilen des Ringes und $\Phi(r)$ die Kraft ist, mit welcher zwei Masseneinheiten in einer Entfernung r sich anziehen.

Durch die ganze Schicht wird also eine Attraction ausgeübt:

$$\varrho \int_{t=o}^{t=\infty} 2\pi t\,dt\,du \frac{u}{r}\, \Phi(r).$$

Bei Integration nach t, während u constant bleibt, gilt, da $r^2 = u^2 + t^2$, dass $2r\,dr = 2t\,dt$ und die Attraction kann deshalb auch dargestellt werden durch

$$\varrho \int_{r=u}^{r=\infty} 2\pi u\,du\, \Phi(r)\,dr.$$

Wir setzen $d\zeta(r) = -\Phi(r)\,dr$, und nehmen hierbei an, dass $\zeta(\infty) = o$, und also geht unser Ausdruck für die Attraction über in

$$\varrho\, 2\pi u\, \zeta(u)\, du.$$

Wir setzen nun $2\pi u\,\zeta(u)\,du = -d\psi(u)$, sodass

$$\psi(u) = \int_u^\infty 2\pi u\,\zeta(u)\,du,$$

worin wieder für Werte von u, grösser als die Wirkungssphäre $\psi(u)$ sowohl als $\zeta(u)$ Null wird.

Die Attraction durch die ganze flache Schicht, mit der Dicke du, ausgeübt auf die Masseneinheit in der Richtung senkrecht auf der Schicht wird deshalb

$$-\varrho\, d\, \psi(u).$$

Hieraus geht hervor, dass $\psi(u)$ vorstellt die normale Componente der Attraction, ausgeübt auf die Masseneinheit durch alle Schichten, welche weiter als u von dieser Einheit entfernt sind, wenn in allen Schichten die Dichtigkeit die Dichtigkeitseinheit ist.

Denken wir uns jetzt eine, durch eine platte Fläche begrenzte, Flüssigkeitsmasse, deren Dichte ϱ überall, also auch in der Grenzschicht, constant ist, und berechnen wir jetzt die Kraft, mit welcher eine unendlich dünne Säule zur Dicke do, die wir senkrecht auf der Oberfläche mit dem Flüssigkeitsspiegel zur abgrenzenden Fläche aus der Flüssigkeitsmasse herausgeschnitten denken, nach innen gezogen wird. Wir nehmen aus dieser Säule ein Stück, zur Dicke du, in einer Entfernung u von der Oberfläche. Diese Masse $\varrho\, d o\, d u$ erleidet nur als Resultante der verschiedenen Anziehungen eine Attraction senkrecht auf der Oberfläche infolge der Anwesenheit der Schichten, welche weiter als $2u$ von dem Flüssigkeitsspiegel entfernt sind. Die Kraft, womit dieser Teil der Säule nach innen gezogen wird, ist mithin

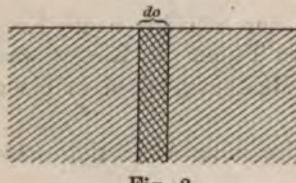


Fig. 2.

$$\varrho^2\, d o\, \psi(u)\, d u$$

und die Kraft, womit die ganze Säule nach innen gezogen wird, ist

$$d o\, \varrho^2 \int_0^\infty \psi(u)\, d u.$$ [1]

---

1) Dieses bestimmte Integral

$$\int_0^\infty \psi(u)\, d u$$

ist die Grösse K von Laplace für eine Dichtigkeit gleich der Einheit.

Wenn wir nun aber die Säule nicht nehmen in der Flüssigkeitsmasse, sondern ruhend senkrecht auf dem Flüssigkeitsspiegel (Fig. 1), dann werden wir für die Attraction, welche die Säule von der Flüssigkeit erleiden würde, einen Wert finden, ebenso gross als wenn die Säule aus der Flüssigkeit herausgeschnitten wäre. Schneiden wir doch in einer Entfernung u, über dem Flüssigkeitsspiegel, zur Dicke du, ein Stück aus dieser Säule, mit einer Masse $\varrho\, d o\, d u$, dann wird dieser Teil der Säule eine Attraction

$$\varrho^2 d o\, \psi(u)\, d u$$

erleiden und die ganze Säule also eine Attraction

$$\varrho^2 d o \int_0^\infty \psi(u)\, d u.$$

In homogenen Phasen werden die beiden Definitionen des Moleculardrucks also für die Grösse desselben denselben Wert liefern.

Wir nehmen an, dass der Uebergang des gesättigten Dampfzustandes zum flüssigen Zustande continuirlich sei. Wir nehmen eine flache horizontale Grenzschicht und beabsichtigen, in einem Punkte der capillaren Schicht den Moleculardruck zu bestimmen und zwar in zwei Richtungen:

1. *in der Richtung senkrecht auf der Oberfläche der Flüssigkeit,*
2. *in der Richtung der Flüssigkeitsoberfläche.*

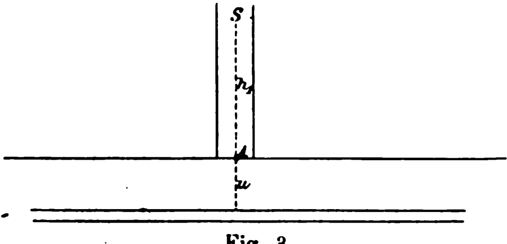


Fig. 3.

a) Bei der Bestimmung des Moleculardruckes in A in der Richtung senkrecht zur Oberfläche denken wir uns eine Fläche durch A, parallel mit der Oberfläche; ferner in A eine Säule, von der Dicke $d o$, senkrecht auf der durch A gehenden Fläche. Der Moleculardruck, den wir suchen, ist also für die Fläche $d o$

die Kraft, womit alle Flüssigkeitsteilchen unter A, die Säule, in soweit dieselbe auf der durch A gehenden Fläche ruht, anziehen in der Richtung senkrecht auf dieser Fläche. Die Kraft, mit welcher die Schicht von der Dicke du, parallel mit der Grenzfläche, in einer Entfernung u unter A, die Masseneinheit in S, welche h_1 Centimeter über A gelegen ist, anzieht, ist:

$$-\,d\psi(u+h_1),$$

in der Voraussetzung, dass die betrachtete Schicht die Einheit der Dichtigkeit hat.

Die Dichtigkeit in einer Schicht parallel mit der Oberfläche der Flüssigkeit ist überall die nämliche. Wir geben also die Dichtigkeit in einem Punkte als eine Function der Entfernung dieses Punktes zu der durch A gebrachten Fläche. Nennen wir die Normale h und rechnen wir die positive Seite, gerichtet nach der Seite der Dampfphase, so wird die Dichtigkeit in der betrachteten Schicht zur Dicke du sein:

$$\varrho - u\frac{d\varrho}{dh} + \frac{u^2}{1\,.\,2}\frac{d^2\varrho}{dh^2} - \text{etc.},$$

worin ϱ, $d\varrho/dh$, $d^2\varrho/dh^2$ die Werte haben, welche diese Grössen im Punkte A haben. Die weiteren Glieder werden wir vernachlässigen.

Für alle Schichten unter der Fläche durch A wird also die Attraction sein:

$$\int\limits_{u=o}^{u=\infty} -\left(\varrho - u\frac{d\varrho}{dh} + \frac{u^2}{1\,.\,2}\frac{d^2\varrho}{dh^2}\right) d\psi(u+h_1)\,.$$

Denken wir uns nun in S nicht die Masseneinheit, sondern nehmen wir hier ein Volumenelement zur Dicke dh_1 und der Einfachheit wegen mit einem Durchschnitt von 1 cm², statt des Durchschnittes do, so kann, da die Dichtigkeit in diesem Volumenelement

$$\varrho + \frac{d\varrho}{dh}h_1 + \frac{d^2\varrho}{dh^2}\frac{h_1^2}{1\,.\,2} + \text{etc.}$$

ist, die zu berechnende Attraction dargestellt werden durch:

$$\int_0^\infty \left(\varrho + h_1 \frac{d\varrho}{dh} + \frac{h_1^2}{1.2}\frac{d^2\varrho}{dh^2}\right) dh_1 \int_{u=o}^{u=\infty} - \left(\varrho - u\frac{d\varrho}{dh}\right.$$

$$\left. + \frac{u^2}{1.2}\frac{d^2\varrho}{dh^2}\right) d\psi(u+h_1).$$

$$\int_{u=o}^{u=\infty} - \varrho\, d\psi(u+h_1) = \varrho\,\psi(h_1).$$

$$\int_{u=o}^{u=\infty} u\frac{d\varrho}{dh}\, d\psi(u+h_1) = \left[u\frac{d\varrho}{dh}\psi(u+h_1)\right]_0^\infty$$

$$- \frac{d\varrho}{dh}\int_{u=o}^{u=\infty}\psi(u+h_1)\,du.$$

Das integrirte Glied ist für beide Grenzen Null; für $u = 0$, da der Factor u alsdann Null ist; für $u = \infty$ ist $\psi(u+h_1) = 0$.

$$\int_{u=o}^{u=\infty} - \frac{u^2}{1.2}\frac{d^2\varrho}{dh^2}\, d\psi(u+h_1) = \left[-\frac{u^2}{1.2}\frac{d^2\varrho}{dh^2}\psi(u+h_1)\right]_{u=o}^{u=\infty}$$

$$+ \frac{d^2\varrho}{dh^2}\int_{u=o}^{u=\infty}\psi(u+h_1)\,u\,du.$$

Das integrirte Glied ist abermals Null für beide Grenzen. Das Integral wird also

$$\int_0^\infty \Big(\underset{(1)}{\varrho} + \underset{(2)}{h_1\frac{d\varrho}{dh}} + \underset{(3)}{\frac{h_1^2}{1.2}\frac{d^2\varrho}{dh^2}}\Big) dh_1 \Big[\underset{(1')}{\varrho\,\psi(h_1)} - \underset{(2')}{\frac{d\varrho}{dh}\int_{u=o}^{u=\infty}\psi(u+h_1)\,du}$$

$$+ \underset{(3')}{\frac{d^2\varrho}{dh^2}\int_{u=o}^{u=\infty}\psi(u+h_1)\,u\,du}\Big].$$

(1) (1′) $$\int_0^\infty \varrho\, dh_1\, \varrho\,\psi(h_1) = \varrho^2\int_0^\infty \psi(h_1)\,dh_1 = a\,\varrho^2.$$

$$(1)\ (2') \quad \begin{cases} -\int\limits_0^\infty \varrho\, d h_1 \frac{d\varrho}{dh} \int\limits_{u=o}^{u=\infty} \psi(u+h_1)\, du \\ = -\varrho \frac{d\varrho}{dh} \int\limits_0^\infty d h_1 \int\limits_{u=o}^{u=\infty} \psi(u+h_1)\, du. \end{cases}$$

Wir nehmen $\psi(x)\, dx = -d\pi(x)$, indem wir voraussetz dürfen, dass $\pi(\infty)$ gleich Null, ebenso wie $\psi(\infty) = 0$ ist.

Der letzte Ausdruck wird

$$\varrho \frac{d\varrho}{dh} \int\limits_0^\infty d h_1 \int\limits_{u=o}^{u=\infty} d\pi(u+h_1) = \varrho \frac{d\varrho}{dh} \int\limits_0^\infty d h_1 \Big[\pi(u+h_1)\Big]_{u=o}^{u=\infty}$$

$$= -\varrho \frac{d\varrho}{dh} \int\limits_0^\infty \pi(h_1)\, d h_1 = -\varrho \frac{d\varrho}{dh} \Big[h_1\, \pi(h_1)\Big]_0^\infty$$

$$+ \varrho \frac{d\varrho}{dh} \int\limits_0^\infty h_1\, d\pi(h_1).$$

Das integrirte Glied ist für beide Grenzen Null; für $h_1 =$ da der Factor h_1 alsdann Null ist; für $h_1 = \infty$ ist $\pi(h_1) =$ Der letzte Ausdruck wird also

$$-\varrho \frac{d\varrho}{dh} \int\limits_0^\infty h_1\, \psi(h_1)\, d h_1.$$

$$(1)\ (3') \quad \begin{cases} \int\limits_0^\infty \varrho\, d h_1 \frac{d^2\varrho}{dh^2} \int\limits_{u=o}^{u=\infty} \psi(u+h_1)\, u\, du \\ = -\varrho \frac{d^2\varrho}{dh^2} \int\limits_0^\infty d h_1 \int\limits_{u=o}^{u=\infty} u\, d\pi(u+h_1) \\ = -\varrho \frac{d^2\varrho}{dh^2} \int\limits_0^\infty d h_1 \Big[u\, \pi(u+h_1)\Big]_{u=o}^{u=\infty} \\ + \varrho \frac{d^2\varrho}{dh^2} \int\limits_0^\infty d h_1 \int\limits_{u=o}^{u=\infty} \pi(u+h_1)\, du. \end{cases}$$

Das integrirte Glied ist für beide Grenzen Null.

Wir nehmen $\pi(x)\,dx = -\,d\chi(x)$, indem wir die Annahme machen, dass $\chi(\infty) = 0$.

Der letzte Ausdruck wird also

$$-\,\varrho\,\frac{d^2\varrho}{dh^2}\int_0^\infty dh_1 \int_{u=o}^{u=\infty} d\chi(u+h_1)$$

$$= -\,\varrho\,\frac{d^2\varrho}{dh^2}\int_0^\infty dh_1 \Big[\chi(u+h_1)\Big]_{u=o}^{u=\infty}.$$

$\chi(u+h_1)$ ist gleich Null für $u=\infty$ und $\chi(h_1)$ für $u=0$, also wird der Ausdruck

$$+\,\varrho\,\frac{d^2\varrho}{dh^2}\int_0^\infty \chi(h_1)\,dh_1 = \Big[\varrho\,\frac{d^2\varrho}{dh^2}\,h_1\,\chi(h_1)\Big]_0^\infty$$

$$+\,\varrho\,\frac{d^2\varrho}{dh^2}\int_0^\infty h_1\,\pi(h_1)\,dh_1\,.$$

Das integrirte Glied ist für beide Grenzen Null, also wird der letzte Ausdruck

$$\varrho\,\frac{d^2\varrho}{dh^2}\int_0^\infty \pi(h_1)\,d\,\frac{h_1^2}{2} = \varrho\,\frac{d^2\varrho}{dh^2}\Big[\pi(h_1)\,\frac{h_1^2}{2}\Big]_0^\infty$$

$$+\,\varrho\,\frac{d^2\varrho}{dh^2}\int_0^\infty \frac{h_1^2}{2}\,\psi(h_1)\,dh_1\,.$$

Das integrirte Glied ist für beide Grenzen Null und der Ausdruck wird

$$\varrho\,\frac{d^2\varrho}{dh^2}\int_0^\infty \frac{h_1^2}{2}\,\psi(h_1)\,dh_1\,.$$

(2) (1′) $$\int_0^\infty h_1\,\frac{d\varrho}{dh}\,\varrho\,\psi(h_1)\,dh_1 = \varrho\,\frac{d\varrho}{dh}\int_0^\infty h_1\,\psi(h_1)\,dh_1\,.$$

$$(2)\ (2')\quad \begin{cases} -\int\limits_0^\infty h_1 \frac{d\varrho}{dh}\, dh_1 \int\limits_{u=o}^{u=\infty} \frac{d\varrho}{dh}\, \psi(u+h_1)\, du \\ = -\left(\frac{d\varrho}{dh}\right)^2 \int\limits_0^\infty h_1\, dh_1 \int\limits_{u=o}^{u=\infty} \psi(u+h_1)\, du \\ = \left(\frac{d\varrho}{dh}\right)^2 \int\limits_0^\infty h_1\, dh_1 \int\limits_{u=o}^{u=\infty} d\pi(u+h_1) \\ = \left(\frac{d\varrho}{dh}\right)^2 \int\limits_0^\infty h_1\, dh_1 \Big[\pi(u+h_1)\Big]_{u=o}^{u=\infty} \\ = -\left(\frac{d\varrho}{dh}\right)^2 \int\limits_0^\infty \pi(h_1)\, h_1\, dh_1 = -\left(\frac{d\varrho}{dh}\right)^2 \int\limits_0^\infty \pi(h_1)\, d\frac{h_1^2}{2} \\ = -\left(\frac{d\varrho}{dh}\right)^2 \left[\pi(h_1)\frac{h_1^2}{2}\right]_0^\infty - \left(\frac{d\varrho}{dh}\right)^2 \int\limits_0^\infty \frac{h_1^2}{2}\, \psi(h_1)\, dh_1 \end{cases}$$

Das integrirte Glied ist für beide Grenzen Null und Ausdruck wird

$$-\left(\frac{d\varrho}{dh}\right)^2 \int\limits_0^\infty \frac{h_1^2}{2}\, \psi(h_1)\, dh_1 .$$

$$(2)\ (3')\quad \begin{cases} \int\limits_0^\infty h_1 \frac{d\varrho}{dh}\, dh_1 \int\limits_{u=o}^{u=\infty} \frac{d^2\varrho}{dh^2}\, \psi(u+h_1)\, u\, du \\ = \frac{d\varrho}{dh}\,\frac{d^2\varrho}{dh^2} \int\limits_0^\infty h_1\, dh_1 \int\limits_{u=o}^{u=\infty} \psi(u+h_1)\, u\, du. \end{cases}$$

Dieser Ausdruck ist von der Dimension

$$\int\limits_0^\infty h_1^3\, \psi(h_1)\, dh_1$$

und wird von uns vernachlässigt werden.

$$(3)\ (1') \qquad \int_0^\infty \frac{h_1^2}{1.2}\frac{d^2\varrho}{dh^2}\,dh_1\,\varrho\,\psi(h_1) = \varrho\frac{d^2\varrho}{dh^2}\int_0^\infty \frac{h_1^2}{2}\,\psi(h_1)\,dh_1 .$$

$$(3)\ (2') \qquad \left|\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^\infty -\frac{h_1^2}{1.2}\frac{d^2\varrho}{dh^2}\,dh_1\frac{d\varrho}{dh}\int_{u=0}^{u=\infty}\psi(u+h_1)\,du \\ \displaystyle = \frac{d\varrho}{dh}\frac{d^2\varrho}{dh^2}\int_0^\infty \frac{h_1^2}{2}\,dh_1\int_0^\infty \psi(u+h_1)\,dh_1 . \end{array}\right.$$

Dieser Ausdruck ist ebenfalls wie (3) (3') von einer solchen Dimension, dass wir ihn vernachlässigen können.

Für den Moleculardruck in der Richtung senkrecht zur Oberfläche finden wir also

$$a\varrho^2 - \varrho\frac{d\varrho}{dh}\int_0^\infty h_1\,\psi(h_1)\,dh_1 + \varrho\frac{d^2\varrho}{dh^2}\int_0^\infty \frac{h_1^2}{2}\,\psi(h_1)\,dh_1$$

$$+ \varrho\frac{d\varrho}{dh}\int_0^\infty h_1\,\psi(h_1)\,dh_1 - \left(\frac{d\varrho}{dh}\right)^2\int_0^\infty \frac{h_1^2}{2}\,\psi(h_1)\,dh_1$$

$$+ \varrho\frac{d^2\varrho}{dh^2}\int \frac{h_1^2}{2}\,\psi(h_1)\,dh_1 ,$$

oder

$$a\varrho^2 + \varrho\frac{d^2\varrho}{dh^2}\int_0^\infty h_1^2\,\psi(h_1)\,dh_1 - \left(\frac{d\varrho}{dh}\right)^2\int_0^\infty \frac{h_1^2}{2}\,\psi(h_1)\,dh_1 .$$

Die Glieder, die sich gegenseitig aufheben, sind die, welche das Zeichen ändern, wenn wir die Richtung, in welcher wir h rechnen, umkehren.

Wir setzen

$$\int_0^\infty h_1\,\psi(h_1)\,dh_1 = c_1 \quad \text{und} \quad \int_0^\infty h_1^2\,\psi(h_1)\,dh_1 = c_2 .$$

Für den Wert des Moleculardruckes in der Richtung senkrecht zur Oberfläche finden wir also

$$a\varrho^2 + c_2\,\varrho\,\frac{d^2\varrho}{dh^2} - \frac{c_2}{2}\left(\frac{d\varrho}{dh}\right)^2 .$$

Vermehren wir diesen Moleculardruck mit dem äusseren Druck p_1, dann dürfen wir die Summe gleichstellen mit $p + a\varrho^2$, wenn p den Druck darstellt, der zu einem Zustande in homogener Phase der Dichtigkeit ϱ gehört.

$$p_1 + a\varrho^2 + c_2\varrho\frac{d^2\varrho}{dh^2} - \frac{c_2}{2}\left(\frac{d\varrho}{dh}\right)^2 = p + a\varrho^2.$$

$$p_1 - p = -c_2\varrho\frac{d^2\varrho}{dh^2} + \frac{c_2}{2}\left(\frac{d\varrho}{dh}\right)^2.$$

Dieses Verhältnis ist dasselbe, welches van der Waals in seiner „Thermodynamischen Theorie der Capillarität" abgeleitet hat.

b) Berechnen wir jetzt den Moleculardruck in demselben Punkte A, aber in der Richtung des Flüssigkeitsspiegels. Wir denken uns zu dem Ende eine Fläche PQ durch A, senkrecht zur Oberfläche. In A denken wir uns senkrecht zu dieser

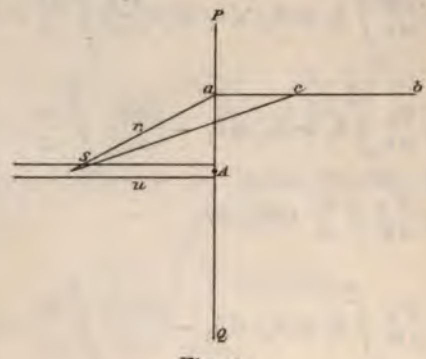


Fig. 4.

Fläche eine Säule von der Dicke $d o'$. Die Kraft, womit diese Säule angezogen wird in der Richtung senkrecht zur Fläche von allem Stoff, der an der anderen Seite der Fläche liegt, ist der zu berechnende Moleculardruck. Der Stoff in der Säule hat überall dieselbe Dichte.

Die Masseneinheit in S wirkt auf die Masseneinheit in c mit einer Kraft $\Phi(r)$, wenn r die Entfernung Sc vorstellt. Die Componente dieser Kraft in der Richtung senkrecht auf PQ ist $\Phi(r)\cos cSA$ oder, wenn wir die Richtung ab z nennen, $\Phi(r)(dr/dz)$. Die materielle Linie ab, der Dicke do, mit einer Dichtigkeit, welche überall dieselbe, und zwar die

Dichtigkeitseinheit ist, wirkt also mit einer Kraft, von der die Componente in der Richtung senkrecht auf PQ ist

$$d\,o\int\limits_{r=r_1}^{r=\infty}\Phi(r)\frac{d\,r}{d\,z}\,d\,z = d\,o\int\limits_{r_1}^{\infty}\Phi(r)\,d\,r = d\,o\,\zeta(r_1),$$

wobei wir wieder annehmen, dass $d\,\zeta(r) = -\,\Phi(r)\,d\,r$.

Denken wir uns jetzt in der Fläche PQ ein Polarcoordinatensystem mit A als Ursprung und einer Linie senkrecht auf der Zeichnungsfläche als feste Axe. Ein Flächenelement stellen wir vor durch $y\,d\,y\,d\,\varphi$. Die Dichte in A sei ϱ, dann ist in einem willkürlichen Punkte dieser Fläche die Dichte

$$\varrho + \frac{d\,\varrho}{d\,h}\,y\sin\varphi + \tfrac{1}{2}\frac{d^2\varrho}{d\,h^2}\,y^2\sin^2\varphi \text{ etc.}$$

Das Glied $(d\,\varrho/d\,h)\,y\sin\varphi$ macht, dass in einem Punkte in der Fläche PQ über A ebensoviel Stoff weniger anwesend ist als in A, als in einem anderen Punkte in der Fläche PQ ebenso tief unter A mehr ist als in A.

Wären also die Glieder

$$\varrho - \frac{d\,\varrho}{d\,h}\,y\sin\varphi$$

allein da, so würde die Attraction, welche der Stoff rechts von PQ ausübte auf die Masseneinheit in S, in der Richtung senkrecht auf PQ dieselbe sein, als bei gleichmässiger Dichte und also sein

$$\varrho\,\psi(u).$$

Dazu kommt jetzt

$$\int\limits_{y=0}^{y=\infty}\int\limits_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\tfrac{1}{2}\,\zeta(r)\frac{d^2\varrho}{d\,h^2}\,y^2\sin^2\varphi\,y\,d\,y\,d\,\varphi,$$

$$\int\limits_0^{\pi}\sin^2\varphi\,d\,\varphi = \frac{\pi}{2},$$

also wird der Ausdruck

$$\tfrac{1}{2}\frac{d^2\varrho}{d\,h^2}\int\limits_{y=0}^{y=\infty}\zeta(r)\,\pi\,y^3\,d\,y.$$

Wir wissen, dass $r^2 = y^2 + u^2$ und also $r\,d\,r = y\,d\,y$, sodass das Integral übergeht in

$$\frac{1}{4}\frac{d^2\varrho}{dh^2}\int\limits_{r=u}^{r=\infty} 2\pi\,\zeta(r)(r^2-u^2)\,r\,dr = -\frac{1}{4}\frac{d^2\varrho}{dh^2}\int\limits_{r=u}^{r=\infty}(r^2-u^2)\,d\,\psi(r)$$

$$= -\left[\frac{1}{4}\frac{d^2\varrho}{dh^2}(r^2-u^2)\,\psi(r)\right]_u^\infty + \frac{1}{2}\frac{d^2\varrho}{dh^2}\int\limits_u^\infty \psi(r)\,r\,dr\,.$$

Das integrirte Glied ist für beide Grenzen Null.

Wir finden also als Componente der Attraction in der Richtung senkrecht auf PQ

$$\varrho\,\psi(u) + \frac{1}{2}\frac{d^2\varrho}{dh^2}\int\limits_u^\infty \psi(r)\,r\,dr$$

und für die Attraction der ganzen Säule

$$do'\int\limits_0^\infty \varrho\,du\left[\varrho\,\psi(u) + \frac{1}{2}\frac{d^2\varrho}{dh^2}\int\limits_u^\infty \psi(r)\,r\,dr\right] = do'\,\varrho^2\int\limits_0^\infty \psi(u)\,du$$

$$-\,do'\,\frac{1}{2}\,\varrho\,\frac{d^2\varrho}{dh^2}\int\limits_0^\infty du\int\limits_u^\infty r\,d\pi(r)\,.$$

Dieses letzte Glied wird

$$-\,do'\,\frac{1}{2}\,\varrho\,\frac{d^2\varrho}{dh^2}\int\limits_0^\infty du\Big[r\,\pi(r)\Big]_u^\infty + do'\,\frac{1}{2}\,\varrho\,\frac{d^2\varrho}{dh^2}\int\limits_0^\infty du\int\limits_u^\infty \pi(r)\,dr$$

$$= do'\,\frac{1}{2}\,\varrho\,\frac{d^2\varrho}{dh^2}\int\limits_0^\infty u\,\pi(u)\,du - do'\,\frac{1}{2}\,\varrho\,\frac{d^2\varrho}{dh^2}\int\limits_0^\infty du\int\limits_u^\infty d\chi(r)$$

$$= do'\,\frac{1}{2}\,\varrho\,\frac{d^2\varrho}{dh^2}\int\limits_0^\infty u\,\pi(u)\,du - do'\,\frac{1}{2}\,\varrho\,\frac{d^2\varrho}{dh^2}\int\limits_0^\infty du\Big[\chi(u)\Big]_u^\infty$$

$$= do'\,\frac{1}{2}\,\varrho\,\frac{d^2\varrho}{dh^2}\int\limits_0^\infty u\,\pi(u)\,du + do'\,\frac{1}{2}\,\varrho\,\frac{d^2\varrho}{dh^2}\int\limits_0^\infty \chi(u)\,du$$

$$= do'\,\frac{1}{2}\,\varrho\,\frac{d^2\varrho}{dh^2}\int\limits_0^\infty u\,\pi(u)\,du + do'\,\frac{1}{2}\,\varrho\,\frac{d^2\varrho}{dh^2}\Big[u\,\chi(u)\Big]_0^\infty$$

$$+\,do'\,\frac{1}{2}\,\varrho\,\frac{d^2\varrho}{dh^2}\int\limits_0^\infty u\,\pi(u)\,du\,.$$

Das integrirte Glied ist für beide Grenzen Null, also geht unser Ausdruck über in

$$d o' \varrho \frac{d^2 \varrho}{d h^2} \int_0^\infty u \pi(u) d u = d o' \varrho \frac{d^2 \varrho}{d h^2} \int_0^\infty \tfrac{1}{2} \pi(u) d u^2$$

$$= d o' \varrho \frac{d^2 \varrho}{d h^2} \left[\tfrac{1}{2} \pi(u) u^2\right]_0^\infty + \tfrac{1}{2} d o' \varrho \frac{d^2 \varrho}{d h^2} \int_0^\infty u^2 \psi(u) d u.$$

Das erste Glied ist für beide Grenzen Null und demnach wird die Attraction, ausgeübt auf die ganze Säule,

$$d o' \left\{\varrho^2 \int_0^\infty \psi(u) d u + \tfrac{1}{2} \varrho \frac{d^2 \varrho}{d h^2} \int_0^\infty u^2 \psi(u) d u\right\},$$

wofür wir also setzen dürfen

$$d o' \left\{a \varrho^2 + \frac{c_2}{2} \varrho \frac{d^2 \varrho}{d h^2}\right\}.$$

Der Moleculardruck im Punkte A in der Richtung senkrecht auf der capillaren Schicht ist also

$$a \varrho^2 + \frac{c^2}{2} \varrho \frac{d^2 \varrho}{d h^2}.$$

Wir finden folglich für die Grösse des Moleculardruckes in einem Punkte der Uebergangsschicht, wo die Dichte ϱ ist:

a) In der Richtung senkrecht auf der capillaren Schicht

$$a \varrho^2 + c_2 \varrho \frac{d^2 \varrho}{d h^2} - \frac{c_2}{2} \left(\frac{d \varrho}{d h}\right)^2.$$

b) In der Richtung der capillaren Schicht

$$a \varrho^2 + \frac{c_2}{2} \varrho \frac{d^2 \varrho}{d h^2}.$$

Wir kommen also zum Schlusse, *dass in der capillaren Schicht der Moleculardruck infolge der Attraction, welche die Teilchen aufeinander ausüben, in verschiedener Richtung einen verschiedenen Wert hat.* In dieser Thatsache muss die Erklärung

der Existenz der Oberflächenspannung gesucht werden. *Die Folge der Attraction wird also sein, dass in der Richtung des Flüssigkeitsspiegels die Oberfläche der Flüssigkeit sich zu verkleinern streben wird mit einer Kraft, entsprechend der Differenz des Moleculardruckes in der Richtung der capillaren Schicht und in der Richtung senkrecht darauf, also*

$$\frac{c_2}{2}\varrho\frac{d^2\varrho}{dh^2} - c_2\varrho\frac{d^2\varrho}{dh^2} + \frac{c_2}{2}\left(\frac{d\varrho}{dh}\right)^2 = -\frac{c_2}{2}\varrho\frac{d^2\varrho}{dh^2} + \frac{c_2}{2}\left(\frac{d\varrho}{dh}\right)^2.$$

Die Kraft, welche die Oberfläche zu verkleinern sucht, *dieser moleculare Ueberdruck in der Richtuug der Grenzschicht*, wird gerechnet pro Flächeneinheit, sodass wir für die Oberflächenspannung finden:

$$\int\left\{-\frac{c_2}{2}\varrho\frac{d^2\varrho}{dh^2} + \frac{c_2}{2}\left(\frac{d\varrho}{dh}\right)^2\right\}dh,$$

welches Integral über die ganze Dicke der capillaren Schicht genommen werden soll.

Wenn wir auf die moleculare Structur und den Bewegungszustand der Teilchen achten, können wir uns die Existenz der Oberflächenspannung auch in anderer Weise vorstellen. Die kinetische Gastheorie fordert ja, dass die durchschnittliche kinetische Energie der progressiven Bewegung der Teilchen bei gleicher Temperatur constant ist und dass keine bevorzugte Richtung für die Bewegung besteht. Die Zustandsgleichung giebt uns das Verhältnis

$$\vartheta = \frac{Rt}{v-b}.$$

In einem Punkte der Uebergangsschicht wird ϑ (der thermische Druck, die Summe des Moleculardruckes und des äusseren Druckes) einen Wert haben, welcher in allen Richtungen derselbe ist, was nicht für den Moleculardruck gilt und also auch nicht für dasjenige, was wir als äusseren Druck rechnen müssen. *Demnach wird die Attraction der Teilchen und der Bewegungszustand, worin sie sich befinden, zur Folge haben, dass in der capillaren Schicht ein solcher Zustand eintritt, dass dasjenige, was wir als Druck rechnen müssen, in verschiedenen Richtungen verschieden ist.* Nennen wir den Druck

in der Richtung senkrecht auf dem Flüssigkeitsspiegel p_1, den in der Richtung parallel mit dem Flüssigkeitsspiegel p_2, dann wird gelten müssen

$$p_1 + a\varrho^2 + c_2\varrho\frac{d^2\varrho}{dh^2} - \frac{c_2}{2}\varrho\left(\frac{d\varrho}{dh}\right)^2 = p_2 + a\varrho^2 + \frac{c_2}{2}\varrho\frac{d^2\varrho}{dh^2},$$

oder

$$p_1 - p_2 = -\frac{c_2}{2}\varrho\frac{d^2\varrho}{dh^2} + \frac{c_2}{2}\left(\frac{d\varrho}{dh}\right)^2.$$

Zur Berechnung der Oberflächenspannung denke man sich senkrecht auf der capillaren Schicht eine platte Fläche, mit einer Dimension von 1 cm in der Richtung des Flüssigkeitsspiegels, mit einer Höhe, der Dicke der capillaren Schicht entsprechend. Die Druckdifferenz $p_1 - p_2$, integrirt über diese Fläche, wird den Wert der Oberflächenspannung geben. Die Arbeit, welche dazu nötig ist, die Oberfläche um 1 cm² zu vergrössern, kann durch den nämlichen Ausdruck dargestellt werden:

$$\sigma = \int\left\{-\frac{c_2}{2}\varrho\frac{d^2\varrho}{dh^2} + \frac{c_2}{2}\left(\frac{d\varrho}{dh}\right)^2\right\}dh.$$

Die beiden Glieder dieses Integrales haben denselben Wert:[1])

$$\frac{c_2}{2}\int\left(\frac{d\varrho}{dh}\right)^2 dh = \frac{c_2}{2}\int\frac{d\varrho}{dh}d\varrho = \frac{c_2}{2}\left[\varrho\frac{d\varrho}{dh}\right]_{vl}^{d} - \frac{c_2}{2}\int\varrho\frac{d^2\varrho}{dh^2}dh.$$

Das integrirte Glied ist Null, da das Integral über die ganze Dicke der capillaren Schicht ausgedehnt werden muss, und $d\varrho/dh$ ebensowohl in der Flüssigkeits- als in der Dampfphase Null ist.

Deshalb

$$\sigma = -c_2\int\varrho\frac{d^2\varrho}{dh^2}dh$$

oder

$$\sigma = c_2\int\left(\frac{d\varrho}{dh}\right)^2 dh.$$

Wir kommen also zur Folgerung, dass wirklich in der capillaren Schicht eine Spannung existirt, welche die Oberfläche zu verkleinern suchen wird, da die zweite Form, unter welcher wir den Ausdruck für σ gebracht haben, positiv ist.

---

1) van der Waals, Zeitschr. f. Phys. Chem. **13.** 1894.

Diese Spannung herrscht ausschliesslich in der Uebergangsschicht und wird bei unveränderter Temperatur einen constanten Wert haben. Zu der Grösse dieser Spannung liefern die verschiedenen Schichten ganz verschiedene Beiträge. Wir können den Wert desjenigen, was wir als Druck in der Richtung senkrecht auf der Oberfläche und in der Richtung der capillaren Schicht zu betrachten haben, als Functionen von $1/\varrho$, hinsichtlich der theoretischen und empirischen Isothermen, durch eine graphische Darstellung leicht annähernd darstellen.

p_1 bedeutet den Druck in der Richtung senkrecht auf der capillaren Schicht, den Druck des gesättigten Dampfes; p_2 den Druck in der Richtung der capillaren Schicht; p den Druck, welcher zu einer homogenen Phase der Dichte ϱ gehört.

$$p_1 = \text{const.},$$

$$p = \frac{RT}{\frac{1}{\varrho} - b} - a\varrho^2.$$

Wir wissen, dass

$$p_1 + a\varrho^2 + c_2\varrho\frac{d^2\varrho}{dh^2} - \frac{c_2}{2}\left(\frac{d\varrho}{dh}\right)^2 = p_2 + a\varrho^2$$

$$+ \frac{c_2}{2}\varrho\frac{d^2\varrho}{dh^2} = p + a\varrho^2.$$

Die Supposition eines continuirlichen Ueberganges des Dampfes zur Flüssigkeit schliesst in sich, dass $d^2\varrho/dh^2$ an der Flüssigkeitsphase einen negativen, an der Dampfphase einen positiven Wert hat. Da, wo $d^2\varrho/dh^2$ einen Wert gleich Null hat, ist $d\varrho/dh$ maximal. Wo

$$p_2 = f\left(\frac{1}{\varrho}\right)$$

die theoretische Isotherme schneidet, ist

$$\frac{d^2\varrho}{dh^2} = 0.$$

Für das, zu diesem Schnittpunkt gehörende ϱ, wird also gelten

$$p_1 - p_2 = \frac{c_2}{2}\left(\frac{d\varrho}{dh}\right)^2,$$

woraus hervorgeht, dass der Schnittpunkt mehr nach der Seite der grösseren Densitäten liegt als der Schnittpunkt der theoretischen und empirischen Isothermen. Da

$$p_2 - p = -\frac{c_2}{2}\varrho\frac{d^2\varrho}{dh^2},$$

so geht hervor, dass an der Seite der grösseren Densitäten die Linie

$$p_2 = f\left(\frac{1}{\varrho}\right)$$

oberhalb und an der Seite der kleineren Densitäten unterhalb der theoretischen Isotherme liegt, sodass, in Hinsicht auf den Schnittpunkt der empirischen und theoretischen Isothermen, der Schnittpunkt der Linie

$$p_2 = f\left(\frac{1}{\varrho}\right)$$

mit den empirischen Isothermen an der Seite der kleineren Densitäten liegt. Dieser letzte Schnittpunkt bildet die Grenze zwischen den Densitäten, welche die Oberflächenspannung vergrössern und verkleinern. *Die grösseren Densitäten liefern nämlich positive Beiträge und die kleineren Densitäten negative Beiträge für die Oberflächenspannung.* In den Schichten der kleineren Densitäten müssen wir den Druck in der Richtung der capillaren Schicht als grösser, in den Schichten mit grösserer Dichte als kleiner wie den Druck p_1 betrachten. *Dasjenige also, was als ausgedehnte Flüssigkeit betrachtet werden kann, wird die Oberflächenspannung vergrössern, was als zusammengepresster Dampf betrachtet werden muss, wird sie verkleinern.*[1])

Denken wir uns ein Flüssigkeitshäutchen, das wir ausrecken wollen. Um die Oberfläche des Häutchens mit der Oberflächeneinheit zu vergrössern, haben wir eine Arbeit zu verrichten

$$\int (p_1 - p_2)\, dh.$$

Wenn wir von einer Flüssigkeit die Oberfläche vergrössern, ziehen wir dabei keine Teilchen in die capillare Schicht. Nach

---

1) Das nämliche schliesst van der Waals für die Oberflächenenergie.

unserer Auffassung vom Wesen der Wärme kann dies nicht der Fall sein, sondern wird der Bewegungszustand, worin die Molecüle sich befinden, verursachen, dass sie sofort die Plätze, welche ihnen eingeräumt werden, einnehmen, während sie weiter die Vergrösserung der Oberfläche unterstützen werden, indem sie in der Richtung der Ausdehnung einen Druck

$$\int p_2\, dh$$

ausüben.

Wir können dasjenige, was geschieht, bei der Vergrösserung der Oberfläche, z. B. beim Ausrecken eines Häutchens, das wir eine constante Temperatur behalten lassen, vergleichen mit demjenigen, was geschieht, wenn wir eine Flüssigkeit, über welcher sich gesättigter Dampf befindet, in eine Umgebung bringen, von der die Spannung grösser ist als die Spannung des gesättigten Dampfes. Denken wir uns in einem cylinderförmigen Fass, das geschlossen ist mittels eines Saugers ohne Gewicht und ohne Reibung, eine Flüssigkeit, über welcher sich Dampf befindet. Die Temperatur wird durch die Umgebung, deren Druck immer derselbe ist und grösser als der des gesättigten Dampfes, constant gehalten. Der gesättigte Dampf wird zu seiner Flüssigkeit verdichtet werden, es wäre denn, dass wir den Sauger festhielten. Die Haut der Flüssigkeit wird sich zusammenziehen, es sei denn, dass wir dieses verhinderten. Heben wir den Sauger, so haben wir eine Arbeit zu verrichten, entsprechend dem Producte der Druckdifferenz der Umgebung und des gesättigten Dampfes und der Volumenvergrösserung des cylinderförmigen Raumes; die Flüssigkeit wird zum Teil verdunsten auf Kosten von der Wärme der Umgebung; der Druck des gesättigten Dampfes wird mitwirken zur Volumenvergrösserung des Cylinders. So haben wir auch beim Ausrecken eines Häutchens eine Arbeit zu verrichten, entsprechend dem Producte der Druckdifferenz des gesättigten Dampfes und was wir in den verschiedenen Punkten der capillaren Schicht in der Richtung der Grenzschicht (d. h. in der Richtung der Ausreckung) als Druck in Rechnung bringen müssen und des Raumes in der Richtung des Ausreckens durchlaufen; das Fluidum wird zum Teile zu anderen Densitäten übergeben auf Kosten der Wärme der Umgebung. Was wir als Druck in der Richtung der capillaren Schicht

zu betrachten haben, wird zur Ausreckung mitwirken (dieser Druck kann natürlich auch negative Werte haben) gleichfalls auf Kosten der Wärme der Umgebung. *Wir haben in beiden Fällen eine bestimmte Quantität mechanischer Arbeit zu verrichten, welche für das Zustandekommen der Zustandsveränderungen unerlässlich ist. Durch Wärmezufuhr allein können wir diese Zustandsänderungen nicht zustande bringen.*

Die besondere Energie, welche wir durch Wärmezufuhr in diesem Falle nicht haben geben können, ist die Arbeit, welche wir beim Ausrecken des Häutchens verrichtet haben. *Diese Arbeit hat einen Wert, welcher vom Verlauf der Zustandsänderungen in der capillaren Schicht nicht abhängt.* Es ist nun leicht ersichtlich, weshalb wir diese Energie durch Wärmezufuhr allein nicht geben können *und dass diese Energie dem Betrag entsprechen muss, womit das thermodynamische Potential in der Uebergangsschicht*

$$\varepsilon - \tau_1 \eta + p_1 v,$$

berechnet über eine Säule, mit einem Durchschnitt von 1 cm², und mit einer Höhe von der Dicke der capillaren Schicht, das thermodynamische Potential der gleich grossen homogenen Massen der Flüssigkeits- oder Dampfphase übertrifft.[1])

So hat also die Weise, in welcher wir den Moleculardruck definirt haben, uns in den Stand gesetzt, mit Hülfe der Zustandsgleichung von van der Waals zu zeigen:

a) dass wirklich eine Oberflächenspannung besteht,

b) dass die Grösse der Oberflächenspannung zu einem Wert für die capillare Energie führt, welcher vollkommen derselbe ist als der, welchen die thermodynamische Theorie dafür angiebt. Dieses gilt auch ausserhalb der Grenzen, welche wir uns gesetzt haben, wenn wir also die Ausdrücke

$$\int_0^\infty \psi(u)\, u^3\, du, \quad \int_0^\infty \psi(u)\, u^4\, du \text{ etc.}$$

nicht vernachlässigt hätten,

c) dass die Grösse der Oberflächenspannung nicht abhängt von den Zustandsänderungen, welche in der capillaren Schicht eintreten können, sodass bei isothermischen Verän-

1) H. Hulshof. Inaugural-Dissertation.

derungen der Oberfläche also die Beschwerden, welche von der Thermodynamik gegen die Oberflächenspannungstheorie gewöhnlich angeführt werden, verschwinden können.

Der Hauptinhalt des hier Mitgeteilten wurde schon namens des Verfassers von Prof. van der Waals für den Bericht der gewöhnlichen Versammlung der naturphilosophischen Abteilung der Koninkl. Akad. van Wetensch. zu Amsterdam am 29. Jan. 1900 angeboten und darin aufgenommen. Diese Erwähnung erachte ich hier für erwünscht, da eine geraume Zeit nachher Mitteilungen über diesen Gegenstand gemacht worden sind von einem Autor, der meine Mitteilung an die Koninkl. Akad. van Wetensch. nicht erwähnt hat.

Delft, October 1900.

(Eingegangen 30. October 1900.)

10. *Ueber das numerische Verhältnis der beiden Elasticitätsconstanten isotroper Medien nach der molecularen Theorie;* *von W. Voigt.*

1. Es ist bekannt, dass in Bezug auf das numerische Verhältnis der beiden Elasticitätsconstanten isotroper Medien die ältere Moleculartheorie der Elasticität in einen anscheinend unlösbaren Widerspruch mit der Erfahrung geriet, der ihre zeitweilige Verdrängung durch eine Theorie der „Nahewirkungen“ zur Folge hatte. Wenn nun auch diese letztere Theorie zu Formeln geführt hat, die sich nach jeder Richtung bewährt haben, so war es doch im Interesse der Ausarbeitung unserer molecularen Vorstellungen nötig, den Grund aufzusuchen, aus dem die ältere Theorie zu falschen Resultaten geführt hat.

Diese Untersuchung[1]) ergab in Bezug auf *krystallinische* Körper das durchaus plausible Resultat, dass es eine ungerechtfertigte Specialisirung der Moleculartheorie involvire, die Molecularkräfte als nur von der Entfernung abhängig anzunehmen, und dass jeder Widerspruch mit der Erfahrung verschwindet, wenn man die Wechselwirkungen zwischen zwei Molecülen in einer den Symmetrieverhältnissen des Krystalles entsprechenden Weise mit der Richtung variiren lässt.

Die Anwendung dieser erweiterten Vorstellung auf *isotrope* Medien ergiebt dagegen kein anderes Resultat als die ältere Theorie, *solange man diese Körper wirklich molecular-isotrop*, d. h. ihre letzten Elementarteilchen in allen möglichen Orientirungen einander angelagert denkt.[2]) Bei dieser Constitution berechnen sich nämlich die elastischen Druckkräfte ebenso, als wenn die Molecularkräfte nur Functionen der Entfernungen wären, und es resultirt jenes bekannte Formelsystem

$$(1)\qquad \begin{cases} -X_x = c\,x_x + c_1\,y_y + c_1\,z_z, \ldots \\ -Y_z = \tfrac{1}{2}(c - c_1)\,y_z, \ldots \end{cases}$$

1) W. Voigt, Gött. Abhandl. 34. p. 1. 1887.

2) W. Voigt, l. c. p. 47; Wied. Ann 38. p. 573. 1881.

mit dem Verhältnis der beiden Elasticitätsconstanten $c = 3\,c_1$, welches durch die Beobachtung nicht bestätigt wird.

Die Schwierigkeit verschwindet, wenn man die betreffenden Körper als *aus Krystallfragmenten von allen möglichen Orientirungen aufgebaut*, sie, wie ich sage, als *quasi-isotrop* ansehen darf. Hier lässt sich im Idealfall völlig dichter Verwachsung der Krystallindividuen jede der beiden Elasticitätsconstanten des Körpers selbst, im gegenteiligen Falle mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit wenigstens deren Verhältnis aus den Elasticitätsconstanten des homogenen Krystalles berechnen, und es ergiebt sich das letztere von Substanz zu Substanz variirend, wie dies auch die Beobachtung zeigt.

Aber es ist doch unzweifelhaft, dass nicht alle isotropen Körper nur *quasi*-isotrop sind; ist bei *festen* Körpern der Aufbau aus Krystallelementen immerhin stets denkbar, so würde eine solche Auffassung der tropfbaren Flüssigkeiten auf anderen Gebieten, als dem der Elasticität, zu unlösbaren Widersprüchen führen — von den Gasen gar nicht zu reden. *Die Heranziehung der Quasiisotropie, die in äusserst vielen Fällen, insbesondere bei den dichten Gesteinen und den Metallen als gestattet, ja gefordert erscheint, beseitigt die Schwierigkeit der molecularen Elasticitätstheorie hiernach doch nicht allseitig.*

Ich werde im Folgenden zeigen, auf welche Weise der noch übrig gebliebene Rest vonSchwierigkeit sich anscheinend erledigen lässt.

2. Wir gehen aus von den bekannten Definitionen der elastischen Druckcomponenten gegen ein Flächenelement ω innerhalb eines elastischen Körpers. Errichtet man über ω einen geraden Cylinder nach der Seite hin, nach welcher man seine Normale n als *positiv* rechnet, bezeichnet man ein im Innern des Cylinders liegendes Molecül mit i, ein jenseits der Ebene von ω liegendes mit a, die Componenten der Elementarwirkung von (a) auf (i) mit X_{ia}, Y_{ia}, Z_{ia}, dann sind die Componenten des Druckes gegen ω bez.

$$(2)\quad X_n = \frac{1}{\omega}\sum_{(i)}\sum_{(a)} X_{ia}, \quad Y_n = \frac{1}{\omega}\sum_{(i)}\sum_{(a)} Y_{ia}, \quad Z_n = \frac{1}{\omega}\sum_{(i)}\sum_{(a)} Z_{ia},$$

die Summen über alle Molecüle der Gattungen (i) und (a) erstreckt. Wegen der verschwindenden Wirkungsweite der

Molecularkräfte geben zu diesen Summen nur die ω unmittelbar anliegenden Molecüle merkliche Beiträge.

Bei Krystallen formt man diese Summen weiter um unter Benutzung der Annahme, dass ein jedes Molecül in *gleicher* Weise von anderen umgeben wäre. Eine solche Annahme ist bei isotropen Medien nicht zulässig; um die für die Isotropie charakteristische *mittlere* Gleichwertigkeit aller von einem Molecül ausgehenden Richtungen zu erhalten, müssen vielmehr die *einzelnen* Molecüle in *verschiedener* Weise umgeben sein; eine Anordnung, welche *für jedes einzelne Molecül* der Anforderung der Isotropie entspräche, existirt nicht.

Wenn nun aber auch im allgemeinen jedes Molecül dem anderen ungleichwertig ist, so fordert die Voraussetzung der Homogenität doch, dass in Bereichen, die erheblich kleiner sind, als die Sphäre merklicher molecularer Wirkung, die mittlere Verteilung der Molecüle die *gleiche* ist. So wollen wir annehmen, dass, wenn man den Raum zu beiden Seiten der Fläche ω in Schichten von einer sehr kleinen Dicke δ zerlegt, jede dieser Schichten über einer Grundfläche ω die gleiche Anzahl von Molecülen enthält.

Auf Grund dieser Festsetzung können wir dann folgendermaassen weitergehen. Die Doppelsummen in (2) lassen sich zusammenfassen zu einfachen Summen aller der Componenten, welche die Schichten innerhalb des Cylinders von den Schichten jenseits ω erfahren; da aber gleichwertige Schichtenpaare mit dem normalen Abstand n in der Zahl n/δ vorhanden sind, so lässt sich auch schreiben:

$$(3)\quad X_n = -\frac{1}{\omega\,\delta}\sum n\,\Xi,\quad Y_n = -\frac{1}{\omega\,\delta}\sum n\,\mathrm{H},\quad Z_n = -\frac{1}{\omega\,\delta}\sum n\,\mathrm{Z},$$

wobei Ξ, H, Z als die Gesamtcomponenten aufgefasst werden können, die eine der Fläche ω unmittelbar anliegende Schicht (J) von der einer negativen Coordinate n entsprechenden Schicht (A) erfährt.

Enthält die Volumeneinheit im Mittel v Molecüle, so befinden sich deren $v' = v\,\omega\,\delta$ in der betrachteten Schicht (J). Setzen wir also $\Xi = v\,\omega\,\delta\,.\,X$, $\mathrm{H} = v\,\omega\,\delta\,.\,Y$, $\mathrm{Z} = v\,\omega\,\delta\,.\,Z$, so sind X, Y, Z die Anteile, die von der Wirkung der Schicht

bei gleichmässiger Verteilung auf das einzelne Molecül entfallen.

Diese Componenten lassen sich folgendermaassen veranschaulichen. Man denke sich *eines* der Molecüle (i) in (J) mit *dem System* der Molecüle (a) in (A) in ihrer relativen Lage fest verbunden und verlege das Ganze derartig parallel mit sich, sodass das Molecül (i) inden Schwerpunkt von ω fällt; man erfülle dann die Schicht (A) in gleicher Weise, wie zuvor, mit Molecülen (a), verbinde sie mit einem zweiten Molecül in (J) und transportire das System ebenso wie das erste, und verfahre in derselben Weise mit sämtlichen Molecülen von (J).

So hat man jetzt im Schwerpunkt von ω eine Anzahl von ν' Molecülen und in einer Schicht im Abstand n eine Verteilung (A') von Molecülen in der ν'-fachen Dichte, wie zuvor. Die Componenten, die im Mittel *eines* der Molecüle (i) im Schwerpunkt von ω seitens dieses ganzen Systems (A') erfährt, sind mit Ξ, H, Z identisch; X, Y, Z sind somit die Componenten, die jenes Molecül von der Schicht (A') erfährt, *wenn man jedes dort befindliche Molecül durch seinen* ν'^{ten} *Teil ersetzt.* Die so erhaltene Verteilung in (A') möge als die *mittlere* (a') bezeichnet werden.

Ersetzt man schliesslich Ξ, H, Z in (3) durch ihre Werte $\nu' X$, $\nu' Y$, ν, Z, so resultirt

$$(4) \qquad X_n = -\nu \sum n X, \quad Y_n = -\nu \sum n Y, \quad Z_n = -\nu \sum n Z,$$

und dabei sind die Summen zu nehmen über alle Wirkungen, die das mittlere Molecülsystem (a') auf der negativen Seite von ω ausübt auf das eine Molecül im Schwerpunkt von ω, welches wir weiterhin mit (o) bezeichnen.

Da wegen der Gleichheit von Actio und Reactio

$$X_n = -X_{-n}, \quad Y_n = -Y_{-n}, \quad Z_n = -Z_{-n}$$

ist, so sind die in (4) enthaltenen Summen denen gleich, die sich über den Halbraum auf der *positiven* Seite von ω erstrecken; hieraus folgt, dass man auch schreiben kann

$$(5) \quad X_n = -\tfrac{1}{2} \nu \mathfrak{S}\, n X, \quad Y_n = -\tfrac{1}{2} \nu \mathfrak{S}\, n Y, \quad Z_n = -\tfrac{1}{2} \nu \mathfrak{S}\, n Z,$$

wo sich nun die Summen auf die Wirkung der mittleren Verteilung in der *gesamten* Umgebung des betrachteten Molecüles (o) beziehen.

Da die mittlere Verteilung der Gleichwertigkeit aller Richtungen entsprechen soll, so werden bei ihr die Molecüle voraussichtlich Kugelflächen um das Molecül (o) als Centrum nahezu gleichförmig erfüllen. Dass hierbei eine etwaige Abhängigkeit der Elementarwirkung von der gegenseitigen Orientirung der Molecüle nicht zur Geltung kommen kann, ist schon oben gesagt; wir wollen von dergleichen hier überhaupt absehen.

3. Für das Weitere wollen wir die relativen Coordinaten der (mittleren) Molecüle (a'), über welche die Summe S erstreckt ist, gegen das betrachtete Molecül (o) durch x', y', z', ihre relativen Verschiebungen mit u', v', w' bezeichnen, während x, y, z und u, v, w Coordinaten und Verschiebungen von (o) selbst bezeichnen. Man erhält dann die Druckcomponenten $X_x, \dots Z_z$ gegen die Coordinatenebenen, indem man n successive mit x', y', z' vertauscht.

Die Berechnung dieser Grössen geschieht nun bei der älteren, wie bei der neueren molecularen Theorie auf Grund der Beziehungen für die relativen Verschiebungen

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} u' &= \frac{\partial u}{\partial x} x' + \frac{\partial u}{\partial y} y' + \frac{\partial u}{\partial z} z', \\ v' &= \frac{\partial v}{\partial x} x' + \frac{\partial v}{\partial y} y' + \frac{\partial v}{\partial z} z', \\ w' &= \frac{\partial w}{\partial x} x' + \frac{\partial w}{\partial y} y' + \frac{\partial w}{\partial z} z', \end{aligned} \right.$$

oder wegen der Wirkungslosigkeit einer reinen Drehung elastisch auch der damit äquivalenten

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} u' &= x_x x' + \tfrac{1}{2} x_y y' + \tfrac{1}{2} x_z z', \\ v' &= \tfrac{1}{2} y_x x' + y_y y' + \tfrac{1}{2} y_z z', \\ w' &= \tfrac{1}{2} z_x x' + \tfrac{1}{2} z_y y' + z_z z', \end{aligned} \right.$$

wobei $x_x, \dots x_y$ die Deformationsgrössen bezeichnen.

Diese Formeln bilden auch die Grundlage der Nahewirkungstheorie der Elasticität. Aber während sie bei dieser

als Ausdruck der Stetigkeit der Verrückungen innerhalb des Körpers der dort benutzten dynamischen Auffassung der Materie durchaus entspricht, enthält sie bei der Moleculartheorie eine ganz wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit, nämlich die Annahme, *dass sich innerhalb des Bereiches der molecularen Wirkungssphäre die einzelnen Molecüle bei der Deformation des Körpers ebenso verhalten wie Punkte eines continuirlichen Mediums, das, neben gewissen Translationen und Drehungen als Ganzes, eine gleichförmige Dilatation nach drei zu einander normalen Richtungen erleidet.*

Diese Annahme ist offenbar erfüllt bei einem *Krystall*, der bei der Deformation das Raumgitter seiner Molecüle dem Charakter nach nicht ändert; *sie ist aber jedenfalls nicht selbstverständlich bei isotropen Medien.*

Körper, in Bezug auf welche die Richtigkeit dieser Behauptung sofort einleuchtet, sind ideale *Flüssigkeiten.* Die unendlich leichte Verschiebbarkeit von deren Molecülen bringt nämlich nach jeder Deformation immer wieder eine Anordnung hervor, bei der die verschiedenen Richtungen unterschiedslos sind, wie sie dies ursprünglich waren.

Derartige Umlagerungen fallen aber nicht unter das Schema (7), und wir werden dasselbe demgemäss bei Annahme molecularer Constitution als charakteristisch für (ideale) fest-elastische Körper betrachten, Medien dagegen, deren Molecüle sich ihm nicht fügen, als mit einem gewissen Grad von Fluidität behaftet bezeichnen dürfen.

Für beliebige Körper der letzteren Art tritt an die Stelle von (7) eine allgemeinere Beziehung, die wir schreiben wollen:

$$
(8) \qquad \left\{ \begin{aligned}
u' &= x_x \xi_1 + y_y \xi_2 + z_z \xi_3 + y_z \xi_4 + z_x \xi_5 + x_y \xi_6 , \\
v' &= x_x \eta_1 + y_y \eta_2 + z_z \eta_3 + y_z \eta_4 + z_x \eta_5 + x_y \eta_6 , \\
w' &= x_x \zeta_1 + y_y \zeta_2 + z_z \zeta_3 + y_z \zeta_4 + z_x \zeta_5 + x_y \zeta_6 ;
\end{aligned} \right.
$$

hierin bezeichnen die ξ_h, η_h, ζ_h Functionen der Coordinaten x', y', z', die im allgemeinen nicht angebbar sind.

Im Falle einer Flüssigkeit werden die Verhältnisse sehr einfach. Damit nämlich die Unterschiedslosigkeit aller Richtungen von dem betrachteten Punkt (o) aus gewahrt bleibe, müssen sich alle die umgebenden Molecüle (a') der mittleren

Anordnung, auf die sich die Summen $\mathfrak{S}$ in (5) beziehen, in der Richtung des Radiusvectors r von (o) aus und zwar um mit r proportionale Strecken bewegen; auf diese Bewegungen haben die Winkeländerungen y_z, z_x, x_y, welche die Dichte ungeändert lassen, *keinen*, die Axendilatationen x_x, y_y, z_z aber *gleichen* Einfluss. Diese Verhältnisse drücken sich aus in dem Ansatz

$$u' = \tfrac{1}{3} x' \vartheta, \quad v' = \tfrac{1}{3} y' \vartheta, \quad w' = \tfrac{1}{3} z' \vartheta, \tag{9}$$

wobei

$$x_x + y_y + z_z = \vartheta$$

die räumliche Dilatation bezeichnet.

Entwickelt man mit diesen Werten die Ausdrücke für X_x, Y_x, Z_x weiter, so gelangt man successive zu folgenden Formeln. Es folgt zunächst unmittelbar aus (5):

$$\left\{\begin{aligned}
X_x &= -\tfrac{1}{2} \nu_0 \mathfrak{S} (x_0' + u') \Big(X_0 + \left(\frac{\partial X}{\partial x'}\right)_0 u' + \left(\frac{\partial X}{\partial y'}\right)_0 v' \\
&\qquad + \left(\frac{\partial X}{\partial z'}\right)_0 w' \Big) (1 - \vartheta) . \\
Y_x &= -\tfrac{1}{2} \nu_0 \mathfrak{S} (x_0' + u') \Big(Y_0 + \left(\frac{\partial Y}{\partial x'}\right)_0 u' + \left(\frac{\partial Y}{\partial y'}\right)_0 v' \\
&\qquad + \left(\frac{\partial Y}{\partial z'}\right)_0 w' \Big) (1 - \vartheta) . \\
Z_x &= -\tfrac{1}{2} \nu_0 \mathfrak{S} (x_0' + u') \Big(Z_0 + \left(\frac{\partial Z}{\partial x'}\right)_0 u' + \left(\frac{\partial Z}{\partial y'}\right)_0 v' \\
&\qquad + \left(\frac{\partial Z}{\partial z'}\right)_0 w' \Big) (1 - \vartheta) ;
\end{aligned}\right. \tag{10}$$

hierin beziehen sich alle mit dem Index 0 versehenen Grössen auf den Zustand *vor* der Deformation; ν ist dabei gleich $\nu_0 (1 - \vartheta)$ gesetzt. Soll der ursprüngliche Zustand, wie man das gewöhnlich annimmt, verschwindenden Drucken entsprechen, so sind alle Summen von der Form

$$\mathfrak{S} x_0' X_0, \quad \mathfrak{S} y_0' X_0, \ldots$$

gleich Null und wir haben einfacher, wenn wir uns auf Glieder erster Ordnung bezüglich der Deformationen beschränken und der Bequemlichkeit halber die oberen Indices ' an x, y, z fortlassen:

$$(11)\begin{cases} X_x = -\frac{1}{2} v_0 \mathfrak{S}\left[\left(X + x\frac{\partial X}{\partial x}\right)_0 u' + \left(x\frac{\partial X}{\partial y}\right)_0 v' + \left(x\frac{\partial X}{\partial z}\right)_0 w'\right], \\ Y_x = -\frac{1}{2} v_0 \mathfrak{S}\left[\left(Y + x\frac{\partial Y}{\partial x}\right)_0 u' + \left(x\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_0 v' + \left(x\frac{\partial Y}{\partial z}\right)_0 w'\right], \\ Z_x = -\frac{1}{2} v_0 \mathfrak{S}\left[\left(Z + x\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_0 u' + \left(x\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_0 v' + \left(x\frac{\partial Z}{\partial z}\right)_0 w'\right], \end{cases}$$

oder unter Benutzung von (9) wegen des Verschwindens von $\mathfrak{S} x_0 X_0, \ldots$ auch:

$$(12)\begin{cases} X_x = -\frac{1}{6} v_0 \vartheta \mathfrak{S}\left[\left(x^2\frac{\partial X}{\partial x}\right)_0 + \left(xy\frac{\partial X}{\partial y}\right)_0 + \left(xz\frac{\partial X}{\partial z}\right)_0\right], \\ Y_x = -\frac{1}{6} v_0 \vartheta \mathfrak{S}\left[\left(x^2\frac{\partial Y}{\partial x}\right)_0 + \left(xy\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_0 + \left(xz\frac{\partial Y}{\partial z}\right)_0\right], \\ Z_x = -\frac{1}{6} v_0 \vartheta \mathfrak{S}\left[\left(x^2\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_0 + \left(xy\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_0 + \left(xz\frac{\partial Z}{\partial z}\right)_0\right]. \end{cases}$$

Nun sind

$$(13)\begin{cases} \frac{1}{2} v_0 \mathfrak{S}\left(x^2\frac{\partial X}{\partial x}\right)_0 = \frac{1}{2} v_0 \mathfrak{S}\left(y^2\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_0 = \ldots = \gamma, \\ \frac{1}{2} v_0 \mathfrak{S}\left(xy\frac{\partial X}{\partial y}\right)_0 = \frac{1}{2} v_0 \mathfrak{S}\left(xy\frac{\partial Y}{\partial x}\right)_0 = \ldots = \gamma_1 \end{cases}$$

jene dem Körper individuellen Parameter, die nach der älteren Theorie dessen Elasticitätsconstanten darstellen und durch die Beziehung

$$\gamma = 3\gamma_1$$

verbunden sind, während alle Ausdrücke von der Form

$$\frac{1}{2} v_0 \mathfrak{S}\left(xy\frac{\partial X}{\partial z}\right)_0, \quad \frac{1}{2} v_0 \mathfrak{S}\left(x^2\frac{\partial X}{\partial y}\right)_0, \quad \frac{1}{2} v_0 \mathfrak{S}\left(x^2\frac{\partial Y}{\partial x}\right)_0, \ldots$$

in denen einer der Buchstaben x, y, z nur *einmal* auftritt, nach Symmetrie verschwinden. Somit ergiebt sich

$$(14)\begin{cases} X_x = Y_y = Z_z = -\frac{5}{3}\gamma_1 \vartheta, \\ Y_z = Z_y = Z_x = X_z = X_y = Y_x = 0; \end{cases}$$

dies sind aber die bekannten Ausdrücke für die Druckcomponenten innerhalb einer tropfbaren Flüssigkeit, welche die Nahewirkungstheorie aus dem allgemeinen Schema (1) durch die Beziehung $c = c_1 \,(= \frac{5}{3}\gamma_1)$ gewinnt, und die hier aus der molecularen Vorstellung abgeleitet sind.

Der eingeschlagene Weg ist mit leicht ersichtlichen Abweichungen auch auf Flüssigkeiten anwendbar, bei denen man

nicht von einem Anfangszustand mit verschwindenden inneren Drucken ausgehen kann, also insbesondere auf Gase. Das Eingehen auf sie mag aber unterbleiben.

4. Körper, welche den Formeln (9) entsprechen, wird man als *vollkommen elastisch-flüssig* den durch (7) charakterisirten *vollkommen elastisch-festen* gegenüberstellen. Zwischenstufen zwischen diesen beiden Extremen, also *Körper von unvollkommener Festheit* (welcher Name nicht den Doppelsinn von „Festigkeit“ besitzt), die den wirklichen Körpern wenigstens elastisch äquivalent sind, lassen sich dann jederzeit durch eine Combination der beiden charakteristischen Eigenschaften construiren. So wird man einen Körper, der den Beziehungen

$$(15)\quad \begin{cases} u' = \beta(\ x_x x' + \tfrac{1}{2} x_y y' + \tfrac{1}{2} x_z z') + \tfrac{1}{3}(1-\beta)\,\vartheta x', \\ v' = \beta(\tfrac{1}{2} y_x x' + \ y_y y' + \tfrac{1}{2} y_z z') + \tfrac{1}{3}(1-\beta)\,\vartheta y', \\ w' = \beta(\tfrac{1}{2} z_x x' + \tfrac{1}{2} z_y y' + \ z_z z') + \tfrac{1}{3}(1-\beta)\,\vartheta z', \\ \qquad 0 < \beta < 1 \end{cases}$$

entspricht, als im Verhältnis β fest-, im Verhältnis $(1-\beta)$ flüssig-elastisch auffassen können. Der Ansatz entspricht der Bedingung

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'} = \vartheta,$$

die offenbar auch bei Annahme der molecularen Constitution erfüllt sein muss.

Für einen solchen Körper folgt aus (11):

$$(16)\quad \begin{cases} -X_x = \gamma_1\left((3x_x + y_y + z_z)\beta + \tfrac{5}{3}\vartheta(1-\beta)\right), \ldots \\ -Y_z = \gamma_1 \beta y_z, \ldots \end{cases}$$

d. h., es ergiebt sich das allgemeine Schema (1), in dem speciell

$$(17)\quad \begin{cases} c\ = \gamma_1\left(3\beta + \tfrac{5}{3}(1-\beta)\right) = \tfrac{1}{3}\gamma_1(5+4\beta), \\ c_1 = \gamma_1\left(\ \beta + \tfrac{5}{3}(1-\beta)\right) = \tfrac{1}{3}\gamma_1(5-2\beta) \end{cases}$$

ist. Zwischen den Constanten c und c_1 besteht jetzt kein constantes Zahlenverhältnis, sondern *je nach dem Grad der Festheit* kann c/c_1 alle Werte zwischen 1 und 3 erhalten. Die für die Festheit charakteristische Zahl β findet sich dabei zu

$$\beta = \frac{5(c - c_1)}{2(c + 2c_1)},$$

nahe parallel gehend dem Sir W. Thomson'schen modulus of rigidity

$$\tfrac{1}{2}(c - c_1) = \gamma_1 \beta.$$

Werte *ausserhalb* des Bereiches $1 < c/c_1 < 3$ sind durch teilweise Flüssigkeit der Substanz nicht erhältlich, was vollkommen einleuchtet. Die durch Wasser aufgeweichten Gelatinen und Leime geben sehr nahezu $c = c_1$, also den Grad der Festheit nahe gleich Null, was gleichfalls durchaus begreiflich ist.

Göttingen, October 1900.

(Eingegangen 13. November 1900.)

---

11. *Ueber das elektrische Analogon des Zeemaneffectes; von W. Voigt.*

Die überraschende und schöne Erklärung, welche Hr. Lorentz[1]) mit Hülfe seiner allgemeinen Theorie der Elektrodynamik von dem *directen* Zeeman'schen Phänomen gegeben hat, findet in meinen Untersuchungen[2]) über den *inversen* Zeemaneffect eine Art von formaler und inhaltlicher Ergänzung. Während Hr. Lorentz, von einer ganz bestimmten Vorstellung über den Mechanismus des Vorganges ausgehend, fast ausschliesslich die Veränderung der *Emission* einer Lichtquelle durch die Einwirkung eines Magnetfeldes behandelt, beschäftigen sich meine Arbeiten unter alleiniger Heranziehung allgemeiner Ueberlegungen mit der *Absorption* und der *Doppelbrechung* in magnetisch beeinflussten Körpern. Durch den Kirchhoff'schen Satz steht ein Teil der auf dem einen und der auf dem anderen Wege erhaltenen Resultate in directer Beziehung, und die hierbei hervorgetretene Uebereinstimmung der beiderseitigen Ergebnisse miteinander, wie andererseits aller mit der Erfahrung, erweckt das Vertrauen, dass in jenen Ueberlegungen das Wesentliche des so merkwürdigen Vorganges richtig aufgefasst ist.

Bei dem nächst verwandten Problem der *elektrischen* Einwirkung auf Emission und Absorption fehlte bisher eine solche Zusammenwirkung der beiden Methoden. Es liegen hier nur erst die Formeln vor, welche von mir in erneuter Anwendung der in der Magnetoptik benutzten allgemeinen Principien ge-

1) P. Zeeman, Comm. from the Phys. Lab. Leiden, Nr. 33. p. 12. 1896.

2) W. Voigt, Wied. Ann. 67. p. 345. 1899; 68. p. 352. 1899; 69. p. 290. 1899; Ann. d. Phys. 1. p. 376 und p. 389. 1900.

wonnen sind[1]), und welche als bisher mit der Erfahrung im Einklang bezeichnet werden dürfen.

Freilich existiren in diesem Gebiete zur Zeit Beobachtungen nur allein über die elektrische Doppelbrechung fast durchsichtiger Körper im elektrischen Felde; die Prüfung konnte somit gerade auf die interessantesten Vorgänge, welche die Theorie in der Nähe scharfer Absorptionsstreifen fordert, nicht erstreckt werden. Von diesen wiederum zog besonders ein elektrisches Analogon des inversen Zeemaneffectes die Aufmerksamkeit auf sich, das sich in den beiden Hauptfällen kurz so darstellt.[2])

Ein Körper mit feinen und hinreichend getrennten Absorptionsstreifen in seinem Spectrum zeigt für natürliches Licht, welches ihn *parallel* zu den Kraftlinien des Feldes (und zwar hier ohne Doppelbrechung) durchsetzt, *eine Verschiebung dieser Streifen ohne Zerlegung*, für Licht, welches ihn *normal* zu den Kraftlinien (und zwar mit Doppelbrechung) durchsetzt, *eine Verschiebung mit begleitender Zerlegung.*

Dabei nimmt im zweiten Falle die eine erzielte Componente des Streifens dieselbe Lage ein, wie im ersten der unzerlegt verschobenen Streifen. Für die Lage der anderen Componente giebt die allgemeinste Theorie keine Bestimmung; eine sehr plausible speciellere Fassung dagegen verlangt für dieselbe den *dreifachen* Betrag der Verschiebung der ersteren. Die Verschiebungen sind dem Quadrat der wirkenden Feldstärke proportional.

Mit den Grundlagen der Theorie zusammen konnte dieses Resultat als *sehr wahrscheinlich der Wirklichkeit entsprechend* bezeichnet werden, wenngleich bislang mehreren Forschern, die sich mit dem Aufsuchen einer Wirkung eines elektrischen Feldes auf die Linien eines Gasspectrums (also mit dem elektrischen Analogon zu dem *directen* Zeemaneffect) beschäftigt hatten, der Nachweis einer solchen nicht gelungen war.

Diese Wahrscheinlichkeit wird verstärkt durch den Umstand, dass *die Lorentz'sche elementare Theorie des directen*

---

1) W. Voigt, Wied. Ann. **69.** p. 297. 1899.

2) W. Voigt, l. c. p. 312.

Zeemaneffectes in einer nahezu selbstverständlichen Ausgestaltung bezüglich des directen elektrooptischen Effectes zu genau denselben Resultaten führt, welche die von mir benutzte Behandlungsweise des inversen Phänomens bei Anwendung des Kirchhoff'schen Satzes liefert.

Den Nachweis hierfür zu erbringen und damit die Fruchtbarkeit der von Hrn. Lorentz vertretenen Theorie von einer neuen Seite zu zeigen, ist Hauptzweck dieser Notiz. Daneben wird eine Schätzung der Grössenordnung der durch die Theorie signalisirten Veränderungen der Spectral- bez. Absorptionslinien mitgeteilt werden, welche begreiflich macht, dass das überaus feine Phänomen der Beobachtung bisher verborgen geblieben ist.

1. Die Lorentz-Wiechert'sche Ionentheorie der Elektricität betrachtet die in den leuchtenden Körpern schwingenden elektrischen Teilchen von der (scheinbaren) Masse m durch eine Art von elastischer Kraft an (in Wahrheit ihrerseits relativ langsam bewegte) Gleichgewichtslagen, etwa die ponderabeln Moleküle M selbst, gebunden, und setzt für eines von ihnen die Bewegungsgleichungen im einfachsten Falle, dass die Wechselwirkungen zwischen den verschiedenen Elektronen vernachlässigt werden dürfen, folgendermaassen an:

$$(1) \qquad m\frac{d^2 x}{d t^2} = -k x, \quad m\frac{d^2 y}{d t^2} = -k y, \quad m\frac{d^2 z}{d t^2} = -k z,$$

worin k eine positive Constante bezeichnet.

Es ist ohne weiteres klar, dass diese Formeln eine Einwirkung eines constanten elektrischen Feldes auf den Schwingungsvorgang und somit auf das optische Verhalten des Mediums *nicht* liefern; denn eine constante Kraft, neben der „elastischen" in die Formeln eingeführt, ergiebt nichts anderes als eine Verschiebung der Ruhelage des Elektrons, ohne seine Periode zu ändern. Da aber doch elektrooptische Erscheinungen beobachtet worden sind, so wird man zu der Folgerung gedrängt, dass die Grundgleichungen (1) nicht die vollständigen sind, und demgemäss erweitert werden müssen.

In der That darf man es als selbstverständlich bezeichnen, dass das vorstehend angenommene Gesetz der wirkenden (elastischen) Kräfte $X = -k x$ etc. nur eine *erste Annäherung*

darstellt; denn für grössere Entfernungen muss die wirkende Kraft statt weiter zu wachsen, abnehmen und schliesslich verschwinden. Wir fassen demgemäss den gemachten Ansatz $X = -kx, \ldots$ als das erste Glied einer Taylor'schen Reihe auf, die nach Potenzen der Coordinaten x, y, z fortschreitet und deren höhere Glieder bei der gewöhnlichen Betrachtung vernachlässigt werden dürfen, aber bei anderen Vorgängen gelegentlich Bedeutung erhalten.

Discutirt man diese höheren Glieder der bez. Ausdrücke für X, Y, Z, indem man (wenigstens im Mittel) das Kraftfeld als um das Molecül M von kugeliger Symmetrie ansieht, so gelangt man zu dem Resultat, dass die Glieder zweiter Ordnung verschwinden und dass diejenigen dritter die bez. Factoren $r^2 x$, $r^2 y$, $r^2 z$, haben müssen, wobei

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

gesetzt ist. So gelangt man zu den erweiterten Ansätzen

$$(2)\quad X = -(k + k' r^2)x, \quad Y = -(k + k' r^2)y, \quad Z = -(k + k' r^2)z,$$

in denen k' eine Constante ist, welche nach dem Ausdruck

$$(3)\qquad K = (k + k' r^2)\, r$$

für die resultirende Kraft sich anschaulich durch die Beziehung

$$(4)\qquad \tfrac{1}{6}\frac{\partial^3 K}{\partial r^3} = k'$$

bestimmt.

Die Bewegungsgleichungen (1) erhalten hiernach die Gestalt:

$$(5)\quad \begin{cases} m\dfrac{d^2 x}{d t^2} = -(k + k' r^2)x, \quad m\dfrac{d^2 y}{d t^2} = -(k + k' r^2)y, \\ m\dfrac{d^2 z}{d t^2} = -(k + k' r^2)z. \end{cases}$$

Wir wollen nun annehmen, dass das betrachtete Ion ausser der Kraft K noch einer constanten elektrischen Feldstärke R, welche parallel zur Z-Axe wirkt, ausgesetzt sei, und dass dadurch seine Gleichgewichtslage um einen Betrag ζ_0 verschoben

werde, welcher gross ist gegen die Schwingungsamplituden und somit gegen die ausserhalb des elektrischen Feldes erreichten Werte x, y, z. Setzen wir dann

$$x = \xi, \quad y = \eta, \quad z = \zeta_0 + \zeta \tag{6}$$

und beschränken uns in Bezug auf ξ, η, ζ auf die niedrigsten Glieder, so erhalten wir

$$\begin{cases} m\,\dfrac{d^2\xi}{dt^2} = -\,(k + k'\zeta_0^2)\,\xi, \quad m\,\dfrac{d^2\eta}{dt^2} = -\,(k + k'\zeta_0^2)\,\eta, \\ m\,\dfrac{d^2\zeta}{dt^2} = -\,e\,R - (k + k'\zeta_0^2)\,\zeta_0 - (k + 3\,k'\zeta_0^2)\,\zeta. \end{cases} \tag{7}$$

Da ζ_0 die neue Gleichgewichtslage des Ionen bestimmen soll, so ergiebt sich dafür

$$\zeta_0\,(k + k'\zeta_0^2) = -\,e\,R, \tag{8}$$

oder in erster Annäherung

$$\zeta_0 = -\,e\,R\,/\,k. \tag{9}$$

Diese Annäherung darf in die kleinen in k' multiplicirten Glieder der Gleichungen (7) eingeführt werden, wodurch letztere die Gestalt erhalten:

$$\begin{cases} m\,\dfrac{d^2\xi}{dt^2} = -\left(k + \dfrac{k'\,e^2 R^2}{k^2}\right)\xi, \quad m\,\dfrac{d^2\eta}{dt^2} = -\left(k + \dfrac{k'\,e^2 R^2}{k^2}\right)\eta, \\ m\,\dfrac{d^2\zeta}{dt^2} = -\left(k + \dfrac{3\,k'\,e^2 R^2}{k^2}\right)\zeta. \end{cases} \tag{10}$$

Hieraus folgt, dass die drei Verrückungscomponenten nach den Coordinatenaxen, welche nach (1) ursprünglich *dieselbe* Periode τ besassen, gegeben durch

$$\left(\frac{2\,\pi}{\tau}\right)^2 = \frac{k}{m}, \tag{11}$$

im elektrischen Feld die Perioden τ_1, τ_2, τ_3 annehmen, gegeben durch

$$\left(\frac{2\,\pi}{\tau_1}\right)^2 = \left(\frac{2\,\pi}{\tau_2}\right)^2 = \frac{1}{m}\left(k + \frac{k'\,e^2 R^2}{k^2}\right), \quad \left(\frac{2\,\pi}{\tau_3}\right)^2 = \frac{1}{m}\left(k + \frac{3\,k'\,e^2 R^2}{k^2}\right). \tag{12}$$

Wegen der Kleinheit von k' folgt hieraus auch

$$(13) \quad \tau - \tau_1 = \tau - \tau_2 = \frac{k' e^2 R^2 \tau^3}{8 \pi^2 m k^2}, \quad \tau - \tau_3 = \frac{3 k' e^2 R^2 \tau^3}{8 \pi^2 m k^2},$$

oder bei Einführung der den τ_h in Luft oder auch im Vacuum entsprechenden Wellenlängen $\lambda_h = \tau_h v$:

$$(14) \quad \lambda - \lambda_1 = \lambda - \lambda_2 = \frac{k' e^2 R^2 \lambda \tau^2}{8 \pi^2 m k^2}, \quad \lambda - \lambda_3 = \frac{3 k' e^2 R^2 \lambda \tau^2}{8 \pi^2 m k^2}.$$

Berücksichtigt man, dass nach der Lorentz'schen Theorie sich in grösseren Entfernungen von dem leuchtenden Teilchen aus nur die Schwingungscomponenten normal zum Radiusvector als Lichtschwingungen geltend machen, so erkennt man, dass nach den vorstehenden Entwickelungen ein von Natur einfarbig mit der Periode τ leuchtender Körper im elektrischen Felde *parallel zu den Kraftlinien* wieder einfarbiges Licht, aber von etwa geänderter Periode τ_1 aussendet, dagegen *normal zu den Kraftlinien* zwei Farben, von denen die eine der Periode τ_1, die zweite einer anderen Periode τ_3 entspricht. Dabei ist

$$(15) \quad \tau_3 - \tau = 3(\tau_1 - \tau), \ \lambda_3 - \lambda = 3(\lambda_1 - \lambda).$$

Die Schwingungen, die sich *parallel* zu den Kraftlinien fortpflanzen, stellen *natürliches* Licht dar; von denen, die sich *normal* zu den Kraftlinien fortpflanzen, sind diejenigen mit der Periode τ_1 nach dem Meridian bez. Hauptschnitt, diejenigen mit der Periode τ_3 normal dazu *polarisirt.*

Diese Resultate entsprechen sämtlich genau dem, was die oben citirte Theorie des inversen Vorganges, und zwar bezüglich des numerischen Verhältnisses von $\tau_1 - \tau$ zu $\tau_3 - \tau$ dem, was die Theorie in der *speciellen* Fassung geliefert hat. Man wird hierin, wie schon eingangs ausgesprochen, ein neues Argument für die Wahrscheinlichkeit der früher signalisirten Resultate finden dürfen.

2. Der Umstand, dass die moleculare Theorie sich just mit der *specielleren* Fassung der von mir früher gegebenen übereinstimmend erweist, hat einen einfachen Grund, der ein gewisses Interesse verdient. In jener speciellen Fassung der Theorie wurden die Grundgleichungen mittels einer Erweiterung des gewöhnlichen Ausdruckes für die elektrische Energie

durch Hinzunahme von Gliedern mit höheren Potenzen der elektrischen Vectorcomponenten gewonnen.[1]) Dies hat die Folge, dass bei elektrostatischen Vorgängen an Stelle der Dielektricitätsconstanten D eine Function der Feldstärke R von der Gestalt $D_0 + D_1 R^2$ tritt, in der D_0 und D_1 Constanten bezeichnen. Die oben entwickelte Vorstellung führt aber, wie leicht erkennbar, zu dem analogen Resultate.

Denn bei, wie angenommen, sehr kleinem k' ergiebt die Formel (8) für die Verschiebung ζ_0 der Gleichgewichtslage eines Elektron infolge des Feldes R, bei näherungsweiser Auflösung,

$$(16) \qquad \zeta_0 = -\frac{e R}{k}\left(1 - \frac{k' e^2 R^2}{k^3}\right).$$

Hieraus folgt *für ein Medium mit nur einer Gattung von Elektronen* bei Einführung von deren Anzahl α pro Volumeneinheit das specifische elektrische Moment μ nach der Formel

$$(17) \qquad \mu = -\alpha \zeta_0 e = +\frac{\alpha e^2 R}{k}\left(1 - \frac{k' e^2 R^2}{k^3}\right).$$

Die Elektrisirungszahl oder elektrische Susceptibilität η ergiebt sich hiernach zu

$$(18) \qquad \eta = \frac{e^2 \alpha}{k}\left(1 - \frac{k' e^2 R^2}{k^3}\right);$$

die Dielektricitätsconstante D ist

$$(19) \qquad D = 1 + 4\pi\eta = D_0 + D_1 R^2,$$

also in der That von der oben erwähnten Form, wobei gilt:

$$(20) \qquad D_0 = 1 + \frac{4\pi e^2 \alpha}{k}, \quad D_1 = -(D_0 - 1)\frac{k' e^2}{k^3}.$$

Bei Einführung des Ausdruckes (11) für k hat man auch:

$$(21) \qquad D_1 = \frac{d D}{d R^2} = -(D_0 - 1)\frac{k' e^2 \tau^2}{4\pi^2 m k^2}.$$

Bezeichnet man nun als *relative Zerlegung* ϱ der für das Medium charakteristischen Spectrallinie den Ausdruck $(\lambda_1 - \lambda_3)/\lambda$,

---

1) W. Voigt, l. c. p. 134.

unter λ deren ursprüngliche Wellenlänge verstanden, so hat man nach (14):

$$(22) \qquad \varrho = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda} = \frac{k' e^2 \tau^2}{4 \pi^2 m k^2} R^2,$$

also für die der Feldstärke Eins entsprechende Grösse ϱ_1:

$$(23) \qquad \varrho_1 = \frac{k' e^2 \tau^2}{4 \pi^2 m k^2}.$$

Vergleicht man dies Resultat mit der gefundenen Formel (21) so ergiebt sich:

$$(24) \qquad D_1 = \frac{d D}{d R^2} = -(D_0 - 1) \varrho_1,$$

was für das vorausgesetzte einfache Medium einen merkwürdigen Satz ausspricht.

Dem Ausdruck (20) für D_0 kann man unter Heranziehung des Wertes $\delta = \alpha M / \beta$ für die Dichte des Mediums (unter M die Masse des β Elektrons festhaltenden Molecüles verstanden) und unter abermaliger Benutzung von (11) die Form geben

$$(25) \qquad D_0 = 1 + \frac{e^2 \tau^2 \delta \beta}{\pi m M} = 1 + \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{\beta m}{M} \cdot \frac{\tau^2 \delta}{\pi}.$$

Für Media mit mehreren Arten von Elektronen sind die entsprechenden Formeln minder einfach aber gleichfalls leicht aufstellbar.

3. Wir wenden uns nun zu einer Abschätzung der Grössenordnung des elektrischen Analogons des Zeemaneffectes. Hier bietet sich als nächstliegendes Hülfsmittel die Benutzung der Formel (24), die, wenngleich dergleichen Idealkörper mit nur einer Gattung Elektronen nicht existiren, doch zu einer Frage der blossen Grössenordnung jedenfalls herangezogen werden darf.

Aber so einfach der aus ihr folgende Wert der relativen Zerlegung

$$(26) \qquad \varrho (=) \frac{D_1}{D_0 - 1} R^2$$

(wobei (=) die Gleichheit der Grössenordnung bezeichnet) auch ist, so giebt er uns wenig Aufklärung, weil die Grösse

$D_1 = dD/dR^2$ überhaupt und speciell für die hier in Frage kommenden Körper so gut wie unbekannt ist.

Wir müssen demgemäss zur Beantwortung der gestellten Frage auf das einzige gut beobachtete elektrooptische Phänomen, nämlich auf die *elektrische Doppelbrechung* zurückgreifen.

Aus den gelegentlich der Entwickelung der allgemeinen Theorie von mir mitgeteilten Formeln folgen für die complexen Brechungsindices ν_h der beiden Wellen, die sich in dem elektrisirten Medium *normal* zu den Kraftlinien des Feldes fortpflanzen, die Ausdrücke

$$(27) \qquad \begin{cases} \nu_1^2 = 1 + \sum \dfrac{\varepsilon_h \vartheta^2}{\Theta_h + R^2 \vartheta^2 e_h}, \\[2ex] \nu_2^2 = 1 + \sum \dfrac{\varepsilon_h \vartheta^2}{\Theta_h + R^2 \vartheta^2 e_h'}. \end{cases}$$

Hierin ist ϑ für $\tau / 2\pi$ gesetzt, Θ_h bedeutet $\vartheta^2 + i a_h \vartheta - b_h$, und ε_h, a_h, b_h sind Constanten des Körpers, die eine bestimmte Absorptionslinie (h) charakterisiren, e_h, e_h' messen speciell den ihr zukommenden elektrooptischen Effect. ν_1 bezieht sich auf die nach den Kraftlinien, ν_2 auf die normal dazu polarisirten Schwingungen. e_h liefert die erwähnte specielle Theorie gleich $3 e_h'$.

Ausserhalb des elektrischen Feldes liegt (kleines a_h vorausgesetzt) die Absorptionslinie (h) sehr nahe an der durch $\vartheta^2 = b_h$ gegebenen Stelle des Spectrums; *innerhalb* des Feldes dagegen für die beiden Wellen in den Stellen $\vartheta^2(1 + R^2 e_h') = b_h$ und $\vartheta^2(1 + R^2 e_h) = b_h$, d. h. an den Stellen für welche gilt:

$$(28) \qquad \frac{2\pi}{\tau_1^2} = \frac{1}{b_h}(1 + R^2 e_h'), \quad \frac{2\pi}{\tau_2^2} = \frac{1}{b_h}(1 + R^2 e_h).$$

Vergleicht man diese Formeln mit (12) und zieht die Relation $e_h = 3 e_h'$ heran, so erkennt man, dass e_h' in der *früheren* Theorie dem Ausdruck $k' e^2 / k^3$ in der *neuen*, *molecularen* Theorie entspricht.

Die Beobachtungen über elektrische Doppelbrechung sind an merklich *durchsichtigen* Körpern, d. h. für Farben, weitab von Absorptionsstreifen vorgenommen, was sich dadurch ausdrückt, dass das in a_h multiplicirte Glied in dem Ausdruck für Θ_h vernachlässigt werden kann. Hierdurch werden ν_1 und ν_2

zu den *reellen* Brechungsindices n_1 und n_2, für welche nunmehr gilt:

$$(29)\quad \begin{cases} n_1^2 = 1 + \sum \dfrac{\varepsilon_h\, \vartheta^2}{\vartheta^2 - b_h + R^2\, \vartheta^2\, e_h'}, \\ n_2^2 = 1 + \sum \dfrac{\varepsilon_h\, \vartheta^2}{\vartheta^2 - b_h + R^2\, \vartheta^2\, e_h}. \end{cases}$$

Die Kleinheit des in R^2 multiplicirten Gliedes erlaubt die Entwickelung der Brüche, sodass resultirt:

$$(30)\quad n_1^2 = n_0^2 - \sum \frac{\varepsilon_h\, e_h'\, \vartheta^4\, R^2}{(\vartheta^2 - b_h)^2}, \quad n_2^2 = n_0^2 - \sum \frac{\varepsilon_h\, e_h\, \vartheta^4\, R^2}{(\vartheta^2 - b_h)^2},$$

wobei

$$n_0^2 = 1 + \sum \frac{\varepsilon_h\, \vartheta^2}{\vartheta^2 - b_h}$$

den Wert des quadrirten Brechungsindex ausserhalb des Feldes darstellt. Berücksichtigt man wieder die Relation $e_h = 3\, e_h'$, so wird

$$(31)\quad n_1^2 - n_2^2 = 2 \sum \frac{\varepsilon_h\, e_h'\, \vartheta^4\, R^2}{(\vartheta^2 - b_h)^2}.$$

Um die Grössenordnung von e_h' zu beurteilen, wollen wir annehmen, dass der untersuchte Körper nur *einen* Absorptionsstreifen besitze. In diesem Falle ist

$$(32)\quad n_0^2 = 1 + \frac{\varepsilon_h\, \vartheta^2}{\vartheta^2 - b_h}, \text{ und } D = 1 + \varepsilon_h$$

die gewöhnliche statische Dielektricitätsconstante.

Hier kann man dann schreiben

$$(33)\quad n_1^2 - n_2^2 = \frac{2\, \varepsilon_h\, e_h'\, \vartheta^4\, R^2}{(\vartheta^2 - b_h)^2} = \frac{2\, e_h'\, R^2}{\varepsilon_h}(n_0^2 - 1)^2 = \frac{2\, e_h'\, R^2\, (n_0^2 - 1)^2}{D - 1}.$$

Messungen über elektrische Doppelbrechungen hat Hr. Quincke[1]) angestellt und die von ihm bestimmte Constante B entspricht, soweit ich sehe, dem Ausdruck $100\,(n_1 - n_2)\,/\,R^2 = 100\,(n_1^2 - n_2^2)\,/\,2\, n\, R^2$, unter n einen mittleren Wert des Brechungsindex, etwa n_0 verstanden; d. h. es würde sein

$$(34)\quad B = \frac{100\, e_h'\, (n_0^2 - 1)^2}{n_0\, (D - 1)},$$

1) G. Quincke, Wied. Ann. 19. p. 739. 1883.

und man dürfte schreiben, indem man $n_0^2 - 1$ und $D - 1$ als von gleicher Grössenordnung betrachtet,

$$B (=) 100\, e_h' (n_0^2 - 1), \tag{35}$$

wobei (=) wieder *die Gleichheit der Grössenordnung* andeutet. Bei Rücksicht auf die Bedeutung von e_h' folgt dann auch

$$B (=) 100\, k' e^2 (n_0^2 - 1) / k^3. \tag{36}$$

Erweitert man den rechts stehenden Ausdruck mit m und benutzt die Beziehung (11), welche $m/k = (\tau/2\pi)^2$ ergiebt, so erhält man

$$\frac{B}{100 (n_0^2 - 1)} (=) \frac{k' e^2 \tau^2}{4 \pi^2 m k^2}. \tag{37}$$

Die Combination dieses Resultates mit (22) giebt schliesslich sehr einfach

$$\varrho = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda} (=) \frac{B R^2}{100 (n_0^2 - 1)}. \tag{38}$$

Hr. Quincke findet bei Voraussetzung absoluter elektrostatischer Einheiten für Schwefelkohlenstoff B rund gleich $4 \lambda . 10^{-5}$; bei Benutzung dieser Zahl würde somit

$$\varrho (=) \frac{4 \lambda R^2}{n_0^2 - 1} . 10^{-7} \tag{39}$$

oder bei Einführung von Volt als Einheit, was durch die Vertauschung von R mit P ausgedrückt sein mag, auch

$$\varrho (=) \frac{4 \lambda P^2}{9 (n_0^2 - 1)} . 10^{-11}. \tag{40}$$

Unter Voraussetzung einer Feldstärke von 300 Volt pro Centimeter und eines bei Gasen angenähert vorhandenen Wertes von $\lambda / (n_0^2 - 1) = 10^{-1}$ würde hiernach

$$\varrho (=) 4 . 10^{-8} \tag{41}$$

werden. Um die Grösse dieses Wertes besser zu übersehen, führen wir noch den Abstand Δ der Na-Linien D_1 und D_2 als von der Grössenordnung $\lambda . 10^{-3}$ ein und erhalten dann

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\Delta} (=) 4 . 10^{-5}. \tag{42}$$

Das Resultat der vorstehenden Ueberlegungen geht also dahin, dass selbst unter der Annahme der grössten bekannten elektrischen Doppelbrechung neben sehr kleinem $(n_0^2 - 1)$ und

des in einem Dampf keineswegs leicht herstellbaren Potentialgefälles von 300 Volt pro Centimeter die in der Richtung normal zu den Kraftlinien des Feldes beobachteten Spectral- oder Absorptionslinien eines leuchtenden Dampfes nur etwa um den 20000sten Teil des Abstandes der beiden *D*-Linien verbreitert werden würden. Hierdurch ist die Ergebnislosigkeit der bisherigen Versuche zur Auffindung eines elektrischen Analogons zum Zeemaneffect vollständig erklärt.

Göttingen, August 1900.

(Eingegangen 13. November 1900.)

12. *Weiteres zur Aenderung der Schwingungsform des Lichtes beim Fortschreiten in einem dispergirenden und absorbirenden Mittel;*
von W. Voigt.

In einer früheren Notiz[1]) über den in der Ueberschrift genannten Gegenstand habe ich mich mit der Untersuchung der Fortpflanzung ebener Wellen nicht rein periodischer Schwingungen in einem unendlichen absorbirenden und dispergirenden Medium einfachster Art beschäftigt und derselben die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 2b \frac{\partial u}{\partial t} \tag{1}$$

zu Grunde gelegt, welche die elektromagnetische Lichttheorie für Körper ohne moleculare Eigenschwingungen liefert. Auf diese Gleichung habe ich ein von Riemann herrührendes Integrationsverfahren angewendet, das zwar auf den vorliegenden Fall der Erregung der Wellen durch die in vorgeschriebene Bewegung gesetzte Ebene ($z = 0$) unmittelbar nicht passt, aber ihm durch einen von mir früher angegebenen Kunstgriff adaptirt werden kann.

Gerade bei der Anwendung dieses Verfahrens ist ein Fehler untergelaufen, der zwar die Sätze, um deren Nachweis es sich handelt, nicht berührt, aber doch Berichtigung verlangt.

Die Gleichung (1) ist durch die Substitutionen

$$u = U e^{-bt} \quad \text{und} \quad bt = \tau\sqrt{2}, \quad bz = \zeta a \sqrt{2} \tag{2}$$

auf die Form gebracht

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} + 2U, \tag{3}$$

und durch die weitere

$$\xi = \frac{\zeta - \tau}{\sqrt{2}}, \quad \eta = \frac{\zeta + \tau}{\sqrt{2}} \tag{4}$$

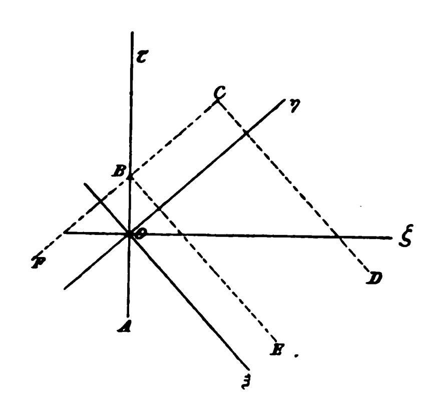
1) W. Voigt, Wied. Ann. 68. p. 598. 1899.

auf die Form

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \, \partial \eta} + U = 0. \tag{5}$$

Der Vorgang der Fortpflanzung einer in der Ebene $z = 0$ erregten Bewegung spielt sich bei Einführung einer $\zeta\tau$-Coordinatenebene auf der Halbebene $\zeta > 0$ ab; die letzte Substitution bezieht ihn auf ein $\xi\eta$-Coordinatensystem, dessen ξ-Axe im vierten, dessen η-Axe im ersten Quadranten liegt. (Vgl. die Figur.)

Die Aufgabe, den Zustand in einer beliebigen Ebene z, infolge einer Bewegung der Ebene $z = 0$, zu einer beliebigen Zeit zu bestimmen, kommt darauf hinaus, U für eine beliebige Stelle C der $\zeta\tau$-Ebene durch die längs der τ-Axe vorgeschriebenen Werte von U auszudrücken.



Die Anwendung des Riemann'schen Verfahrens liefert unmittelbar, falls A, B, C, D die in der Figur mit diesen Buchstaben versehenen Punkte bezeichnen (A und D, wie auch E und F in unendlicher Ferne gedacht), das früher in der Formel (10) enthaltene Resultat

$$U_C = U_B - \int_A^B \left(\varphi \frac{\partial U}{\partial \eta} - U \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) \frac{d\tau}{\sqrt{2}}, \tag{6}$$

wobei φ eine Hülfsfunction ist, die folgenden Bedingungen zu genügen hat:

überall auf dem Gebiete $FBCDF$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \, \partial \eta} + \varphi = 0, \tag{7}$$

überall längs FCD

$$\varphi = 1. \tag{8}$$

Zugleich ist nach (4)

$$(9) \qquad \frac{\partial U}{\partial \eta} = \left(\frac{\partial U}{\partial \zeta} + \frac{\partial U}{\partial \tau}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} - \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Da längs AB mit U auch $\partial U / \partial \tau$, nicht aber $\partial U / \partial \zeta$ gegeben ist, so bestimmt die Formel (6), auch wenn φ den Bedingungen gemäss bestimmt gedacht ist, U_C noch nicht durch lauter bekannte Grössen; es handelt sich daher um die Ableitung des Wertes von $\partial U / \partial \zeta$ für $\zeta = 0$.

Hierzu gewinnt man die nötige Bedingung, indem man die Stelle C nach B gerückt denkt; bezeichnet man die dieser speciellen Lage von C entsprechende Function φ mit φ_0, so erhält man aus (6) die Beziehung:

$$(10) \qquad 0 = \int_A^B \left(\varphi_0 \frac{\partial U}{\partial \eta} - U \frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi}\right)\frac{d\tau}{\sqrt{2}}.$$

Diese Formel ist von mir zur Gewinnung des gesuchten $\partial U / \partial \zeta$ nach dem der Stelle B entsprechenden $\tau (= \tau_0)$ differentiirt worden; es ist aber dabei nicht beachtet, dass die Formel τ_0 ausser in der oberen Grenze auch in φ_0 enthält. Hr. H. Weber in Strassburg hat mich hierauf aufmerksam gemacht. Der Fehler ist dadurch entstanden, dass die Bedingungen für φ unabhängig von der Lage des Punktes C sind, φ selbst also *auf Coordinaten relativ zu C bezogen* immer das gleiche Gesetz befolgt; dies letztere ist mit einer Unabhängigkeit von der Lage von C verwechselt worden.

Bei Berücksichtigung dieser Abhängigkeit kann man nun in folgender Weise vorgehen. Setzt man für $\partial U / \partial \eta$ und $\partial \varphi_0 / \partial \xi$ ihre Werte gemäss (9) ein, so erhält man aus (10)

$$0 = \int_A^B \left(\varphi_0 \left(\frac{\partial U}{\partial \zeta} + \frac{\partial U}{\partial \tau}\right) - U\left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial \zeta} - \frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau}\right)\right) d\tau,$$

d. h.

$$(11) \qquad 0 = \left|\varphi_0 U\right|_A^B + \int_A^B \left(\varphi_0 \frac{\partial U}{\partial \zeta} - U \frac{\partial \varphi_0}{\partial \zeta}\right) d\tau.$$

Den Verlauf der Function φ_0 innerhalb des Bereiches $FBEF$ kann man sich durch Discussion der Formeln (7) und (8) leicht klar machen. Als dritte Coordinate über der Ebene $\tau\zeta$ oder $\xi\eta$ aufgetragen ergiebt φ_0 eine Sattelfläche, die symmetrisch zur $\tau\varphi$-Ebene liegt und auf gleichseitigen Hyperbeln mit den Asymptoten BF und BE constante Höhe hat; $\tau = -\infty$ entspricht unendlichen Werten φ_0.

Denkt man der Einfachheit halber u für $\tau = -\infty$ selbst gleich Null vorgeschrieben, so ergiebt sich dort $U\varphi_0$, das nach (2) $= u\,e^{+bt}\varphi_0$ ist, ganz ohne Discussion der (aus der Theorie der Bessel'schen Functionen sich ergebenden) Grössenordnung von φ_0 gleich Null, d. h. $(\varphi_0\,U)_A = 0$. Aus der Symmetrie des Gesetzes für φ_0 in Bezug auf die τ-Axe folgt weiter $\partial\varphi_0/\partial\zeta = 0$ für $\zeta = 0$; und da endlich $(\varphi_0)_B = 1$ ist, so erhält man aus (11) sehr einfach

$$0 = U_B + \int\limits_A^B \varphi_0 \frac{\partial U}{\partial \zeta}\, d\tau. \tag{12}$$

Dies ist die Gleichung, welche $\partial U/\partial\zeta$ mit dem gegebenen U_B verbindet. Sie gilt für jede Lage des Punktes B auf der τ-Axe und drückt U_B für diese Stelle aus durch alle Werte von $\partial U/\partial\zeta$ zwischen A und B. Eine allgemeine Methode, um die Berechnung von $\partial U/\partial\zeta$ aus gegebenem U_B wirklich auszuführen, existirt nicht; doch kann man sich davon, dass diese Grösse mittels der vorstehenden Gleichung wirklich durch U_B bestimmt ist, auf verschiedene Weise leicht überzeugen. Der Einfachheit halber wollen wir u für $z = 0$ und $t < 0$, d. h. für $\zeta = 0$ und $\tau < 0$ als *verschwindend* vorgeschrieben denken; dann können wir in dem Integral in (12) A mit dem Coordinatenanfang $\tau = 0$ zusammenfallen lassen.

Der eine Weg ist der, dass man die positive τ-Axe in unendlich kleine, etwa *gleiche* Abschnitte $\delta\tau$ zerlegt denkt, den Punkt B successive in alle so erhaltenen Teilpunkte legt und das zugehörige Integral in eine Summe über alle zwischen A und B liegenden Abschnitte verwandelt, was nach der durch die physikalische Bedeutung von U bez. $\partial U/\partial\zeta$ gewährleisteten Stetigkeit jederzeit angeht. Dann erhält man ein System Formeln von der Gestalt

$$(13)\begin{cases} 0 = U_1 + \varphi_1 \left(\frac{\partial U}{\partial \zeta}\right)_1 \delta \tau, \\ 0 = U_2 + \varphi_2 \left(\frac{\partial U}{\partial \zeta}\right)_1 \delta \tau + \varphi_1 \left(\frac{\partial U}{\partial \zeta}\right)_2 \delta \tau, \\ 0 = U_3 + \varphi_3 \left(\frac{\partial U}{\partial \zeta}\right)_1 \delta \tau + \varphi_2 \left(\frac{\partial U}{\partial \zeta}\right)_2 \delta \tau + \varphi_1 \left(\frac{\partial U}{\partial \zeta}\right)_3 \delta \tau, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Hierin bezeichnen U_1, U_2, ... und $(\partial U/\partial \zeta)_1$, $(\partial U/\partial \zeta)_2$, $\partial U/\partial \zeta)_3$ ... die gegebenen Werte von U_0 und die gesuchten von $\partial U/\partial \zeta$ für τ gleich $1.\delta\tau$, $2.\delta\tau$, $3.\delta\tau$, ...; φ_1, φ_2, φ_3 ... sind die Werte von φ_0 auf dem 1., 2., 3. Element $\delta\tau$ von B ab, welche nach den Bedingungen (7) und (8) für φ von der Lage von B auf der τ-Axe unabhängig sind. Diese linearen Gleichungen bestimmen die $(\partial U/\partial \zeta)_h$ eindeutig.

Der andere Weg setzt voraus, dass sich die auf der τ-Axe liegenden Werte von U, $\partial U/\partial \zeta$ und φ_0 nach Potenzen von τ entwickeln lassen. Man kann dann setzen, indem man dem Punkte B den Wert $\tau = \tau_0$ zuordnet,

$$(14)\begin{cases} U_B = a_0 + a_1 \tau_0 + a_2 \tau_0^2 + a_3 \tau_0^3 + \dots \\ \frac{\partial U}{\partial \zeta} = b_0 + b_1 \tau + b_2 \tau^2 + b_3 \tau^3 + \dots \\ \varphi_0 = c_0 + c_1 (\tau_0 - \tau) + c_2 (\tau_0 - \tau)^2 + c_3 (\tau_0 - \tau)^3 + \dots \end{cases}$$

worin die a_h und die c_h als gegeben anzusehen sind (a_0 ist nach Annahme speciell gleich Null). Setzt man diese Ausdrücke in die Gleichung (12) ein und führt die Integration von 0 bis τ_0 aus, so erhält man eine nach Potenzen von τ_0 fortschreitende Reihe, die für jedes τ_0 verschwinden soll; durch Nullsetzen der Factoren der verschiedenen Potenzen von τ_0 erhält man die Bestimmung der gesuchten b_h und somit die von $\partial U/\partial \zeta$.

Für die Ableitung der Sätze, auf die es bei meiner Untersuchung wegen der davon gemachten Anwendung besonders ankam, ist die Kenntnis der Werte von $\partial U/\partial \zeta$ für $\zeta = 0$ nicht erforderlich; es genügt, dass dieselben durch das für $\zeta = 0$ gegebene U *bestimmt* sind. Die Gleichung (6) lässt sich bei ähnlicher Umformung, wie sie mit (10) vorgenommen ist, schreiben

$$(15) \qquad U_C = \tfrac{1}{2} U_B - \tfrac{1}{2} \int\limits_A^B \left(\varphi \frac{\partial U}{\partial \zeta} - U \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \right) d\tau$$

und man erkennt leicht, dass aus ihr wirklich die früher behaupteten Thatsachen folgen: der *Beginn* einer Bewegung der Ebene $z = 0$ pflanzt sich mit derselben Geschwindigkeit a fort, als wenn das Medium nicht absorbirte, b also gleich Null wäre; das *Ende* der Bewegung pflanzt sich gar nicht fort, insofern von der vorübergegangenen Erregung eine Nachwirkung bleibt, die erst nach unendlich langer Zeit verschwindet; die Schwingungsform ändert sich bei der Fortpflanzung.

Göttingen, October 1900.

(Eingegangen 13. November 1900.)

13. *Berechnung der Leitfähigkeit durchströmter Gase in der positiven Lichtsäule; von J. Stark.*

1. *Einleitung.* — Eine kürzlich erschienene Abhandlung[1]) hat die Leitfähigkeit durchströmter Gase zum Gegenstand; sie soll ergänzt werden durch die vorliegende Mitteilung.

Das Auftreten innerer elektromotorischer Kräfte in einem durchströmten Gase gestattet im allgemeinen nicht, dessen Leitfähigkeit nach den üblichen Methoden zu ermitteln. Eine Ausnahme hiervon macht jedoch die ungeschichtete positive Lichtsäule von grösserer Länge. In ihr ist nämlich auf relativ grosse Strecken die transversale Leitfähigkeit und das Gefälle constant; hieraus ist zu schliessen, dass in ihr das durchströmte Gas in einem gleichmässigen Zustand sich befindet und keine inneren elektromotorischen Kräfte besitzt. Für eine längere ungeschichtete positive Säule lässt sich darum die specifische Leitfähigkeit λ aus der Spannungsdifferenz e zweier Querschnitte, deren Abstand l und Querschnitt q und der Stromstärke i berechnen. Es ist $\lambda = i \, . \, l / q \, . \, e$.

In dem vorstehenden Sinne ist die Leitfähigkeit durchströmter Gase im Folgenden berechnet worden. Als experimentelles Material sind dieser Berechnung zu Grunde gelegt die Messungen von A. Herz[2]) über den Potentialgradienten im positiven Teil der Glimmentladung. Unter Leitfähigkeit ist im Nachstehenden immer Leitfähigkeit in der ungeschichteten positiven Lichtsäule verstanden und zwar nur innerhalb des Druckgebietes von 1—7 mm.

Für den Leitungsstrom in Elektrolyten wird gesetzt $\lambda = N e (u + v)$; N bedeutet die Anzahl der freien positiven oder negativen Ionen, u bez. v die Geschwindigkeit des positiven bez. negativen Ions unter der Kraft Eins, e die Ladung. u und v sind dabei als gleichförmige Geschwindigkeiten ge-

1) J. Stark, Ann. d. Phys. 3. p. 492. 1900.
2) A. Herz, Wied. Ann. 54. p. 254. 1895.

dacht. Auch wenn man Beschleunigung[1]) der Ionen in Gasen zulässt, kann man, zwar nicht allgemein, aber für die ungeschichtete positive Lichtsäule $\lambda = N e (u + v)$ setzen; nur sind dann u und v als mittlere Geschwindigkeiten zu nehmen.

W. Hittorf[2]) hat bereits auf Grund seiner Messungen die Meinung ausgesprochen, dass in der positiven Lichtsäule die Leitfähigkeit proportional mit der Stromstärke zunehme. E. Riecke[3]) hat eine Tabelle über die Leitfähigkeit durchströmter Gase berechnet; es lag indes damals noch kein so reiches experimentelles Material vor, wie es in der vorliegenden Mitteilung verwertet ist.

2. *Variation der Stromstärke.* — Durch die wandernden negativen und positiven Teilchen wird ein Gas ionisirt. Aus diesem Grunde ist die Leitfähigkeit eines durchströmten Gases abhängig von der Stromdichte. Es ist zu vermuten, dass bei constantem Druck die Beweglichkeiten der Ionen innerhalb ziemlich weiter Grenzen so gut wie unabhängig sind von dem Dissociationsgrad; die Aenderung der Leitfähigkeit bei Variation der Stromdichte rührt dann davon her, dass die Zahl der freien Ionen oder mit anderen Worten der Dissociationsgrad sich ändert.

Die Stromdichte kann man zunächst dadurch ändern, dass man den Querschnitt constant hält und die Stromstärke variirt.

Wie von verschiedenen Seiten nachgewiesen ist, lässt sich das Gefälle in der positiven ungeschichteten Lichtsäule innerhalb gewisser Grenzen durch die Formel darstellen $e = a - a_1 i$, wo a und a_1 Constante sind, i Milliampère; sind darum Druck und Querschnitt constant, so ist die Leitfähigkeit

$$\lambda . 10^3 = \frac{i}{q(a - a_1 i)}$$

oder, wenn $(i/q) = j$ und $a_1 q = b$ gesetzt wird

$$\lambda . 10^3 = \frac{j}{a - b j} .$$

b ist immer beträchtlich kleiner als a, besonders in weiten Röhren. *Für kleine Stromdichten nimmt daher die Leitfähigkeit λ proportional der Stromdichte j bez. Stromstärke zu; für grössere Stromdichten wächst λ schneller als j.*

---

1) J. Stark, Physik. Zeitschr. **2**. p. 132. 1900.
2) W. Hittorf, Wied. Ann. **20**. p. 705. 1883.
3) E. Riecke, Wied. Ann. **63**. p. 226. 1897.

Zum Belege des Vorstehenden möge die folgende Tab. I nach Tab. III und IX von Herz) und die Fig. 1 dienen.

Tabelle I.

Stickstoff.
Druck 6,3 mm,
Querschnitt 1,766 cm^2.

Stromdichte Milliamp.	Leitfähigkeit $\lambda . 10^6$
0,453	3,29
0,566	4,17
0,678	5,08
0,793	6,03
0,906	6,99
1,019	7,98
1,132	9,02
1,359	11,00

$$\lambda . 10^3 = \frac{j}{145,5 - 17,66 . j}$$

Wasserstoff.
Druck 6,84 mm,
Querschnitt 1,766 cm^2.

Stromdichte Milliamp.	Leitfähigkeit $\lambda . 10^6$
0,364	3,47
0,459	4,42
0,665	6,52
0,815	8,06
0,890	8,86
1,055	10,60
1,165	11,80
1,320	13,80

$$\lambda . 10^3 = \frac{j}{108,1 - 8,83 . j}$$

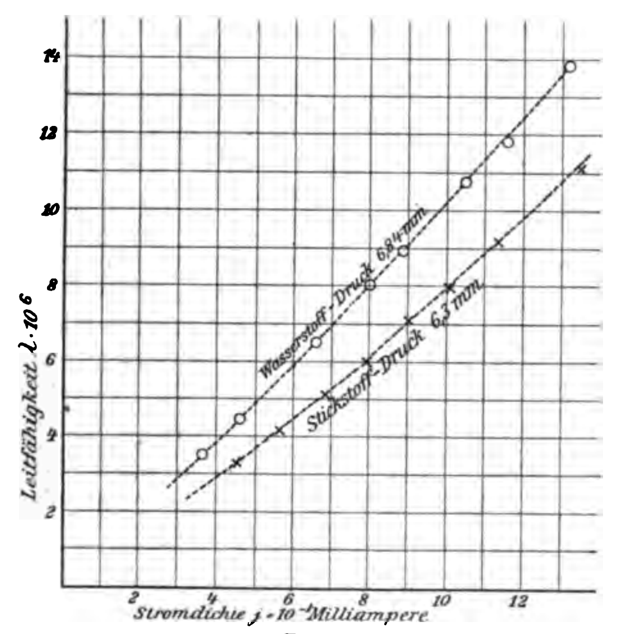


Fig. 1.

3. *Variation des Querschnittes. — Die Abhängigkeit der Leitfähigkeit von der Stromdichte zeigt sich auch für den Fall, dass die Grösse des Querschnittes variirt wird, während die Stromstärke constant bleibt. Auch in diesem Fall nimmt die Leitfähigkeit mit wachsender Stromdichte zu.* Dies zeigt die nachstehende Tabelle (nach Tab. IV von Herz) und Fig. 2.

Tabelle II.

Stickstoff, Stromstärke 1,2 Milliamp.

Querschnitt	Stromdichte	Druck 4,32	3,87	3,39	2,54	2,03	1,42
		Leitfähigkeit $\lambda . 10^6$					
5,00	0,246	—	—	—	3,92	4,89	6,64
3,14	0,382	4,02	4,38	4,86	6,03	7,32	9,78
1,766	0,679	6,90	7,51	8,19	9,97	12,2	16,0
0,783	1,528	14,3	15,9	17,7	—	—	—
$\lambda . 10^3 = \frac{j}{a' + b' j}$		$a' = 91,0$ $b' = 10,3$	$a' = 84,3$ $b' = 7,8$	$a' = 76$ $b' = 6,7$	$a' = 59,7$ $b' = 12,3$	$a' = 47,3$ $b' = 12,4$	$a' = 34,0$ $b' = 12,5$

Beim Vergleich von Figg. 1 u. 2 fällt folgendes auf. In Fig. 1 sind die Curven, welche die Abhängigkeit der Leitfähigkeit von der Stromdichte darstellen, schwach nach oben conav; in Fig. 2 sind sie nach oben schwach convex. Trägt man die Curven (λ, j), sowohl diejenigen für Variation der Stromstärke $(\lambda, j)_i$ wie diejenigen für Variation des Querschnittes $(\lambda, j)_q$, in dasselbe Coordinatensystem ein, so schneiden sich die beiden Curvensysteme. Das Gesetz der Abhängigkeit der Leitfähigkeit von der Stromdichte, das bei Variation der Stromstärke und Constanz des Querschnittes erhalten wird, weicht ab von demjenigen, das erhalten wird bei Constanz der Stromstärke und Variation des Querschnittes. Für jenen Fall lautet es $\lambda . 10^3 = \frac{j}{a - b j}$, für diesen $\lambda . 10^3 = \frac{j}{a' + b' j}$. Dort nimmt die Leitfähigkeit etwas schneller zu als die Stromdichte, hier etwas langsamer.

Diese Abweichung ist folgendermaassen zu erklären. Bei den hier mitgeteilten Berechnungen wurde als Querschnitt des

Stromes derjenige der Entladeröhre gesetzt. Dies ist wohl nur angenähert richtig. Aber davon abgesehen, müssen wir die schwach convexe Form der Curven in Fig. 2 aus zwei Gründen erwarten.

Einmal ist möglich, dass von einem Stromfaden eine Wirkung ausgeht, welche die Leitfähigkeit in benachbarten

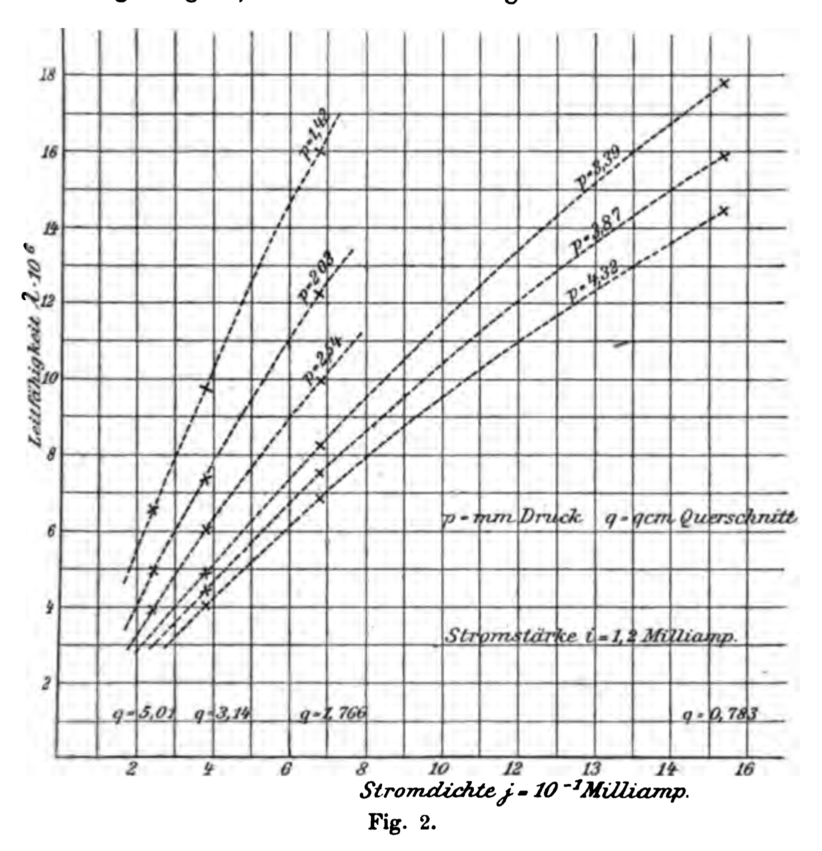


Fig. 2.

Fäden erhöht. Dies müsste zur Folge haben, dass die Leitfähigkeit nicht bloss von der Stromdichte, sondern auch von dem Querschnitt des Stromes abhängt, nämlich bei gleicher Stromdichte in weiteren Querschnitten grösser ist als in engeren. Dieser Grund ist möglich, wahrscheinlich ist folgender. Ein durchströmtes Gas giebt an die Gefässwand Wärme oder kinetische Energie ab; insofern die kinetische Energie seiner

Teilchen zu seiner Leitfähigkeit beiträgt, nimmt durch jene Abgabe an die Gefässwand die Leitfähigkeit ab. Diese Abnahme ist um so grösser, je grösser das Verhältnis von Umfang des Querschnittes zu dessen Fläche ist; die Erniedrigung der Leitfähigkeit durch die Gefässwand ist darum in engen Röhren grösser als in weiten. Wir müssen deshalb erwarten, dass *bei gleicher Stromdichte in kleinen Querschnitten die Leitfähigkeit kleiner ist als in grossen.* Dies trifft thatsächlich zu. Die nachstehende Tabelle (nach Tab. III von Herz) und Fig. 3 zeigen dies.

Tabelle III.

Stickstoff, Stromdichte 1 Milliamp.

Querschnitt	Druck			
	3,90	3,60	3,25	2,80
	Leitfähigkeit $\lambda \cdot 10^6$			
0,783	10,1	11,6	12,9	14,7
1,766	10,6	12,7	14,1	16,5
3,140	11,3	13,4	14,6	17,2

Fig. 3.

Aus diesem Resultat ist folgendes zu schliessen. Wegen des angedeuteten Einflusses darf das Gesetz der Abhängigkeit

der Leitfähigkeit von der Stromdichte nicht abgeleitet werden durch Variation des Querschnittes, sondern muss ermittelt werden durch Variation der Stromstärke bei constantem Querschnitt; es hat demgemäss die Form

$$\lambda \cdot 10^3 = \frac{j}{a - b j}.$$

Die Constanten a und b ändern sich etwas mit dem Querschnitt; für verschieden weite Röhren erhält man also verschiedene Curven $(\lambda, j)_i$ (vgl. Fig. 1); diese müssen geschnitten werden von den Curven $(\lambda, j)_q$ (vgl. Fig. 2), da diese Punkte verbinden, die auf jenen liegen.[1])

Im Anschluss an das Vorhergehende sei noch das Verhalten des Gefälles in verschieden grossen Querschnitten besprochen. Zwei cylindrische Röhren sollen verschiedenen Querschnitt haben, sie seien mit Gas von gleichem Druck gefüllt und hintereinander von dem gleichen Strom durchflossen. Würde auch für verschiedene Querschnitte wie für verschiedene Stromstärken die Leitfähigkeit durch

$$\lambda \cdot 10^3 = \frac{j}{a - b j}$$

als Function der Stromdichte dargestellt, so wäre das Gefälle in der weiten Röhre $e_1 = a - b j_1$, in der engen $e_2 = a - b j_2$. Da $j_2 > j_1$ ist, so wäre das Gefälle in der engen Röhre kleiner als in der weiten. In Wirklichkeit ist nach der Formel

$$\lambda \cdot 10^3 = \frac{j}{a' + b' j}$$

für Variation des Querschnittes in dem angenommenen Fall $e_1 = a' + b' j_1$; $e_2 = a' + b' j_2$. Und da $j_2 > j_1$ ist, so ist in der engeren Röhre das Gefälle grösser als in der weiten.

Zu diesem Resultat sind bereits E. Wiedemann und G. C. Schmidt[2]) durch Messungen gekommen. Wegen der Kleinheit von $b' j$ kann der Unterschied der Werte des Gefälles in zwei verschieden weiten Röhren nicht gross sein. Nach E. Wiedemann und G. C. Schmidt ist das Gefälle in einem Capillarrohr von 1 mm² Querschnitt nur 2—3 mal grösser als in einem Rohre von 1800 grösserem Querschnitt.

---

1) Diese Ueberlegung verdanke ich Hrn. Geheimrat E. Riecke.

2) E. Wiedemann und G. C. Schmidt, Wied. Ann. **66.** p. 323 bis 324. 1898.

Die Erhöhung des Gefälles in engen Canälen oder Poren hat wohl auch in den Versuchen Goldstein's[1]) statt, in denen in die Entladebahn eine Scheibe mit Poren eingeschaltet ist. Das Auftreten der Kathoden- und Canalstrahlen an den Poren ist auf das hohe Gefälle in diesen und auf den starken Abfall des Gefälles an den Porenöffnungen gegen den weiten Querschnitt zurückzuführen.

4. *Abhängigkeit der Leitfähigkeit vom Druck.* — Wir dürfen als sicher annehmen, dass mit abnehmender Dichte eines Gases die Beweglichkeiteu der Ionen in ihm zunehmen. Ausserdem mag bei gleicher Stromdichte die Zahl der freien positiven und negativen Ionen in der Volumeneinheit bei kleiner Dichte grösser sein als bei höherer. Wir dürfen darum erwarten, dass mit abnehmendem Druck eines Gases seine Leitfähigkeit wächst.

Die Messungen zeigen nun, dass *die Leitfähigkeit eines durchströmten Gases mit abnehmendem Druck stark zunimmt.* Dies ist aus der nachstehenden Tabelle (nach Tab. IV und XIII von Herz) und Fig. 4 zu ersehen.

Tabelle IV.

Stickstoff.

Querschnitt	0,783	1,766	3,14
Stromdichte	1,528	0,679	0,382
Druck	Leitfähigkeit 10^6		
7,99	—	4,33	—
7,00	10,5	4,88	—
6,07	11,5	5,46	—
4,96	12,5	6,34	—
4,32	14,3	6,90	4,02
3,87	15,9	7,51	4,38
3,39	17,7	8,19	4,86
2,98	19,8	9,01	5,43
2,54	—	9,97	6,03
2,03	—	12,2	7,32
1,42	—	16,0	9,78
0,94	—	—	13,40

Wasserstoff.

Querschnitt	1,766
Stromdichte	0,565
Druck	Leitf. 10^6
8	4,33
7	5.38
6	6,14
5	7,11
4	8,76

1) E. Goldstein, Wied. Ann. **11**. p. 838. 1880.

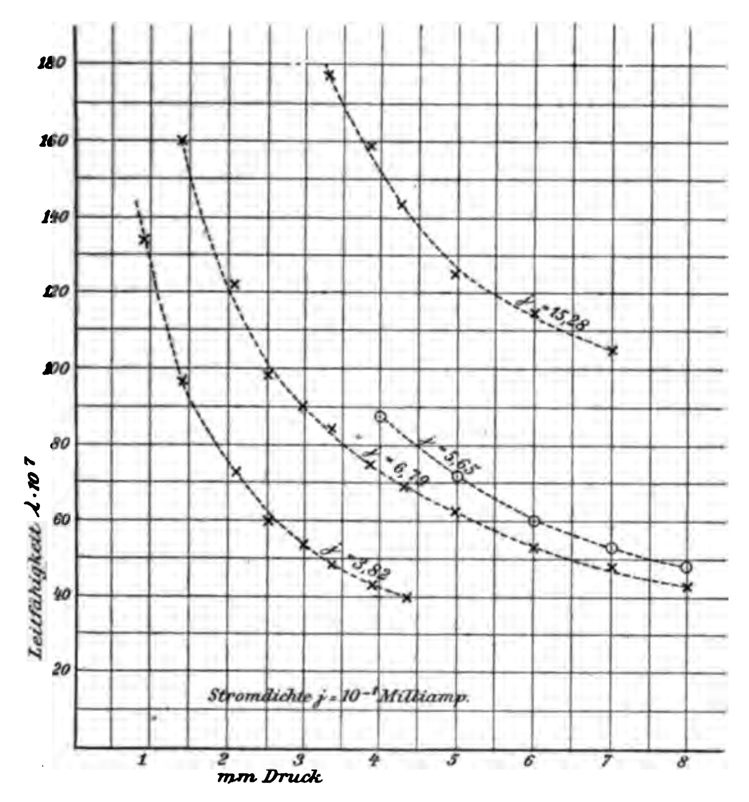


Fig. 4.

In der Formel

$$\lambda = \frac{j}{a - bj},$$

welche die Leitfähigkeit als Function der Stromstärke darstellt, sind die Grössen a und b als Functionen des Druckes p zu betrachten. Nach den von Herz gegebenen Zahlen kann mit grosser Annäherung

$$a = \alpha p, \quad b = \beta - \frac{\gamma}{p}$$

gesetzt werden. Wie man sieht, nimmt die Curve (p, λ) mit abnehmender Stromdichte mehr und mehr die Form einer gleichseitigen Hyperbel an.

5. *Leitfähigkeit verschiedener Gase.* — Wie in dem Vorstehenden gezeigt ist, lässt sich für durchströmte Gase die Leitfähigkeit in der ungeschichteten positiven Lichtsäule für das Druckgebiet 1—7 mm berechnen. Sie ist eine Function der Stromdichte und des Druckes und wird auch etwas von dem Querschnitt der Entladeröhre beeinflusst. Will man die Leitfähigkeiten verschiedener Gase miteinander vergleichen, so müssen sie auf die gleiche Stromdichte (Stromstärke), den gleichen Druck und den gleichen Querschnitt bezogen werden. Es ist empfehlenswert als Normalwerte dieser Grössen mittlere Werte zu wählen, nämlich ein Milliampère Stromdichte, 4 mm Druck und 2 cm^2 Querschnitt. Für diese Werte ist *die Leitfähigkeit*

des Stickstoffs $\lambda = 11,28 \cdot 10^{-6}$,

des Wasserstoffs $\lambda = 17,29 \cdot 10^{-6}$.

Das Verhältnis dieser Leitfähigkeiten ist 1,5. Es ändert sich wenig mit dem Drucke, wie die nachstehende Tabelle (nach Tab. XIII von Herz) zeigt.

Tabelle V.

Querschnitt 1,766, Stromdichte 0,565.

Druck	Leitfähigkeit 10^6		Verhältnis
	Wasserstoff	Stickstoff	
8	4,84	3,57	1,35
7	5,38	3,99	1,35
6	6,14	4,51	1,36
5	7,11	5,17	1,37
4	8,76	6,03	1.45

Göttingen, October 1900.

(Eingegangen 9. November 1900.)

14. *Kritisches zur Herleitung der Wien'schen Spectralgleichung;*
von E. Jahnke, O. Lummer und E. Pringsheim.

Durch die spectrobolometrischen Untersuchungen von O. Lummer und E. Pringsheim[1]) ist mit Sicherheit nachgewiesen worden, dass die Wien'sche Spectralgleichung die Energieverteilung im Spectrum des schwarzen Körpers nicht allgemein darstellt. In voller Uebereinstimmung hiermit stehen die Versuche von Beckmann[2]) und von Rubens und Kurlbaum.[3]) Infolge dieser experimentellen Resultate sieht M. Planck[4]) seine theoretische Ableitung der Wien'schen Spectralgleichung nicht mehr als zwingend an, Wien selbst anerkennt, dass für lange Wellen Abweichungen von seinem Gesetze beobachtet worden sind, und auch Paschen[5]) scheint jetzt das Vorhandensein solcher Abweichungen zuzugeben, obgleich seine bisher publicirten Versuche[6]) das Wien'sche Strahlungsgesetz mit überraschender Genauigkeit selbst bei hohen Temperaturen und bis zu Wellenlängen von 9 μ bestätigt haben.

1. Trotzdem macht Wien den Versuch[7]), die von ihm gegebene Herleitung seiner Spectralgleichung wenigstens teilweise aufrecht zu erhalten, da sie die schwarze Strahlung für kurze Wellen innerhalb der Beobachtungsfehler darstelle. Daher hält er es für wahrscheinlich, dass die von ihm gemachten

---

1) O. Lummer u. E. Pringsheim, Verhandl. d. Deutsch. Physikal. Gesellsch. 1. p. 23—41 und p. 215—235. 1899; ferner 2. p. 163—180. 1900.

2) H. Beckmann, Inaugural-Dissertation, Tübingen 1898; vgl. auch H. Rubens, Wied. Ann. 69. p. 576—588. 1899.

3) H. Rubens u. F. Kurlbaum, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin 1900. p. 929—941.

4) M. Planck, Verhandl. d. Deutsch. Physikal. Gesellsch. 2. p. 202—204. 1900.

5) Vgl. Anm. 1 auf p. 202 der citirten Planck'schen Arbeit.

6) F. Paschen, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin 1899. p. 405—420 und p. 959—976. Vgl. auch F. Paschen und H. Wanner, l. c. p. 5—11. 1899.

7) W. Wien, Ann. d. Phys. 3. p. 530—539. 1900.

Hypothesen bei nicht allzu langen Wellen annähernd zutreffen; bei längeren Wellen würde man von anderen Hypothesen auszugehen haben. Dementsprechend seien verschiedene Strahlungsgesetze für lange und für kurze Wellen zu erwarten.

Eine solche Zweiteilung kann jedoch hier nicht in Betracht kommen. Denn die — von Wien allerdings nicht citirten — Versuche von Lummer und Pringsheim haben gezeigt, dass die Abweichungen nicht allein von der Wellenlänge, sondern auch von der Temperatur abhängen. Maassgebend für sie ist lediglich das Product λT. Das gleiche Resultat folgt auch aus dem Wien'schen Verschiebungsgesetz. Indem Wien sagt: „Wenn sich solche Abweichungen bei einer bestimmten Temperatur zeigen, so folgt aus meinem Verschiebungsgesetz, dass sie mit steigender Temperatur zu immer kleineren Wellenlängen vorrücken," entzieht er selbst dem Versuch, besondere Strahlungsgesetze für lange und für kurze Wellen als wahrscheinlich hinzustellen, den Boden.

2. Der erste, welcher mit Hülfe des Maxwell'schen Verteilungsgesetzes und moleculartheoretischer Hypothesen eine Spectralgleichung abgeleitet hat, ist W. Michelson.[1]) W. Wien knüpft an die Michelson'schen Betrachtungen an und stellt sich die Aufgabe, mit Hülfe seines allgemein anerkannten Verschiebungsgesetzes[2]) die Anzahl der von Michelson gebrauchten Hypothesen zu verringern.[3])

Um die Michelson'sche Hypothese, dass auch bei einem *festen* Körper die Geschwindigkeiten der Molecüle nach dem Maxwell'schen Gesetze verteilt sind, zu vermeiden, benutzt Wien ein *Gas* als strahlenden Körper, dessen Strahlung er dadurch zur schwarzen macht, dass er es in einen Hohlraum mit vollkommen spiegelnden Wänden einschliesst. Bei der Berechnung der schwarzen Strahlung wird aber irrtümlich das im Hohlraum strahlende Gas wie ein *freistrahlendes* behandelt, indem diejenigen Veränderungen vollkommen vernachlässigt

1) W. Michelson, Journ. Soc. Phys.-chim. russe **19.** p. 79. 1887; Journ. de phys. (2) **6.** p. 467—479. 1887; Phil. Mag. (5) **25.** p. 425—435. 1888.

2) W. Wien, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin 1893. p. 55—62; Wied. Ann. **52.** p. 132—165. 1894. Vgl. hierzu M. Thiesen, Verhandl. d. Deutsch. Physikal. Gesellsch. **2.** p. 67. 1900.

3) W. Wien, Wied. Ann. **58.** p. 662—669. 1896.

werden, welche die Strahlung dadurch erleidet, dass sie im Hohlraume eingeschlossen ist. Nur durch diese von dem Einflusse der Absorption und Reflexion herrührenden Veränderungen verwandelt sich jede *beliebige* Strahlung — hier die des Gases — in diejenige des *schwarzen* Körpers. Wenn man statt des strahlenden Gases irgend einen anderen Körper, z. B. ein glühendes Platinblech, in den spiegelnden Hohlraum einführen würde, so würde man durch die Wien'sche Schlussfolgerung dazu gelangen, die Strahlung des schwarzen Körpers auch mit der des freistrahlenden Platins zu identificiren.

Bei der früheren Kritik[1]) dieses Verfahrens haben wir darauf hingewiesen, dass es bei der Gasstrahlung im spiegelnden Hohlraum unzulässig ist, die Strahlungsenergie E_λ der *Anzahl* der Molecüle proportional zu setzen, welche Strahlen der Wellenlänge λ aussenden. Auf diesen Einwurf antwortet Wien[2]): „dass die Anzahl der Molecüle durch den zweiten Hauptsatz notwendig wird, weil die Irreversibilität und damit die Herstellung des Wärmegleichgewichtes nur erst durch das Zusammenwirken einer grossen Anzahl von Molecülen hervorgerufen wird. Bei einer geringen Anzahl würde sich überhaupt kein Gleichgewichtszustand der Strahlung herstellen."

Diese Motivirung trifft jedoch nicht den erhobenen Einwand. Denn selbst wenn man zugiebt, dass die Anwendung des zweiten Hauptsatzes eine grosse Anzahl von Molecülen verlangt, so lässt sich damit doch unmöglich die der Kirchhoff'schen Hohlraumtheorie widersprechende Wien'sche Hypothese rechtfertigen, dass die Strahlungsenergie des Gases im spiegelnden Hohlraum *proportional der Anzahl* der Molecüle ist. Diese Annahme hat höchstens für ein *freistrahlendes* Gas einen Sinn.

Die Uebertragung der Michelson'schen Hypothesen von einem festen Körper auf ein Gas muss daher als missglückt angesehen werden. Die weitere Wien'sche Herleitung kann somit höchstens unter der auch von Michelson gemachten Annahme aufrecht erhalten werden, dass das Maxwell'sche

1) O. Lummer u. E. Pringsheim, Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. 1. p. 31. 1899.

2) W. Wien, Ann. d. Phys. 3. p. 536. 1900.

Gesetz direct auf die Molecüle des *freistrahlenden* schwarzen Körpers anwendbar ist.

3. Um dem unbekannten Einfluss Rechnung zu tragen, welchen die Strahlung eines jeden Molecüls durch die Gesamtheit der übrigen Molecüle und durch die Absorption im strahlenden Körper erfährt, setzt Michelson die Strahlungsenergie auch noch einer Function $f(T)$ proportional. Durch Einführung dieses aus kinetischen Vorstellungen nicht herleitbaren Factors verlässt Michelson den rein kinetischen Boden, auf dem seine übrigen Hypothesen stehen. Ausserdem ist die Michelson'sche Formel nicht eindeutig, sondern sie enthält noch unbestimmte Parameter. Es erschien daher als ein grosser Vorzug der Wien'schen Herleitung, dass sie ohne die genannte Hypothese zu einer eindeutigen Spectralgleichung zu gelangen schien.

Aber die Einfachheit der Wien'schen Herleitung ist nur eine scheinbare; denn auch Wien hat wie Michelson, ohne freilich darauf hinzuweisen, einen Factor $f(T)$ bei seiner Herleitung benutzt. Er hat nämlich stillschweigend im Maxwell'schen Ausdruck für die Anzahl der Molecüle gleicher Geschwindigkeit den Factor $T^{-3/2}$ weggelassen, oder was dasselbe ist, den bei richtiger Anwendung des Maxwell'schen Gesetzes sich ergebenden Ausdruck mit der Function $f(T) = T^{+3/2}$ multiplicirt. Hätte Wien diesen Factor beibehalten, so wäre er zu der unbrauchbaren Spectralgleichung

$$E = C(\lambda T)^{-3/2} \lambda^{-5} e^{-\frac{c}{\lambda T}}$$

gelangt, nach welcher die Energie einer jeden Wellenlänge mit steigender Temperatur abnehmen würde. Diese von uns festgestellte Thatsache[1]) erkennt Wien vollkommen an, erklärt aber, dass er bei seiner Herleitung die Begründung für die Fortlassung des Factors $T^{-3/2}$ nicht gegeben habe, „weil dieselbe ausserordentlich einfach ist." Ausserdem betont er, dass das Fortlassen von $T^{-3/2}$ keine neue Hypothese involvire, vielmehr durch die thermodynamischen Gesetze gefordert werde.

Die Annahme, dass die Energie einer Wellenlänge mit steigender Temperatur nicht abnehmen darf, ist allerdings

1) O. Lummer u. E. Jahnke, Ann. d. Phys. 3. p. 286. 1900.

einfach. Aber diese Annahme genügt keineswegs, um das Fortlassen von $T^{-5/4}$ als „wohlbegründet“ erscheinen zu lassen.

Eine solche Begründung ist vielmehr unmöglich, da dieses Fortlassen nicht nur willkürlich ist, sondern mit der Einführung einer *weiteren, durch die Erfahrung widerlegten, Hypothese* gleichbedeutend ist. Der Bedingung, dass E mit wachsendem T nicht abnehme, wird schon genügt durch Einführung der *unbestimmten* Function $f(T)$. Diese führt aber zu folgendem Specialfall der Lummer-Jahnke'schen Gleichung

$$E = C\,T^{5-\mu}\,\lambda^{-\mu}\,e^{-\frac{c}{\lambda T}},$$

wo der unbestimmte Exponent μ jede positive Zahl gleich oder kleiner als 5 bedeutet. Will man zu einer *bestimmten* Spectralgleichung gelangen, so muss man mit Hülfe einer *neuen* Hypothese den Wert von μ specialisiren. So geht die allgemeine Formel für $\mu = 5$ in die Wien'sche über. Diese Specialisirung von μ ist identisch mit der Hypothese

$$\lim_{T=\infty} E = \text{endlich}.$$

Gegen diese Hypothese aber spricht die Erfahrung, denn die Versuche von Rubens und Kurlbaum für lange Wellen zeigen, dass die von der Wien'schen Gleichung für jede Wellenlänge geforderte *endliche* Grenze der Strahlungsenergie:

$$\text{const.}/\lambda^5$$

schon bei mässigen Temperaturen überschritten wird.

Benutzt man statt dieser Hypothese die von der Erfahrung besser gestützte Beziehung

$$[\lim E = \text{const.}\,T]_{T=\infty},$$

so wird in der obigen Lummer-Jahnke'schen Gleichung $\mu = 4$, und man erhält aus ihr die Rayleigh'sche Formel[1])

$$E = C\,T\,\lambda^{-4}\,e^{-\frac{c}{\lambda T}}.$$

Da auch diese keine allgemeine Gültigkeit hat, so sieht man, dass der von Michelson eingeschlagene Weg überhaupt zu keiner allgemein gültigen Spectralgleichung führt.

---

1) Lord Rayleigh, Phil. Mag. 49. p. 539. 1900.

4. Gegenüber den Worten Wien's[1]): „Weshalb dadurch (es ist das Fortlassen von $T^{-5/2}$ gemeint) der physikalische Sinn des Maxwell'schen Verteilungsgesetzes verloren gehen soll, habe ich nicht verstehen können", werde ausserdem darauf hingewiesen[2]), eine wie untergeordnete Rolle bei der Wien'schen Herleitung die von ihm als erforderlich genannten Hypothesen spielen. Wien wäre zu seiner Spectralgleichung auch gelangt, wenn er einfach die Strahlungsenergie proportional dem Factor

$$e^{-\frac{\varphi(\lambda)}{T}}$$

gesetzt und zur Bestimmung der unbekannten Functionen das Stefan'sche Gesetz, das Wien'sche Verschiebungsgesetz und die Hypothese

$$\lim_{T=\infty} E = \text{endlich}$$

hinzugenommen hätte. Dieser Factor hat aber offenbar nur noch eine weitläufige Verwandtschaft mit dem Maxwell'schen Verteilungsgesetz. Die Herleitung der Wien'schen Spectralgleichung entbehrt somit des theoretischen Charakters.

Wir fassen zum Schluss unsere Bemerkungen dahin zusammen, dass Wien's Erwiderung nicht geeignet ist, unsere Einwände zu entkräften, und dass die Wien'sche Herleitung auch nicht für das Gebiet der kurzen Wellen aufrecht erhalten werden kann. Aber auch wenn Wien's Spectralgleichung das wahre Gesetz der schwarzen Strahlung für alle Werte von λ und T darstellen würde, hätte man kein Recht, auf die Gültigkeit der zu Grunde gelegten Hypothesen zu schliessen, da diese nur eine untergeordnete Rolle bei der Herleitung spielen.

1) W. Wien, Ann. d. Phys. 3. p. 537. 1900.
2) Vgl. O. Lummer u. E. Jahnke, l. c. p. 290 u. 296.

(Eingegangen 12. December 1900.)

15. *Zur Geschichte der Telegraphie;* *von L. Lewin.*

Vor einiger Zeit fiel mir, bei toxicologischen Studien, in einem nicht häufig vorkommenden Werke: „De L'Ancre, L'incrédulité et mescreance du sortilege plainement convaincue, Paris 1622" eine Notiz auf, die vielleicht verdient, weiteren Kreisen bekannt gemacht zu werden.

Unter den verschiedenen Arten der Weissagekunst, Zauberei und anderem abergläubischen Spuk führt der Verfasser auch die *Arithmantie* an, und, um zu erläutern was sie sei, erzählt er die folgende Begebenheit, die ich wörtlich anführen will:

„A l'Arithmantie se peut aussi raporter, ce grand et beau secret qu'un Allemand fit voir au roy Henry le Grand, qui est l'industrie et dexterité de faire parler et entendre les hommes absens pour esloignez qu'ils soient, et ce par le moyen de l'Aimant. Il frotta premierement deux aiguilles d'Aimant, et puis les attacha separément en deux diuers horloges, autour desquels estoient escrites et grauées en rond les vingt et quatre lettres de l'Alphabet: Si bien que lors qu'on vouloit dire ou faire entendre ce qu'on desiroit: on remuoit et dressoit la pointe de l'esguille sur les lettres qui estoient necessaires pour composer et signifier tous les mots et parolles qu'il falloit: et à mesure qu'on tournoit et dressoit une esguille, celle de l'autre horloge pour si distant et separé qu'il fust, suiuoit entierement ce mesme mouuement. Le Roy voyant un si beau secret luy deffendit de le diuulguer, comme *pouvant porter des tres-dangereux aduertissemens és armées et villes assiegées.* Outre que Mardobée qui traicte de la nature de l'Aimant en reprouue et prohibe la communication."

Es ist von dem in Mystik, Aberglauben und in Hass gegen die Vernunft befangenen Verfasser des Buches nicht zu verlangen, dass er jene Einrichtung eines Zeigertelegraphen genauer kannte. So viel scheint immerhin aus dieser Mitteilung

hervorzugehen, dass durch diese deutsche Erfindung schon
ca. 300 Jahren eine Verständigung in der Schriftsprache
grössere Entfernungen hin mittels magnetischer Kräfte
möglicht wurde. Besonders interessant ist es, dass gerade
praktische Nutzanwendung dieser Erfindung für Kriegszwe
in den Vordergrund gestellt wird, und es wäre wichtig f
zustellen, ob der König Heinrich IV. oder andere später
dieser Erfindung Gebrauch gemacht haben.

(Eingegangen 30. October 1900.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1901. № 2.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 4.

1. *Der elektromagnetische Rotationsversuch und die unipolare Induction*[1]; *von E. Hagenbach.*

Hr. Lecher[2]) beschreibt einige Versuche, welche ihn veranlassen, die in den Lehrbüchern gewöhnlich gegebene Erklärung mancher Rotationsversuche für einen „theoretischen und experimentellen Trugschluss" zu erklären. Da ich mit den Behauptungen des Hrn. Lecher nicht einverstanden bin, so habe ich in Verbindung mit Hrn. H. Veillon eine Anzahl Versuche angestellt, um Aufschluss zu erhalten über die so verschieden aufgefassten Vorgänge, die sich einerseits beziehen auf die elektromagnetischen Rotationsversuche, wie sie bald nach der Oersted'schen Entdeckung von Faraday[3]) und Ampère[4]) zuerst angestellt und untersucht und dann durch viele Forscher in mannigfacher Weise wiederholt und modificirt worden sind, und andererseits auf die damit zusammenhängenden Inductionserscheinungen, die von Wilh. Weber[5]) mit dem vielleicht nicht ganz passenden Namen der unipolaren Induction bezeichnet worden sind. Die Beziehungen zwischen Strom und Magnetismus finden einen klaren, bestimmten Ausdruck im Biot-Savart'schen Gesetze; es entsteht somit in erster Linie die Frage, ob die beobachteten Erscheinungen aus diesem Gesetze erklärt werden können;

1) Programm der Rectoratsfeier der Universität Basel. 1900.

2) E. Lecher, Wied. Ann. **69.** p. 781. 1899.

3) M. Faraday, Exp. Research. **2.** p. 127. 1821.

4) A. M. Ampère, Ann. de chim. et de phys. **20.** p. 60. 1822; **37.** p. 113. 1828; Collection de mémoires relatifs à la physique, publiés par la société française de physique **2.** p. 192. 1885; **3.** p. 246 u. 275. 1887.

5) W. Weber, Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1839, herausgegeben von Gauss u. Weber p. 63. 1839; Pogg. Ann. **52.** p. 353. 1841.

soweit meine Versuche gehen, glaube ich dies behaupten zu können.

Der von mir gebrauchte Apparat war im wesentlichen mit dem in Fig. 1 der citirten Abhandlung des Hrn. Lecher dargestellten übereinstimmend; nur war die mit *a* bezeichnete axiale Zuleitung fest mit dem Magnet verbunden, und es war ferner die Einrichtung getroffen, dass man den Versuch auch nur mit *einem* Magnet anstellen, und diesen sowohl centrisch als excentrisch einstellen konnte.

1. Versuche mit einem centrisch gestellten, d. h. um seine eigene Axe drehbaren Magnet.

Ein cylindrischer Magnetstab (Fig. 1), der oben den Südpol S und unten den Nordpol N hat und bei 15 cm Länge einen Durchmesser von 1 cm besitzt, ist in Spitzenlagern d und e, die mit Quecksilber angefüllt sind, leicht drehbar. Man kann von oben oder unten den treibenden Strom zuleiten oder den inducirten Strom ableiten und zwar vollkommen axial, wenigstens so weit, als eine Einwirkung noch merklich sein kann. Ferner kann in der Mitte des Magnets bei C oder an einer beliebigen anderen Stelle der Strom zu- oder abgeleitet werden. Bei Zuleitung des treibenden Stromes, wobei die zu beobachtende Drehung durch die Reibung möglichst wenig gehindert werden darf, war der Schleifcontact durch eine unmittelbar am Magnet mit Hülfe eines Korkes angebrachte Quecksilberrinne gebildet; während bei der Ableitung des inducirten Stromes der Draht entweder unmittelbar oder zur Verminderung der Thermoströme vermittelst einer mit eingedrehter Rinne versehenen Kupferhülse angelegt wurde. Zur Erzeugung der Inductionsströme konnte dem Apparat mit einem kleinen Elektromotor durch die Rolle w eine möglichst gleichförmige Rotationsgeschwindigkeit erteilt werden.

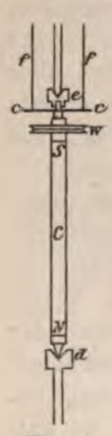


Fig. 1.

Wir wollen nun theoretisch bestimmen, was aus dem Biot-Savart'schen Gesetz für die Drehung des Apparates durch den Strom und für die Induction eines Stromes durch die Drehung folgt.

Wenn wir einen magnetischen Pol von der Stärke μ[1]) und im Abstand ϱ ein Leiterelement ds haben, durch welches ein Strom von der Intensität i geht, wenn ferner ϑ den Winkel bedeutet, den das Element ds mit der Verbindungslinie ϱ bildet, so erhalten wir bekanntlich nach dem Biot-Savart'schen Gesetze die Kraft: $i\mu \sin\vartheta\, ds/\varrho^2$. Die Richtung der Kraft steht senkrecht auf der durch das Element ds und den Abstand ϱ gehenden Ebene; sie wirkt in gleicher Grösse und Richtung auf μ und auf ds, nur ist der Sinn für μ und ds umgekehrt; er wird für μ durch die Ampère'sche und für ds durch die Fleming'sche Regel bestimmt.

Wenn Magnetelement und Stromelement zwei verschiedenen Körpern angehören, von welchen der eine fest und der andere drehbar ist, wie das bei den magnetoelektrischen Maschinen, bei den Dynamos, bei den Elektromotoren, bei den Messapparaten für elektrische Ströme und auch bei einigen Rotationsapparaten der Fall ist, so wird kaum bezweifelt werden, dass die Bewegungserscheinungen nach dem Biot-Savart'schen Gesetze und die Inductionserscheinungen nach dem Lenz'schen Gesetze erklärt werden können.

Wenn jedoch das Stromelement und das magnetische Element dem gleichen Körper angehören und fest miteinander verbunden sind, so entsteht die Frage, ob auch dann das Biot-Savart'sche Gesetz zur Geltung kommt, und ob hier durch innere Kräfte zwischen den Teilen eines starren Körpers eine Bewegung und umgekehrt durch die Bewegung desselben ein Inductionsstrom erzeugt werden kann.

In diesem Fall erhalten wir nämlich ein Drehungsmoment $i\mu \sin\vartheta\, ds/\varrho$, das auf den Körper wirkt, dem ds und μ angehören. Wenn wir nur die Wirkung dieses aus inneren Kräften entstehenden Drehungsmomentes betrachten, so kommen wir auf ein Unding. Dasselbe kann fortwährend einen Widerstand überwinden oder Geschwindigkeit erzeugen und somit Arbeit leisten, ohne dass die potentielle Energie vermindert wird oder sonstwo eine entsprechende Energiemenge verloren geht. Allein

1) Wir bezeichnen nach dem Vorgang von Ampère und Gauss die Magnetismusmenge mit μ, da hier eine Verwechselung nicht möglich ist mit dem μ, das in neuerer Zeit für die magnetische Permeabilität gebraucht wird.

ganz anders gestaltet sich die Sache, wenn wir in Betracht ziehen, dass das Stromelement nicht nur ein Massenteilchen ist, von dem eine Kraft ausgeht, sondern ein Bahnelement, dem fortwährend von aussen Strom zugeführt werden muss, und welches nur mit Aufwand von Energie durch das magnetische Feld bewegt werden kann. Der Widerspruch mit dem Satz der Erhaltung der Energie verschwindet, sobald wir zugleich die Induction in Rechnung ziehen.

Wenn der Leiter ds durch das magnetische Feld bewegt wird, so entsteht in demselben eine elektromotorische Kraft, und das Stromelement kann nur durch das magnetische Feld bewegt werden, wenn ihm fortwährend die zur Ueberwindung der inducirten elektromotorischen Gegenkraft nötige Energie zugeführt wird. Der Satz der Erhaltung der Energie stellt somit die Forderung, dass die überwundene elektromotorische Energie und die dafür aufgewandte mechanische Energie einander gleich seien.

Wenn wir mit de die im Element ds inducirte elektromotorische Kraft, mit f die Feldstärke, mit ϑ den Winkel, den die Richtung des Elementes mit der Feldstärke macht, mit dt die unendlich kleine Zeit und mit dx den unendlich kleinen nach der Richtung der Kraft in der Zeit dt zurückgelegten Weg bezeichnen, so giebt die Bedingung, dass die aufgewandte elektrische Energie gleich ist der geleisteten mechanischen Arbeit:

$$i\,de\,dt = f\,i \sin\vartheta\,ds\,dx$$

oder

$$\frac{de}{ds} = f \sin\vartheta \frac{dx}{dt} = f \sin\vartheta\, v,$$

wenn wir v die Geschwindigkeit nennen, mit welcher ds senkrecht zu der durch ds und die Feldrichtung gehende Ebene bewegt wird. Die in der Längeneinheit des bewegten Leiters erzeugte elektromotorische Kraft de/ds wirkt entgegen dem Sinne des Stromes i, oder, was dasselbe heisst, sie sucht einen Strom zu erzeugen, der in entgegengesetztem Sinne geht wie der Strom, welcher die Bewegung erzeugt.

Das bekannte Lenz'che Inductionsgesetz folgt also naturnotwendig aus dem Biot-Savart'schen Gesetze, wenn man den Satz der Erhaltung der Energie damit verbindet und an-

nimmt, dass die Energie zur Leistung der mechanischen Arbeit vom Strome geliefert werden muss. Es kann somit ohne Widerspruch auch für den Fall, dass Magnetpol und Stromelement dem gleichen starren Körper angehören, das Biot-Savart'sche Gesetz Verwendung finden; und wir wollen nun sehen, was aus dieser Auffassung für die Bewegung unseres Magnets durch den Strom und für die durch Drehung des Magnets inducirte elektromotorische Kraft folgt.

Um die Rechnung zu vereinfachen, ersetzen wir den wirklichen Magnet durch einen ideellen Magnet, der in der Distanz $2l$ zwei gleich starke Pole hat, den Nordpol von der Stärke $+\mu$ unten, und den Südpol von der Stärke $-\mu$ oben. Wir denken uns also den ganzen freien Nordmagnetismus concentrirt in einem horizontalen Querschnitt beim Nordpol und den ganzen freien Südmagnetismus in einem horizontalen Querschnitt beim Südpol. Wenn schon diese Annahme den wirklichen Verhältnissen nicht entspricht, so können dennoch die daraus abgeleiteten Folgerungen in Bezug auf die Grösse als eine erste Annäherung betrachtet werden. Für die Entscheidung der Hauptfrage, ob und wie durch innere Kräfte eine Drehung unseres Apparates zu stande kommt, ist es ganz gerechtfertigt, die für den ideellen Magnet berechneten Wirkungen auch für den wirklichen Magnet anzunehmen, da wir ja den wirklichen Magnet auffassen können als eine Uebereinanderlagerung von unendlich vielen gleichgerichteten ideelen Magneten, die mit den Indifferenzpunkten aufeinander liegen, deren Längen von Null bis zur Länge des wirklichen Magnets variiren und deren Polstärken der Intensität des freien Magnetismus an den entsprechenden Punkten proportional sind.

Wir nehmen nun an, dass ein Stom von der Intensität i in der Mitte des Magnetstabes durch einen horizontalen Draht zugeleitet und am oberen Ende des Magnets jenseits des Südpoles durch einen verticalen Draht abgeleitet wird, wie dies in Fig. 2 angedeutet ist; nur muss man sich denken, dass der elektrische Strom im Magnet nicht in einer Linie, sondern in der ganzen Breite des Magnets fliesst. Die Wirkung der äusseren horizontalen Zuleitung auf den Nordpol und den Süd-

Fig. 2.

pol bewirkt ein Drehungsmoment um eine horizontale Axe, dessen Componente in der Richtung der verticalen Axe gleich Null ist; für die Erklärung der Drehung fällt also die äussere horizontale Zuleitung ausser Betracht. Die ganze Wirkung lässt sich nur erklären aus den Kräften, mit welchen der verticale Strom auf den freien Strom der Pole wirkt.

Fig. 3 stellt einen Horizontalschnitt durch den Magnet beim Südpol vor. Wir zerlegen den Strom i in ein Bündel paralleler Stromfäden von der Stärke $d\,i$ und den freien Magnetismus des Südpoles μ in magnetische Elemente von der Stärke $d\,\mu$. Wir bezeichnen mit ϱ den Abstand von $d\,i$ und $d\,\mu$; der grösstmögliche Wert von ϱ ist der Durchmesser des Magnets. Im vorliegenden Fall, wo wir einen im Vergleich zum Durchmesser langen Magnet haben und der Strom nach oben noch weit in verticaler Richtung fortgeführt wird, ist ϱ stets klein im Vergleich zu den Längen des Stromfadens zu beiden Seiten des Südpoles. Wir bekommen somit einen nur um weniges zu grossen Wert, wenn wir bei der Berechnung der Wirkung den Stromfaden nach beiden Seiten ins Unendliche verlängern. Die Kraft, mit der ein Stromfaden $d\,i$ auf ein magnetisches Element $d\,\mu$ wirkt, ist dann $2\,d\,i\,d\,\mu\,/\,\varrho$ in der Richtung des Pfeiles; mit einer gleich grossen Kraft, aber in entgegengesetztem Sinn, wie der Pfeil bei $d\,i$ andeutet, wird der Stromfaden vom magnetischen Element getrieben; die beiden Kräfte geben zusammen das Drehungsmoment $2\,d\,i\,d\,\mu$, mit dem $d\,i$ und $d\,\mu$ aufeinander wirken. Die Wirkung des Stromfadens auf den ganzen Magnetismus des Südpoles ist $2\,d\,i\,\mu$, und für das Drehungsmoment D, mit welchem der ganze Strom i auf den Südpol wirkt, erhalten wir

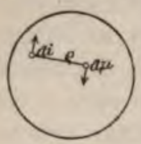


Fig. 3.

$$D = -\,2\,i\,\mu;$$

wir setzen das negative Zeichen, da bei unserer Voraussetzung, dass der Nordpol unten ist und der Strom von unten nach oben geht, die hervorgebrachte Drehung eine negative ist, d. h. im Sinne des Uhrzeigers geht. Die Wirkung zwischen Nordpol und Strom ist bei den oben angenommenen Verhältnissen zwischen Länge und Durchmesser des Magnets zu vernachlässigen.

Wenn der Strom i das Drehungsmoment D giebt, so muss, wie wir oben schon gezeigt haben, infolge des Satzes der Erhaltung der Energie durch Induction eine dem Strom i entgegenwirkende elektromotorische Kraft e erzeugt werden, deren elektrische Arbeit für jede Zeit und somit auch für die Zeiteinheit gleich und entgegengesetzt ist der mechanischen Arbeit des Drehungsmomentes; wenn wir also die Winkelgeschwindigkeit mit ω bezeichnen, so haben wir:

$$D\,\omega = -\,e\,i,$$

oder

$$\frac{D}{i} = -\,\frac{e}{\omega};$$

wir bezeichnen D/i, das heisst das von dem Strom *eins* erzeugte Drehungsmoment mit D_1 und e/ω, das heisst die bei der Winkelgeschwindigkeit *eins* erzeugte elektromotorische Kraft mit e_1 und haben dann ganz allgemein bei jedem drehbaren starren Körper, der freien Magnetismus enthält und von einem Strome durchflossen wird, die einfache Beziehung

$$D_1 = -\,e_1.$$

Das umgekehrte Zeichen von D_1 und e_1 besagt, dass bei gleichgesinnter Drehung der treibende Strom und die inducirte elektromotorische Kraft in entgegengesetztem Sinne gehen.

Im vorliegenden Fall ist

$$D_1 = -\,e_1 = -\,2\,\mu.$$

Um das Ergebnis der Versuche mit dem Resultate der Theorie zu vergleichen, war es vor allem nötig, die Grösse μ zu bestimmen. Wir haben dieselbe aus dem magnetischen Momente abgeleitet, indem wir die Poldistanz gleich $^5/_6$ der Magnetlänge, also im vorliegenden Fall gleich 12,5 cm annahmen.

Die magnetischen Momente der von uns angewandten Magnete bestimmten wir aus den Ablenkungen in der ersten Hauptlage unter Annahme der von Hrn. H. Veillon für unser Laboratorium bestimmten Horizontalcomponente des Erdmagnetismus. Es ergab sich für den einfachen Magnet von 15 cm

$$\mu = 148\,C^{3/2}\,G^{1/2}\,S^{-1}.$$

Wiederholte Bestimmungen während der Versuchszeit haben bei diesem Magnet eine so geringe Abnahme des Momentes ergeben, dass wir dieselbe nicht zu berücksichtigen brauchen. Somit ergiebt sich bei dem vorliegenden Apparate für das Drehungsmoment bei der Einheit der Stromstärke und für die inducirte elektromotorische Kraft bei der Einheit der Winkelgeschwindigkeit

$$-D_1 = e_1 = 296\ C^{3/2}G^{1/2}S^{-1}.$$

Es handelt sich nun darum, dieses durch die theoretische Rechnung gefundene Resultat durch die Versuche zu prüfen, und zwar an dem gleichen Apparate für das Drehungsmoment und für die inducirte elektromotorische Kraft.

Beim Durchleiten des Stromes wurde der Apparat in sehr kräftige Drehung versetzt[1]) und zwar in dem durch die Rechnung angegebenen Sinne. Da eine nicht unbedeutende Reibung in den Lagern und an der Zuleitungsstelle des Stromes zu überwinden war, so musste ein Strom von 10—20 Ampère angewandt werden. Es wäre nun ziemlich schwierig gewesen, während der Rotation des Apparates durch einen Versuch die Grösse des Drehungsmomentes zu bestimmen. Wir haben deshalb diese Messung im ruhenden Zustande des Gleichgewichtes vorgenommen, indem wir den unten in einem Quecksilbernapf tauchenden Magnet vermittelst eines kleinen Querbalkens *cc* (Fig. 1) an zwei Coconfäden *f* bifilar aufhängten und mit Spiegelablesung den Winkel der Drehung bestimmten, den ein Strom von bestimmter Stärke hervorbrachte. Die Stromstärke wurde mit einem Präcisionsampèremeter von Siemens & Halske ermittelt.

Das Drehungsmoment D wird bestimmt nach der Formel

$$D = \frac{P a b \sin\varphi}{h},$$

wenn P das Gewicht des aufgehängten Apparates, a die halbe Fadendistanz oben, b die halbe Fadendistanz unten, h die Länge der Fäden und φ den Drehungswinkel bedeutet.

1) Diese Rotation eines Magnets um seine eigene Axe wurde zuerst von Ampère gezeigt, während Faraday dieselbe anfänglich für nicht möglich hielt. Collect. de mém. **2.** p. 163 und p. 201. 1885; **3.** p. 258 und p. 275. 1887; M. Faraday, Exp. Res. **2.** p. 131. 1844.

Es wurde nun vorerst das im Grunde selbstverständliche Resultat, dass das Drehungsmoment der Stromstärke proportional ist, durch den Versuch bestätigt und dann der numerische Wert des Drehungsmomentes ermittelt.

Die Messung ergab für $2a$ 3,725 cm, für $2b$ 3,70 cm, für h 128,3 cm, für die Masse des Apparates durch Wägung 190,755 G, für die Ablesung an der Scala bei zwei Meter Abstand 568 mm, woraus sich für $\sin\varphi$ der Wert $^{552}/_{4000}$ ergiebt; wir nehmen ferner für die Beschleunigung der Schwerkraft den für unser Laboratorium ermittelten Wert 980,8 C/S^2, also für das Gewicht P 190,755 . 980,8. Die Stromstärke wurde zu 21,5 Ampère oder 2,15 $C^{1/2}G^{1/2}S^{-1}$ ermittelt. Mit diesen Zahlen finden wir für das Drehungsmoment bei der Stromstärke *eins*:

$$-D_1 = 322\ C^{3/2}G^{1/2}S^{-1}.$$

Diese Uebereinstimmung des beobachteten Drehungsmomentes 322 mit dem berechneten 296 halten wir für befriedigend, wenn wir in Betracht ziehen, dass die Berechnung für einen ideellen Magnet gemacht ist. Da bei dem wirklichen Magnet nicht der gesamte freie Magnetismus in einem Abstand von der Mitte sich befindet, welcher $^5/_6$ der halben Poldistanz beträgt, sondern zu grossem Teil in einem kleineren Abstand, so hat μ jedenfalls einen grösseren Wert als den von uns berechneten.

Wir gehen nun über zur Ermittelung der beim Drehen unseres Apparates durch Induction erzeugten elektromotorischen Kraft. Mit Hülfe eines kleinen Elektromotors wurde der Apparat in möglichst gleichförmige Rotation versetzt und die erzeugte elektromotorische Kraft mit einem empfindlichen Galvanometer nach Deprez-d'Arsonval von Edelmann bestimmt. Der Wert eines an der Scala abgelesenen Teilstriches wurde für jede Versuchsreihe durch Aichung ermittelt. Bei diesen Messungen wirken die Thermoströme störend, doch kann man deren Einfluss grösstenteils eliminiren, wenn man den Magnet nacheinander in entgegengesetztem Sinne rotiren lässt und die dazu gehörigen Ablenkungen abliest.

Auch hier wurde zuerst durch den Versuch das im Grunde selbstverständliche Resultat bestätigt, dass die erzeugte elektromotorische Kraft der Winkelgeschwindigkeit proportional ist;

auch ergab sich, dass der Sinn der Ablenkung vollkommen mit der Theorie stimmte.

Die Bestimmung des numerischen Wertes ergab für die elektromotorische Kraft 14 510 $C^{3/2} G^{1/2} S^{-2}$ bei 177 Umdrehungen in 24,52 Secunden oder einer Winkelgeschwindigkeit ω von 45,36 S^{-1}. Daraus folgt für die elektromotorische Kraft bei der Winkelgeschwindigkeit *eins*

$$e_1 = 320\ C^{3/2} G^{1/2} S^{-1},$$

was mit dem beobachteten D_1 und auch mit dem berechneten e_1 in befriedigender Weise übereinstimmt.

Hr. Ebert[1]) berichtet von einem ganz gleich angeordneten Versuche, wo auch in der Mitte des Magnets und am Ende ausserhalb des Poles der inducirte Strom abgeleitet wurde, dass er mit einem empfindlichen Galvanometer selbst bei raschem Drehen keinen merklichen Ausschlag erhalten habe. Es muss hier wohl ein Missverständnis vorliegen, da bei meinen Versuchen, wenn ich etwas schnell laufen liess, die Ablenkung über 500 Teilstrische betrug, also nahezu über die Scala hinausging.

Wir haben bei unserer theoretischen Berechnung des Drehungsmomentes angenommen, dass die Ableitung in der Mitte des Magnets stattfinde. Wenn wir den Ableitungsdraht nach der Seite des Südpoles verschieben, so muss schon bei dem von uns vorausgesetzten ideellen Magnet, wo die freien Magnetismen in den Querschnitten des Nordpoles und Südpoles concentrirt gedacht sind, die inducirte elektromotorische Kraft etwas abnehmen, da die gemachte Voraussetzung, dass ϱ klein sei im Verhältnis zu den Längen des Stromes auf beiden Seiten des Südpoles, um so weniger zutrifft, als wir uns dem Südpol nähern. Allein diese Abnahme muss noch viel bedeutender werden durch den Umstand, dass bei dem wirklichen Magnet ein wesentlicher Teil des freien Magnetismus näher bei dem Centrum des Magnets liegt als der angenommene Pol. Es ist also zu erwarten, dass bei der Verschiebung des Schleifcontactes nach dem Südpol zu, und in ganz gleicher Weise bei einer entsprechenden Verschiebung nach der Seite des Nordpoles, die inducirte elektromotorische Kraft erst langsam und

1) H. Ebert, Magnetische Kraftfelder. Versuch 91, p. 250. 1897.

in der Nähe des Poles schnell abnehme, wie die folgenden Zahlen zeigen; es sind dieselben durch graphische Interpolation aus den Ablenkungen erhalten, die beim Anlegen des Drahtes in verschiedenen Abständen von der Mitte des Magnets erhalten worden sind.

Abstand der Ableitungsstelle des Drahtes von der Mitte des Magnets in Centimetern	0	1	2	3	4	5	6	7
Beobachtete elektromotorische Kraft für die Winkelgeschwindigkeit *eins*	322	317	307	284	254	215	163	90

Solche Beobachtungen sind wohl sehr gut geeignet, die Verteilung des freien Magnetismus in einem Magnetstab zu untersuchen; es hat darauf schon Wilh. Weber[1]) in seiner Abhandlung über die unipolare Induction aufmerksam gemacht.

Man kann auch mit der Vorstellung der Kraftlinien über die Entstehung der elektromotorischen Kraft bei einem ideellen und bei einem wirklichen Magnet in der folgenden Weise sich Rechenschaft geben.

Wenn S und N in Fig. 4a die Pole eines linearen ideellen Magnets sind, d. h. eines solchen, bei welchem der ganze Nordmagnetismus $+\mu$ in einem Punkte N und der ganze Südmagnetismus $-\mu$ in einem Punkte S concentrirt ist, so gehen alle Curven der Kraftlinien von dem einen Pole aus und verlaufen, ohne sich zu schneiden, nach dem anderen Pole, in welchem sie wieder alle zusammentreffen; die Zahl dieser Kraftlinien ist $4\pi\mu$. Nun sei ABD eine beliebige mit dem Magnet fest verbundene Strombahn, die zwei auf der Axe liegende Punkte miteinander verbindet, von welchen D ausserhalb des Poles S und A zwischen den beiden Polen liegt. Magnet und Strombahn werden um die Axe SCN gleichförmig gedreht. Wenn in der Secunde eine ganze Umdrehung stattfände, so würden alle $4\pi\mu$ Kraftlinien von der Strombahn ABD einmal oder eine ungerade Anzahl mal geschnitten, und es wäre die erzeugte elektromotorische Kraft $4\pi\mu$;

Fig. 4a.

1) W. Weber, Pogg. Ann. 52. p. 382. 1841.

da aber in der Secunde der Winkel ω beschrieben wird, so haben wir für die elektromotorische Kraft e, welche gleich ist der Zahl der in einer Secunde durchschnittenen Kraftlinien, das Verhältnis:

$$\frac{e}{4\pi\mu} = \frac{\omega}{2\pi} \text{ oder } \frac{e}{\omega} = e_1 = 2\mu.$$

Dies gilt bei dem linearen ideellen Magnet, auch wenn ABD wie AB_1D ganz nah an die Axe sich anschliesst. Auch kann an die Stelle der einen Strombahn ein ganzes Bündel von Stromfäden treten; das Resultat bleibt genau dasselbe, wenn sie alle von A ausgehen und sich in D wieder treffen; auch kann der Punkt A ganz beliebig auf dem Magnet verschoben werden, nur muss der Pol stets zwischen den Punkten D und A sein. Es stimmt dies genau mit dem oben in anderer Weise abgeleiteten Resultate.

Bei einem wirklichen Magnet gehen nicht alle Kraftlinien von *einem* Punkte aus, manche verlaufen, wie in Fig. 4b durch die punktirte Linie angedeutet ist, vom Ende des Magnets aus noch einige Zeit nahe der Axe im Magnet selbst und treten erst später aus. Es zeigt sich das schon deutlich bei den magnetischen Figuren, die Faraday[1]) im Jahr 1851 abgebildet hat. Die mit dem drehbaren Magnet fest verbundene Strombahn ABD wird also bei der Drehung die Kraftlinien nicht schneiden, welche erst zwischen A und C aus dem Magnet austreten; es gilt das auch, wenn die Strombahn so nah an die Axe rückt, dass sie im Magnet selbst verläuft, wie das bei den Stromfäden unseres Apparates der Fall ist. Es wird also e_1 um so kleiner werden, je weiter A von C nach dem Ende hin vorrückt, wie das auch die Beobachtungen ergeben haben.

Fig. 4b.

Wenn der Strom nicht seitlich sondern axial von unten zugeleitet und oben axial abgeleitet wird, so ist nach obiger Betrachtung das Drehungsmoment, das durch die Wirkung des Stromes auf den Südpol S entsteht, genau gleich und entgegengesetzt dem Drehungsmomente, das durch die Wir-

1) M. Faraday, Exp. Research. 3. p. 399. 1855.

kung des Stromes auf den Nordpol N entsteht; die drehende Wirkung ist also Null und ebenso auch die durch Rotation erzeugte elektromotorische Kraft. Der Versuch hat diese selbstverständlichen Folgerungen bestätigt.

Es wurden nun ganz gleiche Versuche mit einem halb so langen Magnet gemacht, der nach beiden Seiten durch messingene Fortsätze verlängert war und somit in den gleichen Rahmen eingesetzt werden konnte.

Die Magnetismusmenge μ wurde zu 91,8 bestimmt zu der Zeit der Versuche über Induction und zu 76,5 zu der Zeit der Versuche über das Drehungsmoment.

Das berechnete Drehungsmoment für den Strom *eins* ist somit 153, der Versuch mit Bifilarsuspension ergab 162.

Die Versuche über Induction ergaben für e_1 die Grösse 180 bei der Magnetismusmenge 91,8, oder 150, wenn wir e_1 auf die Magnetismusmenge 76,5 reduciren.

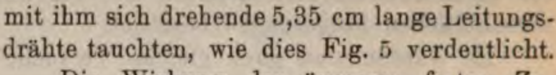
Wir stellen nochmals die Zahlen der Berechnung und der Versuche für die beiden centrisch eingesetzten Magnete mit directer Zuleitung des Stromes in der Mitte zusammen:

	μ	2μ	D_1	e_1
Magnet von 15 cm	148	296	322	320
Magnet von 7,5 cm	76,5	153	162	150

Die für D_1 und e_1 gefundenen Zahlen sollten, ganz abgesehen von der Auffassung, die wir über die Wirkungsweise haben, genau miteinander übereinstimmen, sobald das Lenz'sche Reciprocitätsgesetz zwischen ponderomotorischer und elektromotorischer Wirkung seine Geltung hat; die Unterschiede rühren offenbar daher, dass die vorhandenen Umstände des etwas primitiv ausgeführten Apparates und die verschiedenen störenden Einflüsse nicht eine hinlänglich genaue Bestimmung der zu messenden Grössen zuliessen. Aus dem Ergebnis, dass die durch Beobachtung gefundenen Werte von D_1 und e_1 nur um weniges grösser sind als 2μ, darf auf die Richtigkeit unserer Auffassung geschlossen werden, besonders wenn man auch den schon besprochenen Unterschied des ideellen und wirklichen Magnets in Betracht zieht.

Wir haben nun weitere Versuche angestellt mit dem gleichen centrisch eingesetzten Magnet; nur haben wir den

Strom nicht direct dem Magnet zugeleitet, sondern durch Vermittelung einer mit Quecksilber gefüllten Rinne, in welche ein oder zwei horizontale mit dem Magnet fest verbundene und mit ihm sich drehende 5,35 cm lange Leitungsdrähte tauchten, wie dies Fig. 5 verdeutlicht.



Die Wirkung der äusseren festen Zuleitung zur Rinne auf den Magnet ist auch hier offenbar Null, da sie nur ein Drehungsmoment um eine horizontale Axe giebt; das Gleiche gilt von dem Strom in der Rinne. Das Drehungsmoment bleibt deshalb gleich, wenn an verschiedenen Stellen, z. B. bei x oder bei y der Strom der Rinne zugeführt wird; was auch die Beobachtung bestätigt hat. Hingegen findet eine Wechselwirkung statt zwischen dem Magnet und dem mit ihm beweglichen Leiter; dieselbe liefert ein Drehungsmoment um die verticale Axe, wie folgende Rechnung zeigt:



Fig. 5.

Wenn wir die Länge des beweglichen Leiters mit R und den Abstand des Elementes $d\varrho$ von der Axe mit ϱ bezeichnen, so erzeugen die beiden Pole an der Stelle des Elementes $d\varrho$ eine nach oben gerichtete Feldstärke $2\,l\mu/(\varrho^2+l^2)^{3/2}$; somit wird das Element $d\varrho$ nach hinten oder der Magnet nach vorn getrieben, und wir erhalten um die verticale Axe das Drehungsmoment $2\,i\,l\,\mu\,\varrho\,d\varrho/(\varrho^2+l^2)^{3/2}$, und wenn wir in Bezug auf ϱ von Null bis R integriren, so bekommen wir:

$$D = 2\,i\,\mu\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{R}{l}\right)^2}}\right) \quad \text{und} \quad D_1 = 2\,\mu\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{R}{l}\right)^2}}\right).$$

Die Wechselwirkung zwischen dem Magnet und dem mit ihm fest verbundenen Zuleitungsstrom giebt somit ein Drehungsmoment, das in umgekehrtem Sinne wirkt als die Wechselwirkung zwischen dem Magnet und dem durch ihn selbst geleiteten Strom; das Drehungsmoment bei Zuleitung aus der Rinne ist somit die Differenz der beiden Wirkungen, und wir erhalten für diesen Fall:

$$D_1 = -e_1 = -2\,\mu\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{R}{l}\right)^2}}.$$

Es mussten deshalb sowohl bei dem grösseren als bei dem kleineren Magnet die Drehungsmomente, wenn der Strom aus der Rinne zugeleitet wurde, um

$$\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{R}{l}\right)}}$$

kleiner werden; die Versuche haben das vollkommen bestätigt, sowohl in betreff der Drehungsmomente als der inducirten elektromotorischen Kräfte, wie die folgenden Zahlen zeigen:

	μ	$2\mu\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{R}{l}\right)^2}}$	D_1	e_1
Magnet von 15 cm	148	225	229	240
Magnet von 7,5 cm	76,5	77	85	76

Auch hier weichen D_1 und e_1 von dem durch die Theorie bestimmten Wert nicht mehr ab als unter sich. Wir dürfen also annehmen, dass die nicht sehr bedeutenden Abweichungen aus den mit der Unvollkommenheit des Apparates zusammenhängenden Störungen sich rechtfertigen lassen.

Wenn wir in der obigen Formel R unendlich werden lassen, so wird das Drehungsmoment D_1 gleich Null. Das muss so sein, da in diesem Fall der Strom im Unendlichen geschlossen ist und nach dem weiter unten bewiesenen Satze die drehende Einwirkung eines geschlossenen mit dem Magnet fest verbundenen Leiters Null ist.

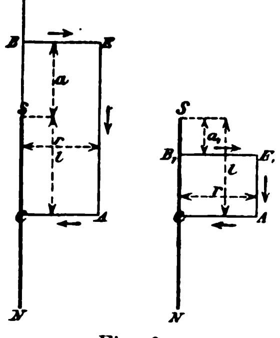


Fig. 6.

Wir betrachten nun ferner den Fall, dass der in einem mit dem Magnet fest verbundenen Leiter fliessende Strom nicht nur aus einer horizontalen Strecke besteht, sondern aus horizontalen und verticalen Strecken zusammengesetzt ist oder auch eine ganz beliebige Gestalt hat.

In Fig. 6 sei NS ein linearer ideeller Magnet, N der Nordpol, S der Südpol und C die Mitte. B ist ein Punkt auf der Axe ausserhalb S im Abstande a. Der Strom geht in

einer mit dem Magnet fest verbundenen Leitung horizontal von B nach dem um r abstehenden Punkte E und von A nach C und vertical von E nach A. Die Rechnung nach dem Biot-Savart'schen Gesetze giebt uns für die Drehungsmomente D_1 folgendes:

Wirkung zwischen Magnet und AC:

$$2\mu\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{r}{l}\right)^2}}\right),$$

Wirkung zwischen Magnet und EA:

$$\mu\left(\frac{2}{\sqrt{1+\left(\frac{r}{l}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{r}{a}\right)^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{r}{2l+a}\right)^2}}\right),$$

Wirkung zwischen Magnet und BE:

$$\mu\left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{r}{2l+a}\right)^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{r}{a}\right)^2}}\right),$$

und daraus folgt:

Wirkung zwischen Magnet und $BEAC$: 2μ.

Wir haben früher gesehen, dass wenn der Strom im Magnet von C nach B geht, D_1 gleich -2μ ist; es folgt also daraus, dass die Wirkung die gleiche ist, wenn der Strom im Magnet von B nach C geht, als wenn er in dem mit dem Magnet fest verbundenen Leiter von B über E und A nach C geht.

Wir nehmen nun einen Punkt auf der Axe innerhalb S im Abstand a_1 und bezeichnen ihn mit B_1 und nehmen an, der Strom gehe horizontal von B_1 nach E_1 und von A nach C und vertical von E_1 nach A; dann erhalten wir für die Drehungsmomente D_1 folgendes:

Wirkung zwischen Magnet und AC:

$$2\mu\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{r}{l}\right)^2}}\right).$$

Wirkung zwischen Magnet und E_1A:

$$\mu\left(\frac{2}{\sqrt{1+\left(\frac{r}{l}\right)^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{r}{a_1}\right)^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{r}{2l-a_1}\right)^2}}\right).$$

Wirkung zwischen Magnet und $B_1\,E_1$:

$$\mu\left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{r}{a_1}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{r}{2\,l-a_1}\right)^2}}-2\right).$$

und daraus folgt:

Wirkung zwischen Magnet und $B_1\,E_1\,A\,C$: Null.

Aus diesen Resultaten können wir den folgenden Satz ableiten:

Wenn ein beliebiger auf der Axe zwischen den Polen liegender Punkt G durch horizontale und verticale vom Einheitsstrom durchflossene Bahnstrecken mit einem zweiten auf der Axe liegenden Punkte B fest verbunden ist, so ist das Drehungsmoment gleich $2\,\mu$, wenn B ausserhalb der Pole, und gleich Null, wenn B innerhalb der Pole liegt. Der Satz gilt auch, wenn wir durch mehrere sich aneinander anschliessende horizontale und verticale Linien von G nach B gelangen, und da wir ferner eine beliebige Curve aus unendlich kleinen horizontalen und verticalen Linienelementen uns zusammengesetzt denken können, so kann unser Satz folgende Form annehmen:

Das aus der Wechselwirkung eines Magnets und eines Einheitsstromes, der in einer beliebigen mit dem Magnet fest verbundenen Bahn zwei Punkte der Axe miteinander verbindet, entstehende Drehungsmoment ist gleich $2\,\mu$, wenn der eine Punkt zwischen den beiden Polen und der andere ausserhalb derselben liegt, und gleich Null, wenn die beiden Punkte innerhalb oder ausserhalb der Pole liegen.

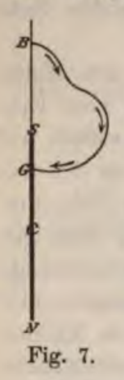
Es folgt daraus weiter:

Wenn eine ganz beliebige vom Einheitsstrom durchflossene und fest mit dem um seine Axe drehbaren Magnet verbundene Strombahn zwei willkürlich gewählte Punkte H und K miteinander verbindet, so hängt das aus der Wechselwirkung von Magnet und Strom entstehende Drehungsmoment nur ab von der Lage der Punkte H und K, keineswegs aber von der Gestalt und Länge der Strombahn.

Es ergiebt sich das aus Fig. 6. Wir verbinden E_1 mit E durch eine ganz beliebige Strombahn. Die Wirkung von S auf $B_1\,E_1\,E\,B$ ist gleich $2\,\mu$ und somit die Wirkung auf die

Strombahn $E_1 E$ gleich 2μ vermindert um die Wirkung auf $B_1 E_1$ und EB; und diese Differenz ist unabhängig von der Gestalt und Länge der Strombahn.

Das aus der Wechselwirkung von einem drehbaren Magnet und einer damit fest verbundenen geschlossenen Strombahn entstehende Drehungmoment ist Null, da ein geschlossener Strom stets aufgefasst werden kann als ein solcher, der zwischen zwei beliebigen Punkten auf verschiedenen Wegen hin und her geht.


Fig. 7.

Diese allgemeinen Sätze lassen sich auch sehr leicht ohne weitere Rechnung aus der Anschauung der Kraftlinien in folgender Weise ableiten:

Bei einem linearen ideellen Magnet (Fig. 7) gehen von jedem Pol $4\pi\mu$ Kraftlinien aus. Wenn von einem Punkte B auf der Axe ausserhalb S eine mit dem Magnet fest verbundene Strombahn auf beliebigem Weg nach dem Punkte G geht, der zwischen den Polen auf der Axe liegt, so werden bei einer Umdrehung alle Kraftlinien *ein* oder eine ungerade Anzahl mal geschnitten. Die in der Zeiteinheit geschnittenen Kraftlinien verhalten sich zu $4\pi\mu$ wie ω zu 2π, und daraus folgt:

$$D_1 = -e_1 = -2\mu.$$

Wenn jedoch B innerhalb S liegt, so werden bei einer Umdrehung nur eine beschränkte von der Gestalt der Curve abhängige Zahl von Kraftlinien geschnitten, und zwar jede zwei oder eine gerade Anzahl mal; somit ist in diesem Fall e_1 und auch D_1 gleich Null.

Fig. 8.

In Fig. 8 verbindet die willkürlich gezogene mit dem Magnet fest verbundene Strombahn zwei beliebige Punkte H und K. Die beiden punktirten Linien bedeuten die beiden durch H und durch K gehenden Kraftlinien. Nun schneidet die willkürlich gezogene Curve KH alle Kraftlinien, die zwischen den beiden punktirten Linien liegen, *ein*mal oder eine ungerade Anzahl mal, alle Kraftlinien aber, die ausserhalb der beiden punktirten Linien liegen, gar nicht oder eine gerade Anzahl mal. Wenn nun die Curve um die Magnetaxe gedreht

wird, so sind die *ein* mal oder eine ungerade Anzahl mal durchschnittenen Kraftlinien proportional den Kraftlinien, die in der Ebene zwischen den punktirten Linien liegen. Da diese nur abhängen von der Lage der Punkte H und K, so gilt das Gleiche von D_1 und e_1. Die gleiche Betrachtung kann angestellt werden, wenn H und K nicht mit dem Magnet in einer Ebene liegen.

Dieser letzte Satz gilt, wie leicht ersichtlich ist, nicht nur für einen ideellen, sondern auch für einen ganz beliebigen wirklichen Magnet; wir haben denselben durch folgende Versuche bestätigt gefunden.

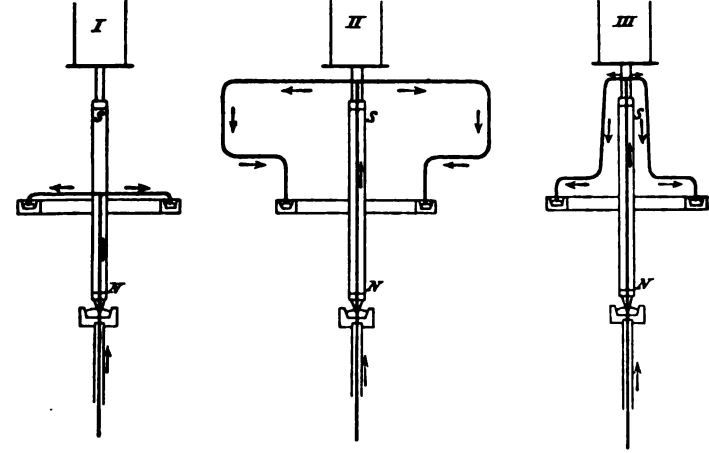


Fig. 9.

In Fig. 9 wird durch die stark ausgezogenen Linien angedeutet, wie bei dem gleichen bifilar aufgehängten Magnet auf den drei sehr verschiedenen Wegen *I*, *II* und *III* der Strom vom Quecksilbernapf unten, in welchen die verlängerte Axe eintauchte, zu den gleichen Stellen der Quecksilberrinne geleitet wurde. In allen drei Fällen zeigte sich eine sehr starke Ablenkung nach der gleichen Seite, und in den drei Fällen verhielten sich die gemessenen Drehungsmomente wie:

I		*II*		*III*
100	:	99,2	:	100,3.

Diese Gleichheit der Wirkung zeigte sich auch bei der Bestimmung der elektromotorischen Kraft durch Induction mit

den Apparaten *A*, *B* und *C* in Fig. 10, wo die Drähte des Galvanometers in den drei Fällen ganz gleich einerseits an einen Punkt der Axe ausserhalb des Poles und andererseits an die Rinne anschliessen, während die durch stark ausgezogene Linien angedeuteten Strombahnen ganz verschieden sind; es verhielten sich die bei gleicher Winkelgeschwindigkeit erhaltenen elektromotorischen Kräfte wie:

A	*B*	*C*
100 :	100,9 :	99,8.

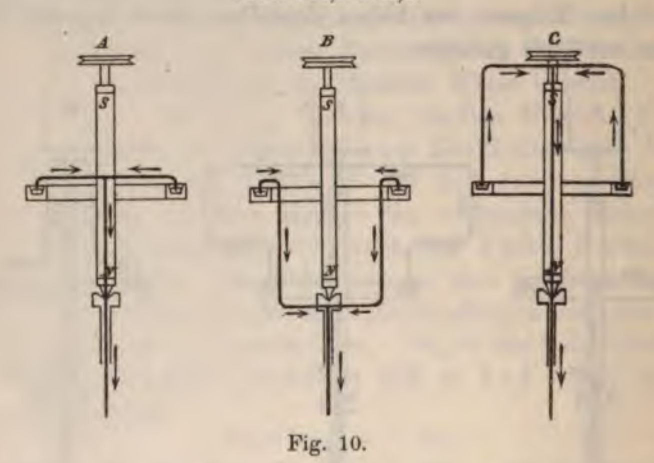


Fig. 10.

Dass auch hier in beiden Fällen keine Spur von Drehung oder Induction wahrgenommen werden konnte, wenn die beiden Zuleitungen des Stromes oder Ableitungen der Galvanometerdrähte an die Axe ausserhalb der Pole angelegt wurden, ist selbstverständlich.

II. Versuche mit einem oder zwei excentrisch eingesetzten Magneten.

Wir gehen nun über zu den Versuchen mit zwei parallelen, fest miteinander verbundenen gleichgerichteten und möglichst gleich starken Magneten, deren sich auch Hr. Lecher bei seinen Versuchen bediente. Fig. 11 zeigt in Aufriss und Grundriss den Apparat.

Die beiden Magnete sind durch messingene Querstücke *pp* und *nn* fest mit der Axe verbunden, die bei *d* und *e* in

Spitzenlagern läuft; der ganze Apparat ist somit leicht drehbar, und es kann ihm vermittelst der Rolle w eine Winkelgeschwindigkeit erteilt werden; um die elektrische Leitung herzustellen, wird Quecksilber in die Stahllager gethan. Das messingene Quer $c\,c$stück dient zur Bifilaraufhängung; zur Ermittelung der Drehung wird auf die Axe ein Spiegel aufgesetzt. Was schief schraffirt ist, besteht aus einer isolirenden Substanz. Die Magnete sind etwas verchiebbar; es kann dadurch die leitende Verbindung der Magnete mit dem oberen Querstück $p\,p$ hergestellt oder gelöst werden. Ferner können die Magnete herausgezogen und durch Messingstäbe von gleichem Gewicht ersetzt werden, und auch diese können so verschoben werden, dass die leitende Verbindung mit dem Querstück $p\,p$ hergestellt oder gelöst wird. In m gehen senkrecht zum Querstück $n\,n$ zwei Drähte ab, die vorn nach unten umgebogen sind und in die mit Quecksilber gefüllte Rinne q tauchen; je nach Belieben kann man nur einen oder beide Drähte eintauchen lassen. Der Anschluss der äusseren Leitungsdrähte kann einerseits in der Axe ausserhalb der Pole bei g oder bei h und andererseits an irgend einem Punkte der Rinne stattfinden. Wenn der Strom bei g oder h zugeleitet wird, so werden die äusseren Drähte bis auf grössere Distanz vom Apparat vertical weiter geführt, während für die Zuleitung zur Rinne horizontale Drähte benutzt werden.

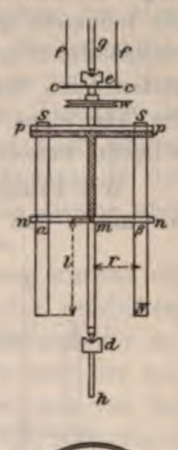




Fig. 11.

Mit diesem Apparat kann man nun wie mit dem einfachen centrisch eingesetzten Magnet dreierlei Versuche anstellen, nämlich:

1. den Apparat in die Spitzenlager einsetzen und durch den zugeleiteten Strom drehen;

2. den in die Spitzenlager eingesetzten Apparat vermittelst der Rolle in gleichförmige Rotation versetzen und dann die Rotationsgeschwindigkeit und die durch Induction erzeugte elektromotorische Kraft bestimmen;

3. den Apparat vermittelst des Querstückes $c\,c$ bifilar auf-

hängen, einen Strom von bestimmter Stärke durchleiten und die Ablenkung messen.

Die für den einfachen centrischen Magnet aus der Theorie abgeleiteten Sätze, dass das Drehungsmoment und somit auch die inducirte elektromotorische Kraft nur von den Anschlussstellen des Stromes, nicht aber von der Strombahn abhängen, gelten auch für die excentrisch eingesetzten Magnete, da ja die Axe eines Drehungsmomentes ganz beliebig parallel verschoben werden darf.

Wir betrachten zuerst den Fall, dass beide Magnete, die wir mit α und β bezeichnen, eingesetzt sind; in der Fig. 12

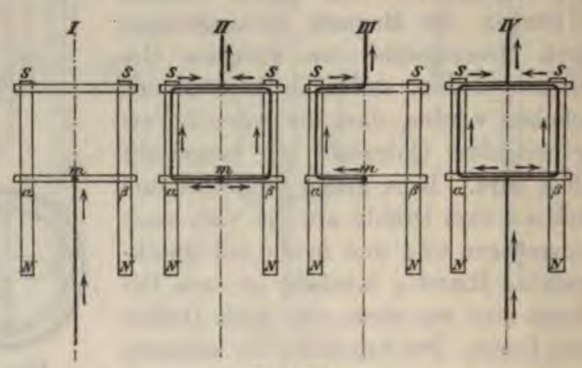


Fig. 12.

sind vier Combinationen für verschiedene Stromdurchleitung gegeben; der Weg des Stromes ist durch die stark ausgezogenen Linien angegeben. Bei *I* ist die Zuleitung von unten und die Ableitung durch die Rinne, bei *II* und *III* ist die Zuleitung durch die Rinne und die Ableitung oben, bei *IV* ist die Zuleitung von unten und die Ableitung oben. Nach der Theorie müssen wir für *I*, *II* und *III* gleich grosse Drehungsmomente bekommen, nur findet bei *I* eine Drehung im positiven, bei *II* und *III* aber eine Drehung im negativen Sinne statt. Bei *IV* hingegen erhalten wir ein Drehungsmoment Null, da die Wirkung des Stromes in der unteren Hälfte durch die Wirkung des Stromes in der oberen Hälfte genau aufgehoben wird.

Diese theoretischen Folgerungen sind durch die folgenden [illegible] vollkommen bestätigt worden.

Die kräftige Drehung des Apparates durch einen Strom von 10—20 Ampère bei den Combinationen *I*, *II* und *III* und das vollkommene Stillstehen bei der Combination *IV* ist leicht zu zeigen. Diese vollständige Wirkungslosigkeit in der Combination *IV* hat sich auch bei den Versuchen des Hrn. Lecher[1]) gezeigt. Nur in der Erklärung der Wirkungslosigkeit gehen Hr. Lecher und ich weit auseinander; nach Hrn. Lecher soll die Wirkungslosigkeit der axialen Zuleitung in der unteren Hälfte dargethan werden, während nach meiner Auffassung die Wirkung des durchgeleiteten Stromes in der unteren Hälfte aufgehoben wird durch die genau gleiche aber entgegengesetzte Wirkung in der oberen Hälfte.

Bei den Versuchen über Inductionswirkung wurden die Combinationen *I* und *II* in der Art miteinander verglichen, dass der eine Draht an die Rinne angeschlossen und der andere abwechselungsweise oben und unten mit Punkten der Axe verbunden wurde. Das Mittel aus drei Ablesungen bei der Verbindung oben verhielt sich zum Mittel aus drei Ablesungen bei der Verbindung unten wie 100 zu 100,7, ein Unterschied, der aus den Beobachtungsfehlern sich vollauf erklärt. Auch wurde der Versuch so angestellt, dass man durch Umschalten einer Wippe, während der Apparat gleichförmig weiter rotirte, den Galvanometerdraht bald oben bald unten anschloss, dabei zeigte sich bei einer Ablenkung von mehr als 400 Teilstrichen eine nur ganz minime Aenderung, die offenbar von dem verschiedenen Widerstand oder störenden Thermoströmen herrührte.

Der Vergleich der Induction bei den Combinationen *II* und *III* gab das der Gleichheit sehr nahe Verhältnis 100 : 101,5.

Bei der Combination *IV* erhielt man selbstverständlich keine Inductionswirkung.

Die folgenden Versuche über die Bestimmung des Drehungsmomentes mit Bifilarsuspension gaben ganz entsprechende Resultate.

Das Verhältnis des Mittels aus acht Beobachtungen bei Combination *I* zum Mittel aus vier Beobachtungen bei Combination *II* wurde wie 100 zu 101,6, und bei einer anderen Versuchs-

---

1) E. Lecher, Wied. Ann. **54.** p. 283. Fig. 4. 1895; **69.** p. 781. Fig. 1. 1899.

reihe das Mittel aus vier Beobachtungen bei Combination *I* zum Mittel aus vier Beobachtungen bei Combination *II* wie 100 : 99,6 gefunden.

Es sei hier noch erwähnt, dass stets bei den miteinander verglichenen Combinationen die Stromzuleitungen an der gleichen Stelle der Rinne stattfanden.

Bei der Combination *IV* ergab auch das Durchleiten eines Stromes von 21 Ampère keine Spur von Ablenkung.

Wir gehen nun über zu dem Fall, wo nur der Magnet α excentrisch eingesetzt und der Magnet β durch einen Messing-

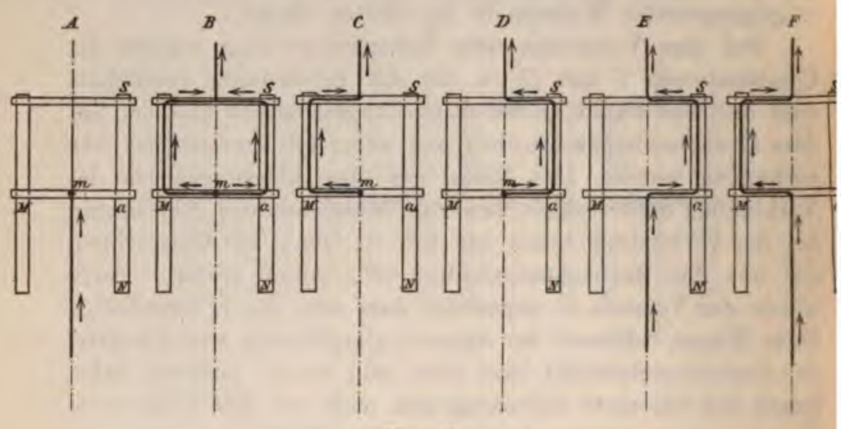


Fig. 13.

stab *M* ersetzt ist. In Fig. 13 sind sechs verschiedene Combinationen für die Durchleitung des Stromes gezeichnet.

Nach den oben entwickelten theoretischen Sätzen müssen die Combinationen *B*, *C* und *D* die gleiche Wirkung geben wie *A*, nur in entgegengesetztem Sinne, während bei *E* und *F* die Wirkung in der unteren Hälfte die gleich grosse Wirkung in der oberen Hälfte aufheben muss.

Die folgenden Versuche haben dies vollständig bestätigt.

Beim Durchleiten des Stromes tritt bei *A*, *B*, *C* und *D* Drehung ein, und zwar bei *A* eine positive, bei *B*, *C* und *D* eine negative. Auch bemerkt man sehr deutlich, dass hier bei der Anwendung von nur *einem* Magnet die drehende Kraft nur halb so gross ist; man muss 20—40 Ampère durch-

leiten, wenn man eine kräftige Drehung haben will. Bei den Combinationen E und F tritt absolut keine Wirkung ein.

Die Versuche über Induction ergaben für A, B, C, D Werte, die sich verhielten wie

A	B	C	D
100 :	99,7 :	101,8 :	102,9,

und die Versuche über Ablenkungen bei Bifilarsuspension Werte, die sich verhielten wie

A	B	C	D
100 :	102,3 :	102,4 :	96,4.

Aus diesen Zahlen darf auf Gleichheit der Wirkung geschlossen werden, da die verhältnismässig kleinen Abweichungen den durch die verschiedenen Störungen erzeugten Beobachtungsfehlern zugeschrieben werden dürfen. Auch machen wir noch darauf aufmerksam, dass die Abweichungen bei den durch Induction und bei den durch Bifilarsuspension gefundenen Zahlen durchaus nicht parallel gehen. Dass in Bezug auf den Sinn der elektromotorischen Kräfte und der Drehungsmomente der Versuch mit der Theorie stimmte, ist selbstverständlich.

Für die Combinationen E und F war sowohl die Induction bei der Rotation des Apparates als die Drehung beim Leiten des Stromes durch den bifilar aufgehängten Apparat vollkommen Null.

Wir haben noch für den Apparat mit Doppelmagnet zu zeigen, inwiefern die aus der Theorie berechneten Drehungsmomente mit den durch den Versuch durch Bifilarsuspension ermittelten stimmten. Wir müssen also aus dem Biot-Savart'schen Gesetze ableiten, wie gross in diesem Fall das aus den inneren Kräften entstehende Drehungsmoment D_1 ist, und ferner untersuchen, ob hier der Strom in den äusseren, fest bleibenden Zuleitungsdrähten und in der Rinne einen Einfluss auf die Drehung der Magnete ausübt und wie gross derselbe ist.

Wir bezeichnen mit R (Fig. 11) den Radius der Rinne oder die Länge des fest mit den Magneten verbundenen Zuleitungsdrahtes, mit r den halben Abstand der Magnete, mit

l den halben Polabstand, mit μ_α und μ_β die Polstärken der Magnete α und β.

Der mit den Magneten verbundene verticale Zuleitungsdraht setzt sich fort in einem festen verticalen Zuleitungsdraht, den wir als unendlich betrachten können; das Drehungsmoment, das aus der Wirkung zwischen dem Magnet α und dem aus dem Unendlichen bis m gehenden Mitteldraht entsteht, erhalten wir, wenn das E in Fig. 6 ins Unendliche versetzt und somit a gleich ∞ gesetzt wird, es giebt das:

$$D_1 = \frac{2\mu_\alpha}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{l}\right)^2}};$$

für die Wirkung zwischen dem Magnet α und der horizontalen mit dem Magnet drehbaren Zuleitung R ergiebt die Rechnung nach dem Biot-Savart'schen Gesetz:

$$D_1 = -2\mu_\alpha\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{l}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r^2 + R^2}{l^2}}}\right),$$

und somit erhalten wir für das Drehungsmoment, das durch die Wirkung entsteht, welche der Magnet und der durch den verticalen und beweglichen horizontalen Draht geleitete Strom aufeinander ausüben, folgenden Wert:

$$D_1 = \frac{2\mu_\alpha}{\sqrt{1 + \frac{r^2 + R^2}{l^2}}}.$$

und, wenn beide Magnete eingesetzt sind:

$$D_1 = \frac{2(\mu_\alpha + \mu_\beta)}{\sqrt{1 + \frac{r^2 + R^2}{l^2}}}.$$

Nun kommt aber noch dazu die Wirkung des fest bleibenden horizontalen Zuleitungsdrahtes und des Stromes in der Rinne, weil diese Wirkung hier, wo die Magnete excentrisch eingesetzt sind, nicht Null ist. Wir bezeichnen das durch die äusseren Kräfte verursachte Drehungsmoment, mit welchem der Einheitsstrom in dem festen horizontalen Zuleitungsdrahte und in der Rinne auf unsere Magnete einwirkt, mit $\mathfrak{D}_1$.

Dasselbe hängt von der gegenseitigen Lage der Magnete zu diesen Zuleitungen ab. Für die drei in Fig. 14 skizzirten Stellungen, wo nur *ein* Magnet eingesetzt ist, der Strom im axialen Mitteldraht von unten zugeleitet und in verschiedener

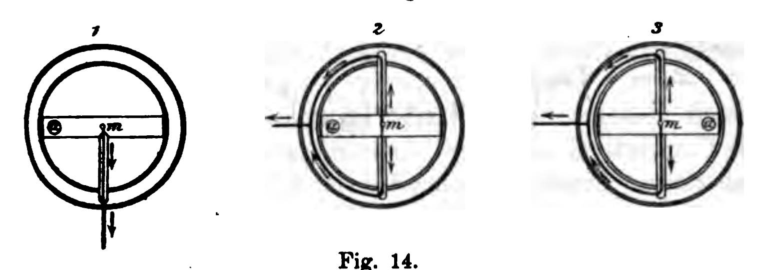


Fig. 14.

Weise aus der Rinne abgeleitet wird, finden wir für die Drehungsmomente durch eine leicht auszuführende Rechnung folgende Werte:

Bei Stellung 1.: herrührend von der horizontalen Zuleitung: Null, und herrührend von der Rinne, da kein Strom darin ist: Null, somit

$$\mathfrak{D}_1 = 0.$$

Bei Stellung 2.: herrührend von der horizontalen Zuleitung:

$$\frac{2\,r\,\mu_a}{l}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{l}{R-r}\right)^2}}\right),$$

herrührend von der Rinne:

$$2\,\mu_a\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R-r}{l}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2+r^2}{l^2}}}\right),$$

somit:

$$\mathfrak{D}_1 = 2\,\mu_a\left(\frac{r}{l} - \frac{r}{l\sqrt{1 + \left(\frac{l}{R-r}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R-r}{l}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2+r^2}{l^2}}}\right).$$

Bei Stellung 3: herrührend von der horizontalen Zuleitung:

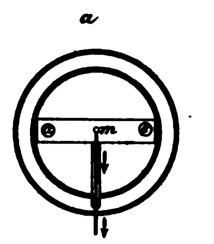
$$-\frac{2\,r\,\mu_a}{l}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{l}{R+r}\right)^2}}\right),$$

herrührend von der Rinne:

$$-2\mu_a\left(-\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{R+r}{l}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{R^2+r^2}{l^2}}}\right),$$

somit:

$$\mathfrak{D}_1=-2\mu_a\left(\frac{r}{l}-\frac{r}{l\sqrt{1+\left(\frac{l}{R+r}\right)^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{R+r}{l}\right)^2}}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{R^2+r^2}{l^2}}}\right).$$



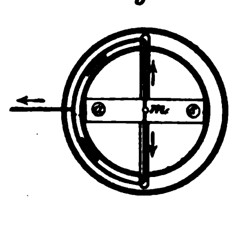


Fig. 15.

Für den Fall, dass die beiden Magnete eingesetzt sind, haben wir die beiden Stellungen *a* und *b* der Fig. 15 und folgende Formeln.

Bei Stellung *a*:

$$\mathfrak{D}_1=0.$$

Bei Stellung *b*:

$$\mathfrak{D}_1=2(\mu_a-\mu_\beta)\frac{r}{l}+2\mu_a\left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{R-r}{l}\right)^2}}-\frac{r}{l\sqrt{1+\left(\frac{l}{R-r}\right)^2}}\right)$$
$$+2\mu_\beta\left(\frac{r}{l\sqrt{1+\left(\frac{l}{R+l}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{R+r}{l}\right)^2}}\right)$$
$$-\frac{2(\mu'_a+\mu_\beta)}{\sqrt{1+\frac{R^2+r^2}{l^2}}}.$$

Wenn $\mu_a=\mu_\beta=\mu$, so wird

$$\mathfrak{D}_1=2\mu\left(\frac{r}{l\sqrt{1+\left(\frac{l}{R-l}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{R+r}{l}\right)^2}}-\frac{r}{l\sqrt{1+\left(\frac{l}{R-r}\right)^2}}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{R-r}{l}\right)^2}}-\frac{2}{\sqrt{1+\frac{R^2+r^2}{l^2}}}\right).$$

Wenn $r = 0$, so wird

$$\mathfrak{D}_1 = 0,$$

was das direct gefundene Resultat bestätigt, dass bei einem centrisch eingesetzten Magnet die Einwirkung der äusseren Zuleitungen gleich Null ist.

Diese Resultate der Rechnung wurden durch die folgenden Versuche bestätigt:

Bei der Stellung *a* ist die Wirkung der äusseren Zuleitung Null. Das Drehungsmoment entspricht in diesem Fall nur der Wirkung der inneren Kräfte; es wurde vermittelst Bifilaraufhängung bestimmt zu

$$D_1 = 551,$$

während aus der theoretischen Formel

$$D_1 = \frac{2(\mu_\alpha + \mu_\beta)}{\sqrt{1 + \frac{r^2 + R^2}{l^2}}}$$

bei Einsetzung der Werte $\mu_\alpha = 194$, $\mu_\beta = 179$, $r = 3$, $R = 5{,}45$ und $l = 6{,}25$ sich ergiebt:

$$D_1 = 529;$$

auch hier ist, wie das zu erwarten war, das für den ideellen Magnet berechnete Drehungsmoment etwas kleiner als das für den wirklichen Magnet beobachtete.

Es wurde nun die horizontale Zuleitung in der Rinne um 90° verschoben, wodurch das Schema *b* entstand; nun kam, wie die Rechnung zeigte, zu dem obigen Drehungsmoment der inneren Kräfte noch die Einwirkung der äusseren Zuleitung und der Rinne. Es zeigte sich das auch deutlich bei der Beobachtung, indem das Drehungsmoment auf 716 stieg. Wir dürfen also annehmen, dass der Unterschied der beiden beboachteten Drehungsmomente, somit die Zahl 165, der von uns berechneten Einwirkung $\mathfrak{D}_1$ der äusseren Zuleitung und der Rinne entspricht. Wenn wir in unserer Formel die obigen durch Beobachtung gefundenen Werte einführen, so finden wir

$$\mathfrak{D}_1 = 130.$$

Auch hier erklärt sich der Unterschied des beobachteten und des berechneten $\mathfrak{D}_1$ aus den verschiedenen Bedingungen des wirklichen und des ideellen Magnets.

Bei einem zweiten Versuche wurde der Strom auf der Seite des schwächeren Magnets μ_β in die Rinne geführt, das Drehungsmoment war dann, wie es auch die Theorie verlangt, etwas schwächer.

Aus dem Vergleich des Apparates mit *einem* centrischen Magnet und des Apparates mit *zwei* excentrischen Magneten geht hervor, dass in dem ersten Falle die Drehung nur durch innere Kräfte erzeugt wird, während im zweiten Falle noch die Einwirkung der äusseren, von der fest bleibenden Zuleitung herrührenden Kräfte dazukommt; die letztere ist nicht constant, sie hängt ab von der Stellung zum Magnet und variirt in jedem Quadranten von Null zu dem von uns berechneten und beobachteten Maximalwerte.

Im Folgenden stellen wir die wesentlichen Resultate unserer Untersuchung zusammen.

1. Die sämtlichen Erscheinungen, die unser Rotationsapparat, und zwar sowohl bei Anwendung von einem centrisch eingesetzten, als bei Anwendung von einem oder zwei excentrisch eingesetzten Magneten zeigte, entsprechen unter allen Umständen der Reversibilität zwischen Drehung durch den Strom und Induction durch die Drehnng.

2. Die aus dem Biot-Savart'schen Gesetze berechneten Drehungsmomente und die daraus mit Hülfe des Satzes der Erhaltung der Energie abgeleiteten inducirten elektromotorischen Kräfte stimmen bei den sehr mannigfach abgeänderten Versuchen mit den beobachteten Grössen zu voller Befriedigung überein; man ist somit zu der Annahme berechtigt, dass diese Rotationen und Inductionserscheinungen sich vollkommen aus der bekannten, nach dem Biot-Savart'schen Gesetze wirkenden elektromagnetischen Kraft erklären lassen.

3. Die Abweichungen in den numerischen Werten der beobachteten und berechneten Grössen lassen sich, soweit sie nicht den durch verschiedene Störungen erzeugten Beobachtungsfehlern zugeschrieben werden können, aus dem Unterschiede des ideellen und wirklichen Magnets erklären. Es können deshalb die mit einem drehbaren Magnet angestellten Bestimmungen des durch einen durchgeleiteten Strom erzeugten Drehungsmomentes oder des durch Drehung erzeugten Inductionsstromes dazu dienen, das Kraft-

feld eines wirklichen Magnets und die Verteilung des freien Magnetismus im Magnet zu studiren.

4. Der von Hrn. Lecher erwähnte Fundamentalversuch ist also für uns ein Beweis für die allgemeine Gültigkeit des Biot-Savart'schen Gesetzes und verdient keineswegs die Bezeichnung eines theoretischen und experimentellen Trugschlusses.

III. Der König'sche Rotationsapparat.[1])

Hr. Lecher bespricht auch den Rotationsapparat der Herren Fleischmann und Walter König.[2]) Es besteht derselbe, wie Fig. 16 andeutet, aus einem vom Strom durchflossenen Hohlcylinder vom Radius R und einer Anzahl Hufeisenmagnete, die so miteinander verbunden sind, dass die Nordpole ausserhalb des Cylinders auf einem Kreise liegen und die Südpole in der Axe des Cylinders vereinigt sind. Der Hohlcylinder und das Magnetbündel sind um die gleiche Axe drehbar. Wenn Hr. Lecher diesen Apparat als eine neue Form des alten Barlow'schen Rädchens bezeichnet, so habe ich insofern nichts dagegen, als bei demselben die Drehung nur durch die von aussen einwirkenden Kräfte zu stande kommt, nicht aber wie bei den von Hrn. Lecher und von mir untersuchten Rotationsapparaten auch durch die inneren Kräfte, die zwischen den fest miteinander verbundenen Teilen des drehbaren Körpers wirken. Immerhin hat der König'sche Apparat den sehr wichtigen Vorteil, dass man damit die vier Fälle zeigen kann: 1. nur der Magnet ist drehbar; 2. nur der Strom ist drehbar; 3. Magnet und Strom sind jeder für

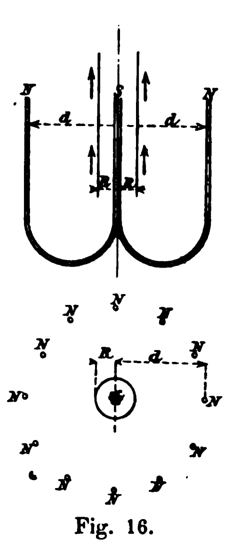


Fig. 16.

1) Diese Abhandlung war schon druckfertig, als ich das Heft Nr. 8 der Annalen der Physik, Bd. 2 erhielt, wo Hr. König auf p. 854 die Abhandlung des Hrn. Lecher bespricht; es gereicht mir zur grossen Befriedigung, zu sehen, dass Hr. König und ich in der Auffassung der verschiedenen Rotationsapparate vollkommen einig gehen.

2) L. Fleischmann, Zeitschr. f. physik. und chem. Unterricht 8. p. 361. 1895; W. König, Wied. Ann. 60. p. 519. 1897.

sich drehbar; 4. Magnet und Strom sind fest miteinander verbunden drehbar; während beim Barlow'schen Rad nur der Strom durch das magnetische Feld sich bewegt.

Die Theorie dieses hübschen Demonstrationsapparates lässt sich nach dem Biot-Savart'schen Gesetze in folgender Weise ableiten:

In der Fig. 17 bedeutet der Kreis den Durchschnitt des vom Strom durchflossenen Cylinders, den wir uns nach oben und unten ins Unendliche verlängert denken; der Sinn der Bewegung des Stromes gehe von unten nach oben, und seine Stärke sei i. Die Rechnung ergiebt, dass, wenn ein Pol von der Stärke $+\mu$ in der centralen Axe C sich befindet, die Resultante der Wirkung des Stromes auf diesen Pol gleich Null ist. Liegt jedoch μ in einem äusseren Punkte A in der Distanz d von der Centralaxe, so wird μ senkrecht zu der Ebene, welche durch die Axe und den Pol geht, in der Richtung des Pfeiles gerade so getrieben, wie wenn der ganze Strom in der Centralaxe verlaufen würde, also mit einer Kraft $2\,i\,\mu/d$.

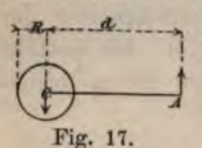


Fig. 17.

Um andererseits die Wirkung eines Poles in der Centralaxe C auf den Strom im Cylinder zu erhalten, denken wir uns den letzteren in lauter senkrechte Partialströme von der Stärke $d\,i$ zerlegt. Auf jeden wirkt der Strom tangential zum Cylinder mit einer Kraft $2\,d\,i\,\mu/R$, und das giebt für die Gesamtwirkung das Drehungsmoment $2\,i\,\mu$. Befindet sich der Pol in A, so wirkt er auf den vom Strom durchflossenen Cylinder senkrecht zu der Ebene, in der Richtung des Pfeiles mit der Kraft $2\,i\,\mu/d$.

Wenn wir nun annehmen, dass alle Südpole von der Stärke $-\mu$ in dem Centrum C, alle Nordpole von der Stärke $+\mu$ auf einem Kreis vom Radius d sich befinden, wie das in Fig. 16 angedeutet ist, so haben wir folgendes:

1. Der vom Strom durchflossene Cylinder steht fest und die Magnete sind drehbar.

Die Wirkung des Stromes auf sämtliche Südpole ist Null; auf jeden Nordpol wirkt der Strom tangential zum Kreis vom Radius d mit einer Kraft $2\,i\,\mu/d$; somit ist das Dre-

hungsmoment, mit welchem der Strom auf die drehbaren Magnete wirkt:

$$2\,i\,\Sigma\,\mu.$$

2. Die Magnete stehen fest und der vom Strom durchflossene Cylinder ist drehbar. Je zwei einander gegenüberstehende Nordpole wirken auf den vom Strom durchflossenen Cylinder mit gleich grossen in entgegengesetztem Sinne wirkenden Kräften; die Gesamtwirkung aller Nordpole auf den beweglichen Cylinder ist also Null. Die in C vereinigten Südpole hingegen wirken auf den Cylinder mit einem Drehungsmoment

$$-\,2\,i\,\Sigma\,\mu.$$

3. Die Magnete und der Strom sind beide für sich drehbar. Auf die Magnete wirkt ein positives und auf den vom Strom durchflossenen Cylinder ein gleiches negatives Drehungsmoment; es drehen sich also beide in entgegengesetztem Sinne.

4. Die Magnete und der vom Strom durchflossene Cylinder sind fest miteinander verbunden und nur zusammen drehbar. Auf das feste System wirken zwei gleiche entgegengesetzt wirkende Drehungsmomente; die Gesamtwirkung der inneren Kräfte ist also Null.

Diese aus der Theorie abgeleiteten Resultate stimmen vollkommen mit den Versuchen der Herren Fleischmann und König.

IV. Das Biot-Savart'sche Gesetz.

In einer gemeinsam ausgeführten Arbeit haben Biot und Savart durch Versuche festgestellt, dass ein unendlich langer geradliniger Strom auf einen Magnetpol mit einer Kraft wirkt, die der Stromstärke und der Polstärke proportional und der Distanz umgekehrt proportional ist. Für die Wirkung eines Stromelementes auf einen Magnetpol oder ein magnetisches Element folgerte daraus Laplace, dass die Kraft umgekehrt proportional ist dem Quadrate der Entfernung, und infolge weiterer Versuche zeigte Biot, dass sie proportional ist dem Sinus des Winkels, den die Stromrichtung mit der Verbindungslinie der beiden Elemente macht. Dies führte zu dem Ausdruck $i\mu \sin \vartheta\, ds / \varrho^2$, welcher bald mit dem Namen der

Biot-Savart'schen, bald mit dem Namen der Laplace'schen Formel bezeichnet wird.[1])

Wie der folgende Gedankengang zeigen soll, führen Erfahrung und Logik notwendigerweise dazu, dass nur dieses Gesetz die Kraftbeziehung zwischen einem vom Strom i durchflossenen Leiterelement ds und einer Magnetismusmenge μ darstellen kann.

Die Wirkung des Stromelementes ds auf das magnetische Element μ lässt sich zerlegen in die Wirkung von $ds \sin \vartheta$ und $ds \cos \vartheta$. Zu dieser Zerlegung ist man einerseits berechtigt aus der Vorstellung der fliessenden Elektricität, auf die sich wie auf eine strömende Flüssigkeit der Satz des Parallelogrammes der Geschwindigkeiten anwenden lässt, andererseits durch die Versuche, welche bekanntlich schon Ampère angestellt hat.[2])

Was die Wirkung von $ds \cos \vartheta$ auf μ betrifft, so liegt hier μ in der Richtung des Stromelementes. Bestimmt ist in diesem Fall nur *eine* Richtung, nämlich die der Verbindungslinie, und es kann somit nur in dieser eine Kraftwirkung stattfinden. Es wäre denkbar, dass das Element μ abgestossen wird, wenn der Strom gegen dasselbe gerichtet ist, und angezogen, wenn der Strom von ihm herkommt; oder auch umgekehrt. Dass jedoch eine solche Wirkung nicht stattfindet, zeigt bekanntlich die Erfahrung. Zum Ueberfluss habe ich noch den Versuch angestellt, der in Fig. 18 angedeutet ist; wenn der gegen den Pol eines sehr leicht beweglichen längeren Magnets gerichtete Strom ca. 20 Ampère betrug, so war bei Stromschluss, Stromunterbrechung oder Stromumkehrung nicht die geringste Wirkung zu beobachten.

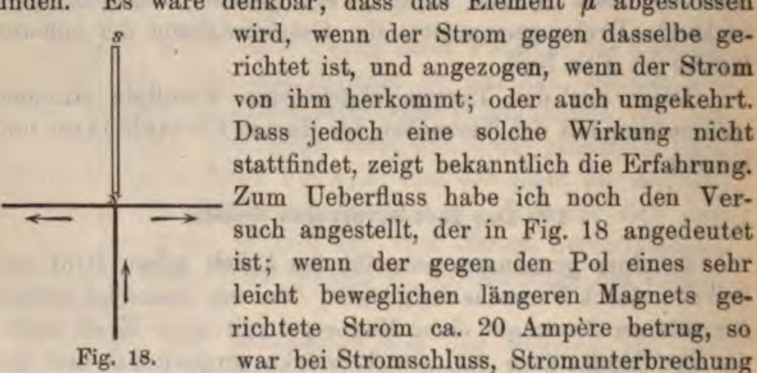


Fig. 18.

Die andere Componente $ds \sin \vartheta$ steht senkrecht auf der Verbindungslinie von ds und μ; in diesem Falle sind drei zu

1) J. B. Biot et F. Savart, Collection de mémoires relatifs à la physique publiés par la société française de physique 2. p. 80. 1885.

2) A. M. Ampère, Collection de mémoires 3. p. 12. 1887.

einander senkrechte Richtungen bestimmt, nämlich die Verbindungslinie, die Parallele zum Stromelement und die Normale zu der Ebene (ds, μ).

In der Richtung der Verbindungslinie kann aus logischen Gründen keine Kraft wirken, da der Sinn, in welchem die Kraft wirken soll, das heisst der Entscheid, ob μ in der Richtung der Verbindungslinie angezogen oder abgestossen wird, nicht aus der gegenseitigen Lage von $ds \sin \vartheta$ und μ bestimmt werden kann.

Eine Kraftwirkung nach der zum Stromelement $ds \sin \vartheta$ Parallelen wäre zwar logisch denkbar; allein die Versuche haben von einer solchen Kraftwirkung noch nie etwas nachweisen lassen.

Es bleibt somit für die Wirkung zwischen ds und μ nichts möglich, als die durch $ds \sin \vartheta$ bewirkte Kraftwirkung in der Richtung der Normalen zur Ebene (ds, μ). Diese muss aus logischen Gründen proportional sein der Stromstärke i und der Magnetismusmenge μ, da ja diese Grössen aus der Intensität der Kraftwirkung definirt sind, und ferner proportional der Länge $ds \sin \vartheta$, da die Wirkung die Summe ist der Wirkungen der einzelnen Teile, in die wir dieselbe zerlegen können. Da ferner die von Biot und Savart angestellten Versuche und die Rechnung von Laplace ergeben haben, dass die Wirkung dem Quadrate der Entfernung ϱ umgekehrt proportional ist, was auch mit der von Coulomb ermittelten Abnahme der Fernwirkung übereinstimmt, so kann in der Richtung der Normalen nur eine Kraft wirken von der Grösse $i \mu \sin \vartheta \, ds / \varrho^2$, die infolge der obigen Betrachtung als die einzig mögliche Kraftwirkung übrig bleibt. Dies ist aber nichts anderes als das Biot-Savart'sche Gesetz.

Der Sinn, in welchem die Kraft wirkt, muss durch die Erfahrung bestimmt werden; er geht nach der Ampère'schen Regel, das heisst so, dass der Nordpol nach links getrieben wird, wenn man mit dem Strome schwimmt und den Pol ansieht.

Es handelt sich nun noch darum, die reciproke Wirkung von μ auf ds zu bestimmen.

Bekanntlich lautet der dritte von Newton in seinen Prinzipien aufgestellte Grundsatz:

Actioni contrariam semper aequalem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi.

Bei den zwischen zwei Punkten A und B in der Richtung der Verbindungslinie wirkenden Kräften folgt aus dem obigen Grundsatze, dass, wenn A festgehalten wird, B nach A hin- oder von A weggetrieben wird, je nachdem wir eine anziehende oder eine abstossende Kraft haben; dass ebenso, wenn B festgehalten wird, mit der gleichen Kraft A nach B hin- oder von B weggetrieben wird; sind die beiden Punkte frei beweglich, so werden sie beiderseits mit der gleichen Kraft zu einander oder voneinander getrieben; sind die beiden Punkte fest miteinander verbunden, so ist Annäherung oder Entfernung unmöglich, also ist die Wirkung der Kraft Null.

Im vorliegenden Falle des Biot-Savart'schen Gesetzes haben wir nicht die obige Bedingung einer in der Richtung der Verbindungslinie wirkenden Kraft; die Anwendung des Newton'schen Grundsatzes muss sich deshalb auch etwas anders gestalten. Wenn ds fest ist, wirkt auf μ eine zur Ebene (ds, μ) senkrecht wirkende Kraft, was einem statischen Moment entspricht, dessen Axe in der Ebene (ds, μ) durch ds geht und senkrecht auf der Verbindungslinie steht; es wird also durch dieses Moment μ um das feste ds herumgetrieben. Wenn man nun den Newton'schen Grundsatz der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung anwenden will, so muss man in Betracht ziehen, dass an die Stelle der Kraft, die eine lineare Beschleunigung erteilt, in unserem Falle ein Moment tritt, das eine Winkelbeschleunigung liefert. Im vorigen Falle schlossen wir auf eine gleiche Kraft, mit der B nach A oder A nach B getrieben wird, je nachdem A oder B fest ist; in unserem Falle schliessen wir ganz analog auf ein gleiches Moment, mit dem μ um ds oder ds um μ getrieben wird, je nachdem ds oder μ fest ist. Wir sind also berechtigt anzunehmen, dass, wenn μ festgehalten wird, das gleiche aus der gegenseitigen Wirkung entstehende Moment die Bewegung von ds um μ bewirkt; oder dass das Element ds mit der Kraft $i\mu \sin\vartheta\, ds/\varrho^2$ senkrecht zu der Ebene (ds, μ) oder senkrecht zu der durch Stromrichtung und Feldrichtung gehenden Ebene getrieben wird. Der Sinn der Bewegung wird in diesem

Falle durch die Fleming'sche Regel bestimmt, nach welcher der Sinn der Bewegung des Elementes zum Sinn der Feldrichtung und der Stromrichtung die gleiche Stellung hat wie der Daumen zum Zeigefinger und zum Mittelfinger an der linken Hand.

Sind ds und μ fest miteinander verbunden, so heben sich in diesem Falle die Kräfte nicht auf, sondern es entsteht ein Kräftepaar, das dem Körper eine Drehung erteilt. Wie schon Ampère[1]) bemerkt hat, widerspricht es den ersten Grundsätzen der Dynamik, dass aus der gegenseitigen Kraftwirkung verschiedener Teile des gleichen festen Körpers eine Bewegung entstehe. Allein dieser Widerspruch fällt, wie wir oben gezeigt haben, weg, sobald man in Betracht zieht, dass die Elektricität an fest bleibenden Punkten zu- und abgeleitet wird, und dass die bei der Bewegung des Leiters durch das magnetische Feld erzeugte Induction den Widerspruch mit dem Satze von der Erhaltung der Energie beseitigt. So bildet die erst mehrere Jahre nach den Arbeiten von Oersted, Biot und Ampère durch Faraday entdeckte Induction eine notwendige Ergänzung zu dem Gesetze der elektromagnetischen Wirkung.

Wenn man der aus dem Newton'schen Grundsatz der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung gefolgerten Reciprocität Ausdruck geben will, so kann man unter Voraussetzung des Coulomb'schen Gesetzes für die Wirkung zweier magnetischer Elemente aufeinander, die durch das Biot-Savart'sche Gesetz gegebenen Beziehungen zwischen dem Stromelement ds und dem magnetischen Element μ noch deutlicher durch die folgenden zwei Gesetze ausdrücken:

1. Ein von dem Strom i durchflossenes Leiterelement ds erzeugt in einem beliebigen Punkte des Raumes, der um ϱ von ds absteht, ein Kraftfeld von der Stärke $i \sin \vartheta \, ds / \varrho^2$, dessen Richtung senkrecht steht auf der Ebene (ds, μ) und dessen Sinn bestimmt wird durch die Ampère'sche Regel.

2. In einem magnetischen Feld von der Stärke f wird ein vom Strom i durchflossenes Leiterelement ds getrieben mit einer Kraft $f i ds$, deren Richtung senkrecht steht zu der durch Feld-

1) A. M. Ampère, Collect. de mém. 3. p. 226. 1887.

richtung und ds gehenden Ebene, und deren Sinn durch die Fleming'sche Regel bestimmt wird.

V. Die Formeln von Ampère und Grassmann.

Bekanntlich hat Ampère die Kraft, mit welcher zwei Stromelemente aufeinander wirken, als elektrodynamische Action bezeichnet und das Gesetz für dieselbe aufgestellt. Er ging dabei von der Voraussetzung aus, dass diese Kraftwirkung gerade so gut wie die zweier Massen, zweier Magnetismusmengen oder zweier Elektricitätsmengen in der Richtung der Verbindungslinie stattfinden müsse, und gelangte durch die aus einigen Versuchen gezogenen Folgerungen auf höchst genialem Wege zu der bekannten Formel, welche bei Zugrundelegung der (C. G. S.)-Einheiten folgendermaassen lautet:

$$\frac{i_1\, i_2\, d s_1\, d s_2 (-2 \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos \varphi + \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2)}{\varrho^2},$$

dabei bedeuten i_1 und i_2 die beiderseitigen Stromstärken in den Leiterelementen ds_1 und ds_2, ϑ_1 und ϑ_2 die Winkel, die ds_1 und ds_2 mit der Verbindungslinie ϱ bilden und φ den Neigungswinkel der Ebene (ds_1, ϱ) zur Ebene (ds_2, ϱ).

Man kann die Formel auch schreiben:

$$\frac{i_1\, i_2\, d s_1\, d s_2 (-2 \cos \varepsilon + 3 \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2)}{\varrho^2},$$

wenn ε den Winkel bedeutet, den die Richtungen von ds_1 und ds_2 miteinander bilden.

Ferner zeigte Ampère, dass man einen Elementarmagnet in seiner Wirkung ersetzen kann durch einen unendlich kleinen Kreisstrom, dessen Ebene senkrecht steht zur Axe des Elementarmagnets, und für welchen das Product der Stromstärke mit der umflossenen Fläche gleich ist dem Momente des Elementarmagnets; dadurch konnten die magnetischen und elektromagnetischen Wirkungen aus der elektrodynamischen Kraft erklärt werden.

Nun ist aber leicht einzusehen, dass die Drehungswirkungen, die nach unserer Ansicht durch innere, das heisst von den einzelnen Teilen des starren Körpers ausgehende Kräfte erzeugt werden, unmöglich aus der in der Verbindungslinie der Elemente wirkenden elektrodynamischen Kraft erklärt

werden können. Es existirt also hier ein Widerspruch zwischen dem Biot-Savart'schen Gesetze und der Ampère'schen Formel, der noch aufgeklärt werden muss.

Zu dem Satze, dass zwei Elemente nur in der Richtung der Verbindungslinie aufeinander wirken können, wird man aus logischen Gründen gezwungen, wenn die Elemente Punkte sind, die weder Richtung noch Sinn haben, da in diesem Falle nur die Richtung bestimmt ist, welche durch die beiden Elemente geht. Es gilt dies für Massenpunkte, für magnetische Pole und für in einem Punkte concentrirte elektrische Mengen. Bei Stromelementen, wo beiderseits Richtung und Sinn der Elektricitätsbewegung gegeben sind, liegen die Verhältnisse anders. Ausser der Verbindungslinie sind auch andere Richtungen bestimmt, und die Logik verlangt nur, dass für beide Elemente Richtung und Sinn der Kraftwirkung aus den vorliegenden Grössen sicher und eindeutig bestimmt sind.

Wir verzichten also auf die Bedingung, dass die elektrodynamische Kraft in der Richtung der Verbindungslinie wirken müsse und leiten unmittelbar aus dem Biot-Savart'schen Gesetze in der folgenden einfachen Weise die Formel für die elektrodynamische Kraft ab.

Das Element $d s_1$ bewirkt bei $d s_2$ ein magnetisches Kraftfeld von der Stärke $i_1 \, d s_1 \sin \vartheta_1 / \varrho^2$, dessen Richtung senkrecht steht zu der Ebene $(d s_1, \varrho)$, und dessen Sinn durch die Ampère'sche Regel gegeben ist. Infolge dessen wird das Element $d s_2$ mit der Kraft

$$\frac{i_1 \, i_2 \, d s_1 \, d s_2 \sin \vartheta_1 \sin \psi_2}{\varrho^2}$$

in der Richtung getrieben, die normal steht zu der Ebene (Feldrichtung, $d s_2$); der Sinn der Kraft ist durch die Fleming'sche Regel bestimmt. ψ_2 ist der Winkel, den das Element $d s_2$ mit der Feldrichtung am Orte von $d s_2$ macht, und ist bestimmt durch die Gleichung:

$$\sin^2 \psi_2 = 1 - \sin^2 \vartheta_2 \sin^2 \varphi;$$

$d s_2 \sin \psi_2$ ist die Projection von $d s_2$ auf die Ebene $(d s_1, \varrho)$.

In ganz gleicher Weise wird das Element $d s_1$ mit der Kraft

$$\frac{i_1 \, i_2 \, d s_1 \, d s_2 \sin \vartheta_2 \sin \psi_1}{\varrho^2}$$

senkrecht zu der Ebene (Feldrichtung, ds_1) getrieben; auch hier ist der Sinn der Kraftwirkung durch die Fleming'sche Regel bestimmt. ψ_1 ist der Winkel, den das Element ds_1 mit der Feldrichtung am Orte von ds_1 macht.

Der hier unmittelbar aus dem Biot-Savart'schen Gesetze abgeleitete Ausdruck stimmt genau überein mit der Formel, die auf ganz anderem Wege schon im Jahre 1845 Grassmann und im Jahre 1877 unabhängig davon wieder auf anderem Wege Clausius abgeleitet hat.[1])

Wenn $\varphi = o$ und $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 90^0$, so giebt die Grassmann'sche Formel:

Wirkung von ds_1 auf ds_2: $i_1 i_2 \, ds_1 \, ds_2/\varrho^2$ nach ds_1 hin,

Wirkung von ds_2 auf ds_1: $i_1 i_2 \, ds_1 \, ds_2/\varrho^2$ nach ds_2 hin,

folglich

Anziehung zwischen ds_1 und ds_2: $-2 i_1 i_2 \, ds_1 \, ds_2/\varrho^2$;

setzen wir $\vartheta_1 = 90^0$ und $\vartheta_2 = -90^0$, so bekommen wir:

Abstossung zwischen ds_1 und ds_2: $+2 i_1 i_2 \, ds_1 \, ds_2/\varrho^2$;

für die Wirkung zweier Stromelemente, die in *einer* Ebene liegen und auf der Verbindungslinie senkrecht stehen, geben also die Ampère'sche und die Grassmann'sche Formel gleiche Werte.

Die Wirkung eines *geschlossenen Stromes* auf einen Elementarmagnet ist sowohl nach der Ampère'schen als nach der Grassmann'schen Formel stets gleich der Wirkung auf einen unendlich kleinen Kreisstrom.[2]) Wenn man jedoch die Wirkung eines *Stromelementes* betrachtet, so macht sich der folgende Unterschied geltend.

Wenn wir ein Stromelement und einen Elementarmagnet haben, die beide in *einer* Ebene liegen und zu der Verbindungslinie senkrecht stehen, so wirkt nach dem Biot-Savart'schen Gesetze das Stromelement auf den Elementarmagnet mit einem Drehungsmomente $i M ds/\varrho^2$, wenn M das Moment des Elementarmagnets bedeutet.

---

1) H. Grassmann, Pogg. Ann. **64.** p. 1. 1845; R. Clausius, Crelle's Journ. **82.** p. 85. 1877; H. Grassmann, l. c. **83.** p. 57. 1877; R. Clausius, l. c. **83.** p. 262. 1877.

2) F. Neumann, Vorlesungen über elektrische Ströme, herausgegeben von K. VonderMühll. p. 107. Leipzig 1884.

Die Wirkung des Stromelementes auf einen den Elementarmagnet ersetzenden Kreisstrom ist nach der Ampère'schen Formel Null, da für alle Elemente des Kreisstromes ϑ_1 und φ gleich 90° ist, nach der Grassmann'schen Formel $i F i_1 \, ds/\varrho^2$, wenn F die umflossene Fläche und i_1 die Intensität des Kreisstromes bedeutet.

Die Ampère'sche Theorie der Ersetzung des Elementarmagnets durch den Kreisstrom gilt also bei Anwendung der Grassmann'schen Formel auch für die Wirkung zwischen Stromelement und Elementarmagnet. Es kann ferner ganz allgemein gezeigt werden, dass bei Annahme des Biot-Savart'schen Gesetzes einerseits der Elementarmagnet und der unendlich kleine Kreisstrom genau das gleiche magnetische Feld im Raume erzeugen, und dass andererseits der Elementarmagnet und der unendlich kleine Kreisstrom im gegebenen magnetischen Feld von dem gleichen Kräftepaare gedreht werden, dass somit in allen denkbaren Fällen Elementarmagnet und unendlich kleiner Kreisstrom sich ersetzen können.

Aus den angestellten Betrachtungen ergiebt sich also:

Auch die Rotationen, welche wir als Wirkung der inneren Kräfte auffassen, wenn ein elektrischer Strom durch eine starre um eine Axe drehbare Verbindung von Magneten und Leitern hindurchgetrieben wird, lassen sich nach der Ampère'schen Theorie aus den zwischen den einzelnen Teilen des Körpers wirkenden elektrodynamischen Kräften erklären, wenn man die Ampère'sche Formel durch die Grassmann'sche ersetzt.

Es entsteht nun noch die Frage, ob die von uns als Wirkung der inneren Kräfte aufgefassten Rotationen nicht auch aus der von Ampère für die elektrodynamische Kraft aufgestellten Formel erklärt werden können.

Dass die inneren Kräfte die Drehung nicht erklären können, wenn die Stromelemente nach der Richtung der Verbindungslinie aufeinander wirken, ist selbstverständlich; es bleibt also nur die Möglichkeit, die Rotation aus der Wirkung des festen Zuleitungsdrahtes zu erklären.

Wir halten uns an den Apparat Fig. 5 (p. 246). Dass hier der feste Zuleitungsdraht, der horizontal von der Distanz R bis ins Unendliche geht, nach dem Biot-Savart'schen Gesetze keine Drehung des Magnets um seine verticale

Axe bewirken kann, haben wir weiter oben gesehen. Ebenso leicht ist zu beweisen, dass der feste Zuleitungsdraht bei Anwendung der Grassmann'schen Formel kein Drehungsmoment um die verticale Axe liefern kann, wenn wir den Magnet durch ein Solenoid ersetzen, das heisst durch eine Walze von der Länge $2l$ und dem im Vergleich zu l und R kleinen Radius r, welche von einem der Bedingung $2l\mu = \pi i_1 r^2$ entsprechenden Strome i_1 umflossen ist. Nach Grassmann wirkt nämlich die von ds_2 oder einem Elemente des Zuleitungsdrahtes ausgehende elektrodynamische Kraft stets senkrecht auf die Ebene (Feldrichtung, ds_1) und also auch senkrecht auf ds_1; die Componente in der Richtung von ds_1, das heisst in der zum Drehen um die verticale Axe notwendigen Richtung des Solenoidumfanges, ist also Null.

Anders verhält sich die Sache, wenn man von der Ampère'schen Formel ausgeht; die Ausführung dieser nicht schwierigen Rechnung ergiebt für das Drehungsmoment, mit welchem ein äusserer horizontaler aus dem Unendlichen bis zur Rinne vom Radius R führender Zuleitungsdraht auf das Solenoid wirkt, den Wert

$$-2\mu i_2 \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{R}{l}\right)^2}},$$

wir haben also für das von *äusseren* Kräften herrührende Drehungsmoment bei der Stromstärke *eins*:

$$\mathfrak{D}_1 = -2\mu \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{R}{l}\right)^2}},$$

also genau den gleichen Wert, den wir bei Annahme des Biot-Savart'schen Gesetzes oder der Grassmann'schen Formel für das aus den *inneren* Kräften sich ergebende Drehungsmoment gefunden haben.

Es ergiebt sich also für die Beziehungen zwischen den Formeln von Biot-Savart, Ampère und Grassmann folgendes:

Die Drehung eines um seine Axe drehbaren Magnets nach dem Schema der Fig. 5 kann einerseits aus dem Biot-Savart'schen Gesetz oder aus der Grassmann'schen Formel, andererseits aber auch aus der Ampère'schen Formel abgeleitet werden.

Bei der Erklärung nach Biot-Savart oder Grassmann wird die Wirkung erzeugt durch die *inneren* Kräfte, das heisst durch solche, die zwischen Teilen des drehbaren starren Körpers wirken, während die Einwirkung des äusseren festen zur Rinne führenden horizontalen Drahtes Null ist.

Bei der Erklärung aus der Ampère'schen Formel heben sich die inneren Kräfte in ihrer Wirkung auf, während die Einwirkung des festen *äusseren* Drahtes das Drehungsmoment liefert.

In beiden Fällen wird der Widerspruch mit dem Satze der Erhaltung der Energie nur durch Herbeiziehung der Induction aufgehoben, da ohne dieselbe das Drehungsmoment bei Beseitigung des Reibungswiderstandes eine bis ins Unendliche zunehmende Winkelgeschwindigkeit erzeugen würde.

Bei Annahme der Grassmann'schen Formel gestaltet sich alles bei der Erklärung der Rotation und der Induction viel einfacher und übersichtlicher, weil die *gleiche* Auffassung für die Ableitung der Erscheinung aus der *elektromagnetischen* und aus der *elektrodynamischen* Kraft gilt, und weil auch die Vorstellung der magnetischen Kraftlinien bei der Erklärung verwendbar ist, indem das gleiche magnetische Kraftfeld aus dem Biot-Savart'schen Gesetze und aus der Grassmann'schen Formel sich ableiten lässt.

Bei Anwendung der Ampère'schen Formel gelangt man zwar auch zum richtigen durch die Erfahrung bestätigten Resultat; aber es bleibt der Widerspruch, dass der gleiche Wert des Drehungsmomentes, welcher *elektromagnetisch* aus der Wirkung der *inneren* Kräfte sich ergiebt, *elektrodynamisch* der Wirkung der *äusseren* Kräfte zugeschrieben werden muss.

Wir fügen noch die historische Notiz bei, dass Ampère, der zuerst mit einem unten mit Platin beschwerten, in Quecksilber senkrecht schwimmenden Magnet den Versuch nach dem Schema der Fig. 5 angestellt hat, die drehende Wirkung von der festen Zuleitung ausgehen liess und annahm, dass die inneren Kräfte sich aufheben.[1]) Für die Grösse des Drehungsmomentes gab er schon den richtigen Wert.[2])

1) A. M. Ampère, Collection de mémoires 2. p. 387. 1885; 3. p. 258. 1887.

2) l. c. 3. p. 262. 1887.

Als diese Arbeit schon abgeschlossen war, fand ich, dass Hr. E. Wiechert[1]) schon vor mir die Grassmann'sche Formel unmittelbar aus dem Biot-Savart'schen Gesetze abgeleitet hat.

Schliesslich möchte ich noch den Dank aussprechen an meinen Collegen, Hrn. Prof. VonderMühll, der mich auf manche wichtige mathematische Beziehungen und Sätze aufmerksam gemacht, und an Hrn. Dr. H. Veillon, der bei der Ausführung und Berechnung der Versuche mich wesentlich unterstützt hat.

1) E. Wiechert, Grundlagen der Elektrodynamik p. 25, in der Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals. Leipzig 1899.

(Eingegangen 5. November 1900.)

2. *Ueber das Strahlungsgesetz des schwarzen Körpers; von F. Paschen.*

(Hierzu Taf. IX.)

Nach dem Ergebnis meiner früheren Versuche über die Spectren fester Körper [1]), dass das Spectralgesetz des Hrn. W. Wien [2]) wohl gültig sein könnte, verbesserte ich alle meine experimentellen Hülfsmittel und begann neue Versuche zur Prüfung dieses Gesetzes unter möglichster Vermeidung der Unvollkommenheiten, welche meinen in den Jahren 1892 bis 1894 angestellten Versuchen natürlicherweise anhafteten. Die bereits veröffentlichten Versuche über die Strahlung von Hohlräumen und ähnlichen Anordnungen, welche die Strahlung eines schwarzen Körpers aussenden, ergaben folgende Resultate:

Hr. Wanner und ich [3]) untersuchten mit dem Spectralphotometer isochromatische Linien sichtbarer Wellenlängen und fanden hier die völlige Gültigkeit des Wien'schen Gesetzes. Hr. Wanner [4]) hat diese Messungen noch weiter verfolgt und gefunden, dass dies Gesetz im sichtbaren Spectralgebiete bis zur Temperatur des Kraters der Bogenlampe (circa 4000°) nahe gültig sein müsse.

Inzwischen hatte ich Versuche gemacht über die Energiespectren [5]) bei niederen Temperaturen (100° C. bis 450° C.) und fand auch hier Wien's Gesetz innerhalb der möglichen Fehler gültig.

---

1) F. Paschen, Nachrichten Ges. d. Wissensch. Göttingen 1895. p. 294—305; Astrophysikal. Journ. 2. p. 202. 1895; Wied. Ann. 58. p. 455. 1896; 60. p. 662. 1897.

2) W. Wien, Wied. Ann. 58. p. 662. 1896.

3) F. Paschen u. H. Wanner, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin p. 5. 1899.

4) H. Wanner, Ann. d. Phys. 2. p. 141. 1900.

5) F. Paschen, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin p. 405. 1899.

Auch für höhere Temperaturen und kleinere Wellenlängan des ultraroten Gebietes hatte ich schon vorher die sehr genaue Gültigkeit von Wien's Gesetz erkannt. Bei höheren Temperaturen und längeren Wellenlängen dagegen stellten sich grössere Abweichungen ein, deren Grund ich in irgend einer Fehlerquelle suchen zu müssen glaubte. Nach vielen Versuchen gelang es mir, Hohlräume anzufertigen, deren Strahlung bei langen Wellen und hohen Temperaturen nur mehr geringe Abweichungen von Wien's Gesetz ergaben[1]), sodass ich glaubte, das Gesetz müsse gelten, und wenn man es nicht fände, läge es an der unvollkommenen Realisirung der Strahlung. Noch andere Gründe bewogen mich zu dieser Annahme, von denen einer Anm. 3 angegeben ist.

Es ist der Zweck der vorliegenden Untersuchung, dies durch neue Versuche zu widerlegen und damit einen Teil meiner früheren Veröffentlichung über höhere Temperaturen richtig zu stellen.

In letzter Zeit haben die Herren Lummer und Pringsheim denselben Gegenstand bearbeitet[2]) und in allen ihren Veröffentlichungen betont, dass sie Wien's Gesetz besonders bei hohen Temperaturen und grossen Wellenlängen nicht gültig finden könnten.[3]) Ich glaube, dass meine neuen Versuche geeignet

---

1) F. Paschen, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin p. 959. 1899.

2) O. Lummer und E. Pringsheim, Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. 1. p. 23 u. 215. 1899; 2. p. 163. 1900.

3) Die Versuche der Herren Lummer und Pringsheim ergaben für keinen Bereich der Temperaturen und Wellenlängen einen völligen Anschluss an Wien's Gesetz, sondern liessen sich durch eine von Hrn. Thiessen angegebene Formel (Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. 2. p. 37. 1900) darstellen, welche für kleine Werte von λT einen so erheblich anderen Verlauf hat als Wien's Formel, dass ich infolge dieses Widerspruches mit meinen Beobachtungen auch die Ueberzeugung von der Richtigkeit ihrer Resultate bei grossen Werten von λT nicht gewann, obwohl dieselben mit den von mir schon im Anfange gefundenen Abweichungen von Wien's Gesetz qualitativ in Uebereinstimmung waren und obwohl für das Gebiet der langen Wellen die Anordnung von Lummer und Pringsheim vor der meinigen den Vorteil der Beseitigung der Wasserdampf-Absorptionen hatte. Dass die Herren Lummer und Pringsheim Wien's Gesetz nirgends genau gültig fanden, rührt zum Teil daher, weil sie nicht so tiefe Temperaturen und so

sind, den von ihnen für dieses Gebiet behaupteten Verlauf der Function zu bestätigen. Ebenso sind sie nicht im Widerspruche mit den Versuchen des Hrn. Beckmann[1]), welche nach der Discussion des Hrn. H. Rubens[2]) die Ungültigkeit des Wien'schen Gesetzes für das Gebiet der von Hrn. Rubens entdeckten Reststrahlen des Fluorits beweisen. Diese Versuche sind in neuester Zeit durch die Herren Rubens und F. Kurlbaum[3]) bestätigt und auf höhere Temperaturen und die noch langwelligeren Reststrahlen des Steinsalzes ausgedehnt. Nach dieser bewundernswerten Arbeit kann kein Zweifel mehr sein, dass Wien's Gesetz hier ganz ungültig ist, und dass hier ein von Lord Rayleigh[4]) für lange Wellen aufgestelltes Gesetz viel eher gültig ist, welches sich vom Wien'schen Gesetze ganz erheblich unterscheidet und welches nach meinen Versuchen für kleinere Werte von λT nicht gültig sein kann.

Gilt demnach in einem grossen Gebiete kleinerer Werte von λT Wien's Gesetz mit grosser Annäherung, wie von Wanner und mir gefunden ist, treten bei grösseren Werten von λT Abweichungen von diesem Gesetze auf, wie von den Herren Lummer und Pringsheim und Beckmann-Rubens zuerst betont ist, ungefähr entsprechend der Thiessen'schen Formel, gilt ferner bei grossen Werten von λT ein Gesetz, wie dasjenige von Lord Rayleigh, wie von Rubens und Kurlbaum gefunden, so scheint es, als ob ein Strahlungs-

---

kleine Wellenlängen oder genauer so grosse Werte der Grösse $1/\lambda T$ in den Bereich ihrer Untersuchung zogen wie ich, sodass sie nicht das nach der $1/\lambda T$-Scala grosse Gebiet übersehen konnten, in welchem ich Wien's Gesetz gültig fand. (Betreffs der Abweichungen, welche Lummer und Pringsheim auch bei kleineren Werten von λT haben, verweise ich auf p. 297 Anm. 1.) Das Gebiet der Ungültigkeit von Wien's Gesetz erscheint auf dieser Scale klein gegenüber dem Gültigkeitsbereiche, wie aus dem Folgenden hervorgeht, sodass ich auch hierdurch bewogen wurde, die Abweichungen, welche ich hier erhielt, so lange als fehlerhaft anzusehen, bis ich zwingende Gründe fand, an ihre Richtigkeit zu glauben.

1) H. Beckmann, Tübinger Dissertation 1898.

2) H. Rubens, Wied. Ann. **69**. p. 579. 1899.

3) H. Rubens und F. Kurlbaum, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin 25. Oct. 1900.

4) Lord Rayleigh, Phil. Mag. **49**. p. 39. 1900. Lord Rayleigh vermutet die Gültigkeit dieses Gesetzes besonders für lange Wellen, obwohl nach meinen Versuchen für kleine Wellen Wien's Gesetz erfüllt sei.

gesetz die Wahrheit darstellt, welches Hr. M. Planck[1]) in neuester Zeit entdeckt hat, denn dieses beschreibt thatsächlich einen solchen Verlauf.

Dass dieses Gesetz in dem ganzen Gebiete meiner Messungen, sowie der photometrischen Versuche von Wanner und mir und Wanner allein innerhalb der Fehler gilt, möchte ich vor allem im Folgenden zeigen.

Man kann die allgemeinen Beziehungen als gültig ansehen, welche Hr. W. Wien[2]) einwandfrei unter der Voraussetzung des Stefan'schen Gesetzes abgeleitet hat. Wenn solche Punkte verschiedener Energiecurven als einander entsprechend bezeichnet werden, für welche λT denselben Wert hat, so hat auch $J T^{-5}$ für entsprechende Punkte denselben Wert, der aber zugleich mit dem Werte von $\lambda . T$ variirt, mit anderen Worten:

$$J T^{-5} = f(\lambda T) \tag{1a}$$

oder

$$J \lambda^5 = F(\lambda T), \tag{1b}$$

wo

$$(\lambda T)^5 f(\lambda T) = F(\lambda T)$$

ist. Die Function $f(\lambda T)$ muss erfahrungsgemäss für sehr kleine und sehr grosse Werte der Variabelen λT verschwinden, also mindestens ein Maximum haben. Dieses Maximum wird also bei allen Energiecurven bei ein und demselben Wert λT erreicht, oder:

$$\lambda_m . T = C \tag{2}$$

und

$$J_m T^{-5} = C' \tag{3}$$

und für jede Energiecurve nach (1a)

$$J / J_m = f(\lambda / \lambda_m). \tag{1c}$$

Die Formeln (2), (3), (1c) sind früher von mir stets benutzt. Die Form (1a) rührt von Thiessen her. J ist die Intensität für die Wellenlänge λ und die Temperatur T. $f(\lambda T)$ und $F(\lambda T)$

1) M. Planck, Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. 2. p. 202. 1900.

2) W. Wien, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin 6. p. 55. 1893.

sind unbekannte Functionen. Von diesen Relationen können die beiden (2) und (3) als durch alle Versuche bestätigt gelten, während diejenige (1c), welche etwas anderes aussagt als (2) und (3), aber nach Wien ebenso gelten muss, wie (2) und (3), durch meine Versuche immer gültig gefunden ist und auch, wie mir scheint, mit den Resultaten der Herren Lummer und Pringsheim bei langen Wellen im Einklange sein wird, wenn sie auch von ihnen nicht besonders geprüft wurde. Danach würde der ganze Verlauf des Strahlungsgesetzes bekannt sein, wenn man noch die Function $f(\lambda T)$ oder $F(\lambda T)$ kennen würde. Hierzu aber würde, wie bereits Hr. Wien betont hat, die Beobachtung einer einzigen Energiecurve ($T =$ const. J als Function von λ beobachtet und als Function von λT dargestellt ergiebt bis auf einen Proportionalitätsfactor $f(\lambda T)$) oder einer einzigen isochromatischen Linie ($\lambda =$ const. J als Function von T beobachtet und als Function von $\lambda . T$ dargestellt ergiebt bis auf einen Proportionalitätsfactor $F(\lambda T)$) genügen.

Während meine früheren Versuche sich mit Energiecurven beschäftigten und die dem Wien'schen Gesetze entsprechende Form der Function $f(\lambda T)$ ergaben, habe ich es nun vorgezogen, die Form isochromatischer Linien zu beobachten, da diese Beobachtung mit grösserer Sicherheit die Form der Function $F(\lambda T)$ der Beziehung (1b) ergiebt. Denn diese Messungen lassen sich so anordnen, dass alle die Fehler, welche bei der Beobachtung von Energiecurven zu befürchten sind, zum Verschwinden gebracht werden. Dahin gehören 1. die diffuse Strahlung, welche infolge der unvermeidlichen Mängel der optischen Theile des Spectralapparates entsteht (durch Trübungen des Prisma, blinde Stellen der Spiegel, Staubteilchen, Beugung an den Kanten der Blenden); 2. die selectiven Eigenschaften dieser Teile und des Bolometerstreifens; 3. die selective Absorption der von der Strahlung durchsetzten Luft- und Prismenschicht. Da es nur auf die Form[1]) einer isochro-

1) Die Bemerkung der Herren Lummer und Pringsheim in ihrer letzten Mitteilung l. c. p. 175: „Alle Methoden, welche das Verhältnis der absoluten Energien für die verschiedenen Wellenlängen nicht zu bestimmen erlauben, so z. B. die photometrische Methode von Paschen-Wanner, die von Beckmann angewandte Rubens-Nicol'sche Methode der Reststrahlen können für sich allein nicht zur Bestätigung bez.

matischen Linie ankommt, um $F(\lambda T)$ zu ermitteln, die Beziehung der isochromatischen Curven verschiedener λ zu einander

---

Aufstellung der Spectralgleichung dienen" ist nicht mehr zutreffend, sobald man Wien's allgemeine Betrachtungen über die Verschiebung der Wellenlängen als theoretisch und experimentell erwiesen annimmt. Dann führt z. B. die von Wanner und mir gefundene Form der Isochromaten sichtbarer Wellenlängen eindeutig und notwendig zur Gültigkeit der Wien'schen Spectralgleichung im sichtbaren Spectralgebiete innerhalb des untersuchten Temperaturgebietes und in anderen Gebieten für die gleichen Werte λT. Denn wir fanden, dass $\log J = \vartheta - c_2 \log e\, 1/\lambda T$ die Form der sichtbaren Isochromaten ist, wo $C_2 = 5 \times \lambda_m . T$ war. Dies giebt unter Berücksichtigung von (1b) Wien's Gleichung, da ϑ eine Function von λ ist, welche durch (1b) bestimmt wird. Andererseits entsprach die Form der Beckmann'schen Isochromaten nicht dem Wien'schen Gesetz, da hier C_2 nicht gleich $5 \times \lambda_m . T$ war. Die weiteren Bemerkungen der Herren Lummer und Pringsheim zu diesen Arbeiten: „Das Bestreben der Herren Paschen und Wanner, den Wert von C so genau als nur irgend möglich zu bestimmen, war daher verfrüht, und die von ihnen angegebene Genauigkeit ist illusorisch" (p. 172, ähnlich wiederholt auch in Lummer's Referat Paris 1900) scheint mir etwas verfrüht. Denn selbst wenn sie eigene Versuche über das Gebiet kleiner Werte der Variabelen $\lambda . T$ gemacht hätten, welche nicht mit der Wien'schen Gleichung übereingestimmt hätten, so hatten doch unsere Versuche in diesem Gebiete einen sehr bemerkenswerten Anschluss an diese Gleichung ergeben, sodass die Möglichkeit doch wohl nicht ausgeschlossen gewesen wäre, dass unsere Versuche die richtigen sind, und dass die fragliche Gleichung in diesem Gebiete gilt. Nach den Resultaten unserer Arbeiten schien es uns nicht verfrüht, den Wert der Constanten genau zu bestimmen. (Wo man in einem Gebiete eine physikalische Constante findet, ist es wohl nie verfrüht, sie sehr genau zu bestimmen.) Ich halte auch jetzt diese Bestimmung und die Genauigkeit ihres Resultates noch nicht für illusorisch, da nach unseren Versuchen die Wien'sche Gleichung mit der von uns bestimmten Constanten innerhalb eines sehr grossen und gerade für die Optik sehr wichtigen Gebietes der Variabelen $\lambda . T$ die Strahlungserscheinungen so genau beschreibt, wie wir die Messungen machen konnten. Daraus, dass in einem gewissen Gebiete grösserer Werte von $\lambda . T$ Wien's Gesetz ungültig gefunden wird, kann nicht mit Sicherheit geschlossen werden, dass es dann auch in einem ganz anderen Gebiete dieser Variabelen ungültig sein müsse. Dieser Schluss leidet an demselben Fehler, wie derjenige, dass Wien's Gesetz auch für grosse Werte gelten müsse, wenn es für kleine genau gültig gefunden wird, welchen ich zu ziehen geneigt war. Das wahre Gesetz muss für das Gebiet unserer Versuche innerhalb der Fehler übereinstimmen mit Wien's Gesetz, für das Gebiet der von Lummer und Pringsheim zuerst behaupteten Abweichungen bei grösseren Wellen-

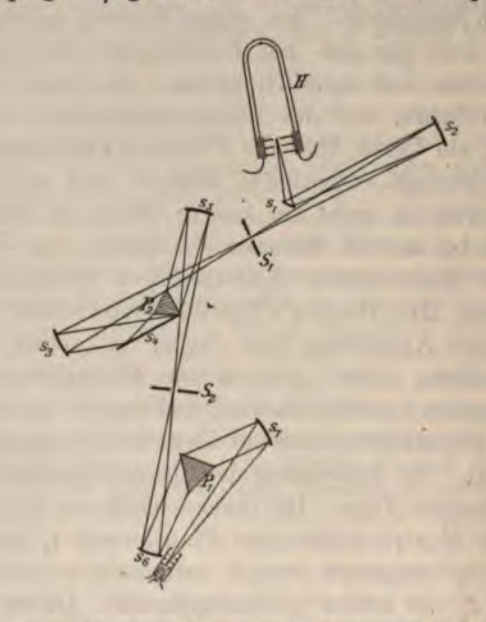
aber bereits durch Gesetz (1b) gegeben ist, so kann man den Strahlengang durch Einschalten beliebig vieler optischer Teile so anordnen, dass die untersuchte Strahlung einem sehr engen und reinen Spectralbezirk angehört. Dies bezweckt die folgende Versuchsanordnung.

In einem ersten Spectralapparate wird das Spectrum der Strahlung erzeugt. Ein schmaler Bezirk dieses Spectrums tritt in einen zweiten Spectralapparat ein und wird in ihm bolometrisch untersucht. Bei engen Spalten beider Apparate ist die Reinheit des auf den Bolometerstreifen abgebildeten Spectralgebietes eine ziemlich grosse. Sie kann durch Verbreitern der Spalte und des Bolometerstreifens verschlechtert werden, um ein Urteil über die Fehler zu ermöglichen, welche aus der Unreinheit entspringen können, und welche die getroffene Anordnung nicht auf andere Weise zu eliminiren gestattet, wie bei meinen früheren Versuchen, bei denen auch die Energie benachbarter Spectralstellen beobachtet werden konnte, durch Hrn. Runge's Spaltbreitencorrection. Der Vorteil der neuen Anordnung liegt darin, dass etwa vorhandene diffuse Strahlung nicht gewünschter Wellenlängen in dem zweiten Apparate unschädlich wird, und dass in das Gehäuse des bestrahlten Bolometerstreifens nur die zu untersuchende Strahlung hineingelangt. Die Anordnung der Spectralapparate ist skizzirt auf nachstehender Figur. Die innerste Oeffnung des strahlenden Hohlraumes H wird mittels des Planspiegels s_1 und des Concavspiegels s_2 möglichst wenig astigmatisch abgebildet auf dem Spalte S_1 des ersten Spectralapparates. Dieser trägt einen hinter dem Prisma P_2 befindlichen und fest mit ihm verbundenen Planspiegel s_4 nach dem von Hrn. F. L. O. Wadsworth[1])

längen und zugleich Temperaturen aber ungefähr der Thiessen'schen Formel folgen. Ich habe mehrere Formeln gefunden, welche dieses leisten und dabei Wien's allgemeinen Forderungen genügen. Doch verdient das neue Gesetz des Hrn. Planck den Vorzug, weil es theoretisch verständlicher erscheint und exacter den Beobachtungen folgt. — Auch mit den meisten der Bemerkungen des Hrn. Lummer in einem Referat über die Strahlung des schwarzen Körpers (Paris 1900) über diese und frühere Arbeiten von mir bin ich nicht einverstanden. Auf einige bin ich p. 300 Anm. 1 eingegangen.

1) F. L. O. Wadsworth, Astron. and Astrophys. **13.** p. 835—849. 1894; Phil. Mag. (5) **38.** 337—351. 1894.

angegebenen Plane. Das Prisma mit dem Spiegel wird um die brechende Kante von P_2 gedreht, um eine beliebige Spectralgegend im Minimum der Ablenkung und scharf auf dem Spalte S_2 des zweiten Apparates abzubilden. Dieser hat die früher von mir beschriebene Einrichtung und enthält die gebräuchliche automatische Vorrichtung, um die Strahlen stets im Minimum der Ablenkung zu halten, wenn der Bolometerarm mit dem Spiegel s_7 gedreht wird. Die Concavspiegel haben



35 cm Brennweite. Das Flussspatprisma P_2 hat Kanten von 3 cm Länge und einen brechenden Winkel von 60°. Dasjenige P_1 ist das früher von mir benutzte.

Die Strahlung wird also siebenmal an silbernen Spiegeln reflectirt und zweimal in je einem Flussspatprisma gebrochen. Eine genaue Vergleichung der Energien verschiedener Spectralbezirke ist daher nicht mehr möglich.

Auch in der Anordnung der Strahlungskörper traf ich zwei Verbesserungen. Da erstens die Oeffnung des Hohlraumes abgebildet werden durfte, erhielt sie die Form eines Spaltes, nur ein wenig länger und breiter als der Spalt S_1, auf dem sie in natürlicher Grösse abgebildet wurde. Dadurch

erreicht man erstens, dass sicher nur Strahlung von dem Inneren des Hohlraumes zur Messung gelangt, zweitens, dass der Hohlraum durch eine kleinere Oeffnung und gleichmässigere Temperatur der theoretischen Forderung besser entspricht, als bei der Anordnung zur Messung von Energiecurven, bei welcher ich eine grössere Hohlraumöffnung unmittelbar vor den Spalt setzen zu müssen glaubte. Die zweite Verbesserung des Strahlungskörpers bestand darin, dass das eigentliche Strahlungsgefäss, ein dickwandiger Platintiegel, ein Kupfergefäss oder ein Porzellangefäss zunächst von einem abgeschlossenen Luftraum von 2—3 mm Dicke und dann erst von der heizenden Platinfolie umgeben war. Ich habe gefunden, dass die Temperaturungleichheiten der Wände durch diese beiden Verbesserungen für alle Temperaturen vollständig beseitigt werden. Im übrigen ist die Anordnung der benutzten Hohlräume wie in der Arbeit über höhere Temperaturen.[1])

Die Temperaturbestimmungen mit dem Thermoelemente gründen sich auf die neuen Versuche der Herren Holborn und Day.[2]) Die für mein Element gültige Correction, welche mir Hr. Holborn freundlicherweise zugesandt hat, bringt nur sehr geringe Aenderungen. Da diese Arbeit abgeschlossen war, bevor ich Kenntnis von der neuen Correction erhielt, hatte ich die Resultate nach der alten Temperaturscala berechnet und war zu dem gleichen Verlaufe der Function $F(\lambda T)$ des Gesetzes (1 b) gelangt, der im Folgenden beschrieben wird.

Zu den folgenden Messungen sind benutzt:

1. Ein Hohlraum, bestehend aus einem innen mit Eisenoxyd überzogenen Platintiegel. Hohlraum I.

2. Ein ähnlicher Hohlraum wie unter 1., dessen Volumen aber doppelt so gross war, und dessen Platinwände doppelte Dicke hatten. Hohlraum II.

3. Ein Porzellanhohlraum, kugelförmig, gebildet durch zwei ineinander geschachtelte Porzellanhohlkugeln, zwischen denen sich eine völlig abgeschlossene Luftschicht befand. Hohlraum III.

---

1) l. c. p. 6.

2) L. Holborn und A. Day, Ann. d. Phys. 2. p. 505. 1900.

4. Ein Hohlraum, der aus einem aussen vernickelten, innen vernickelten und dann mit Kupferoxyd geschwärzten cylindrischen Kupfergefäss von 10 cm Länge und 5 cm Dicke bestand. Hohlraum IV.

Sämtliche Hohlräume wurden durch elektrische Ströme geheizt.

Die Messungen erstrecken sich auf das Gebiet 1—8,8 μ der Wellenlängen. Nur solche Stellen im Spectrum wurden benutzt, welche frei sind von den bekannten stärkeren Absorptionsbanden der Zimmerluft.

Die zu prüfenden Formeln sind folgende.

Erstens Wien's Gesetz:

$$J = c_1 \lambda^{-5} e^{-\frac{c_2}{\lambda T}}. \tag{4}$$

Nach dieser Formel muss die isochromatische Linie einer Wellenlänge λ folgender Gleichung genügen:

$$\log (J \lambda^5) = 8 - c_2 \log e \frac{1}{\lambda T}. \tag{4a}$$

Da λ^5 als ein innerhalb einer isochromatischen Linie constanter Factor der Energie auftritt, muss der Logarithmus des Galvanometerausschlages i[1]) eine geradlinige Function der Variabelen $1/T$ sein. Nimmt man als Variabele $1/\lambda T$, so muss die Neigung der Geraden jeder isochromatischen Linie den Werth $-c_2 \log e$ haben. Dabei muss der Wert von c_2 der Gleichung genügen:

$$c_2 = 5 \lambda_m . T$$

Hier darf der Wert der constanten Grösse $\lambda_m . T$ als gegeben durch die bolometrischen Messungen an Energiecurven betrachtet werden.

Es ist der Wert:

$\lambda_m . T = 2940 \mu \times$ Cels. Grad nach Lummer und Pringsheim,

$\lambda_m . T = 2920$ nach meinen Messungen (vgl. p. 296),

wenn die neue Temperaturcorrection angebracht wird.

1) Corrigirt wegen der Temperatur des Schirmes vor dem Spalt.

Da es auf den Wert der Constanten ℵ der Formel (4 a) nicht mehr ankommt, kann man auch sagen, dass Wien's Gesetz gültig sein muss, wenn

$$(4\,b) \qquad - \frac{d \log i}{d\,(1/\lambda\,T)} = c_2 \log e$$

gültig gefunden wird. Denn aus (4 b) und (1 b) folgt notwendig Formel (4).

Findet man nicht, dass die Logarithmen der Galvanometerausschläge eine geradlinige Function von $1/\lambda T$ sind, oder dass sie zwar noch genügend geradlinig verlaufen, aber mit einer anderen Neigung als derjenigen $c_2 \log e$, so gilt jedenfalls Wien's Formel (4) nicht. Die Herren Lummer und Pringsheim haben durch solchen Schluss Wien's Formel als ungültig erkannt. Aber es müssen die Beobachtungen dann nach (1 b) eine andere Gesetzmässigkeit befolgen, welche ein gutes Kriterium dafür bildet, ob die Beobachtungen in sich übereinstimmen. Formel (1 b) verlangt, dass log i eine Function von $\lambda\,T$, also auch von $1/\lambda T$ sein muss. Hat man also bei Isochromaten verschiedener Wellenlänge λ Abweichungen von Wien's Gesetz Formel (4 a), so müssen die Curven log i als Function von $1/\lambda T$ doch congruent sein und in ihrem ganzen Verlaufe übereinander fallen, wenn sie durch eine verticale Verschiebung (Multiplication von i mit einem für jede Isochromate constanten Factor) so übereinander gelegt werden, dass sie für einen Wert von $1/\lambda\,T$ zusammenfallen. Die Abweichungen der beobachteten Werte log i von den nach Formel (4 a) berechneten müssen für gleiche Werte von $1/\lambda\,T$, aber verschiedene Isochromaten (verschiedene λ) die gleichen Beträge haben. Weicht der beobachtete Differentialquotient (4 b) von Wien's Formel ab, so muss er doch für gleiche Werte von $1/\lambda T$, aber verschiedene λ, denselben Wert haben. Hätten die Herren Lummer und Pringsheim von vornherein gezeigt, dass ihre Beobachtungen dieser Forderung genügen, so hätten schon ihre ersten Resultate eine grosse Beweiskraft gehabt. Für Energiecurven muss natürlich eine ganz ähnliche Beziehung gelten. Sobald man Abweichungen von Wien's Formel findet, muss doch (1 a) gelten, sodass gefundene Abweichungen dieselben sein müssen bei gleichen Werten von $1/\lambda\,T$, aber verschiedenen Energiecurven (Werten

von T). Die oben erwähnten und von mir früher gefundenen Abweichungen bei grossen Werten von λ und T der Energiecurven genügten dieser Forderung nicht in solchem Maasse, dass ich von ihrer Realität überzeugt sein konnte (vgl. p. 295). Die allen Energiecurven gemeinsame Function $f(\lambda T)$ der Formel (1 a) war vielmehr sehr angenähert die Wien'sche.

Das neue von Hrn. M. Planck entdeckte Gesetz lautet bei gleicher Bezeichnung:

$$J = c_1 \lambda^{-5} \frac{1}{e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1} \quad \text{oder} \quad = c_1 \lambda^{-5} e^{-\frac{c_2}{\lambda T}} \frac{1}{1 - e^{-\frac{c_2}{\lambda T}}}.$$

Die Exponentialconstante c_2 wird bestimmt durch die Bedingung:

$$5 = \frac{c_2}{\lambda_m . T} \frac{1}{1 - e^{-\frac{c_2}{\lambda_m . T}}}$$

zu

$$c_2 = 4{,}9651 \ldots \lambda_m . T,$$

während sie nach Wien's Gesetz $5 . \lambda_m . T$ wird.

Den Gleichungen (4 a) und (4 b) entsprechen:

$$\text{(5 a)} \qquad \log (J \lambda^5) = 8 - c_2 \log e \frac{1}{\lambda T} - \log \left(1 - e^{-\frac{c_2}{\lambda T}}\right),$$

$$\text{(5 b)} \qquad - \frac{d \log (J \lambda^5)}{d\left(\frac{1}{\lambda T}\right)} = c_2 \log e \frac{1}{1 - e^{-\frac{c_2}{\lambda T}}}.$$

Da $e^{-\frac{c_2}{\lambda T}}$ bei der Grösse von c_2 für grosse Werte von $1/\lambda T$ sehr klein gegen Eins wird, beschreibt Planck's Formel in einem grossen Gebiete der Variabelen $1/\lambda T$ denselben Verlauf, wie Wien's Formel (vgl. p. 294), da die geringe Verschiedenheit der Werte von c_2 bei den Versuchen nicht merklich ist.

Im Folgenden seien zunächst die Beobachtungen einiger isochromatischer Linien zahlenmässig wiedergegeben. Die nach Wien's und Planck's Formeln berechneten Galvanometerausschläge sind neben den beobachteten angegeben. Als Wert für die Constante c_2 im Exponenten der Formeln ist für alle Berechnungen und auch für die später beschriebene graphische Darstellung angenommen:

für Wien's Formel $c_2 = 5 \times 2920 = 14600$,

„ Planck's „ $c_2 = 4{,}9651 \times 2920 = 14498$.

Die Constante c_1 der Gesetze wurde für jede Beobachtungsreihe so angenommen, dass die beobachtete Curve möglichst genau mit der berechneten übereinstimmte. Für die isochromatischen Linien grösserer Wellenlängen war dies für die ganze Linie nach Wien's Gesetz nicht mehr möglich. Doch gehörte immer noch ein Stück dieser Curven dem Gültigkeitsbereiche von Wien's Formel an, sodass aus diesem Stücke ein Wert für c_1 berechnet werden konnte.

In den Zahlentabellen bedeutet λ die mittlere Wellenlänge des untersuchten Spectralbezirkes in μ, T die beobachtete absolute Temperatur, i den beobachteten und auf die Temperatur Null des Schirmes reducirten Galvanometerausschlag. Der Betrag dieser Correction ist nebst der Schirmtemperatur jedesmal aufgeführt. Schliesslich finden sich die für die Berechnung nach Formel (4a) (Wien) oder (5a) (Planck) benutzten Werte der Constanten $\mathfrak{d}$ und ferner der Factor, mit dem die Galvanometerausschläge jeder Curve multiplicirt werden müssen, damit alle Isochromaten möglichst gut übereinanderfallen und eine einzige Curve ergeben (vgl. p. 293). Da jede Isochromate mit denjenigen benachbarter Wellenlängen ein grosses Gebiet der Werte $1/\lambda T$ gemeinsam hat, so liess sich dieser Factor sicher bestimmen: entweder durch eine graphische Verschiebung der in logarithmischem Maasse ($\log i = f(1/\lambda T)$) dargestellten Curven oder vermittelst der berechneten Werte $\mathfrak{d}$ der Formel (5a) Die resultirende mittlere Curve ergiebt für ein möglichst grosses Gebiet die der Formel (1b) entsprechende Function $F(\lambda T)$.

$\lambda = 1{,}0959\ \mu$.

Spaltbreite[1]) 8 Minuten; Hohlraum I; Schirmtemperatur = 9,8° C.; Schirmcorrection 0,00.

	T	1333,4	1553,1	1628,3	1038,7
	$1/\lambda T$ 0,00	06843	05876	06868	08784
i	beob.	60,6	252,6	59,3	3,65
	Wien	61,44	252,5	59,14	3,61
	Planck	61,27	249,4	58,97	3,68

$\mathfrak{d}$ { Formel (4a) 6,1276; Formel (5a) 6,0959 } Factor 0,0001142.

1) Dies ist die genaue Breite des Spaltes und Bolometerstreifens im zweiten Spectralapparat und die ungefähre Spaltbreite des ersten.

$\lambda = 1{,}6933\ \mu$.

Spaltbreite 3 Minuten; Hohlraum II; Schirmtemperatur 12,6° C.; Schirmcorrection 0,00.

	T	1455,1	1074,2	1071,7	822,9
	$1/\lambda T$ 0,00	04059	05497	05510_5	07176_5
i	beob.	1493	182,6	178,4	16,4
	Wien	1493	182,6	179,2	15,74
	Planck	1484	184,1	180,7	16,14

γ { Formel (4a) 5,7474; Formel (5a) 5,7261 } Factor 0,000 2674.

$\lambda = 1{,}9363\ \mu$.

Spaltbreite 3 Minuten; Hohlraum I; Schirmtemperatur 12,0° C.; Schirmcorrection 0,00.

	T	1358,1	1057,9	886,7	759,4	670,0	1351,1	1581,4
	$1/\lambda T$ 0,00	03803	04882	05824	06798	07707	03822	03266
i	beob.	1023	213,0	54,9	14,2	3,67	1004	2307
	Wien	1042	215,4	54,44	13,12	3,48	1012	2281
	Planck	1037	216,5	55,21	13,43	3,59	1007	2270

γ { Formel (4a) 5,4287; Formel (5a) 5,4085 } Factor 0,000 5556.

$\lambda = 2{,}9085\ \mu$.

Spaltbreite 3 Minuten; Hohlraum I; Schirmtemperatur 12,1° C.; Schirmcorrection 0,00.

	T	1366,1	1064,4	903,0	774,8	675,3	1595,3	1364,3
	$1/\lambda T$ 0,00	02517	03230	03807	04437	05091	02155	02520
i	beob.	596,6	211,9	90,36	36,87	14,51	1054	597,1
	Wien	600,0	211,9	91,16	36,33	13,99	1013	597,1
	Planck	604,4	211,3	90,94	36,40	14,10	1042	601,4

γ { Formel (4a) 4,3740; Formel (5a) 4,3547 } Factor 0,006 289.

$\lambda = 3{,}7650\ \mu$.

Spaltbreite 6 Minuten; Hohlraum II; Schirmtemperatur 14,6° C.; Schirmcorrection + 0,04.

	T	1467,0	1077,8	839,5	627,5	530,9	442,2
	$1/\lambda T$ 0,00	01810	02464	03164	04233	05002	06006
i	beob.	2101	760,2	271,6	58,36	18,23	4,53
	Wien	1974	760,0	273,7	57,47	18,67	4,31
	Planck	2080	768,7	273,8	57,61	18,86	4,40

γ { Formel (4a) 4,4434; Formel (5a) 4,4252 } Factor 0,005 346.

$\lambda = 4{,}7007\ \mu$.

Spaltbreite 3 Minuten; Hohlraum II; Schirmtemperatur 12,1° C.; Schirmcorrection + 0,03.

	T	1478,8	1084,3	833,1	628,6
	$1/\lambda T$ 0,00	01488	01962	02553	03385
i	beob.	228,8	96,34	38,67	11,76
	Wien	199,4	92,86	39,15	11,64
	Planck	221,7	96,44	39,49	11,64

γ { Formel (4a) 3,2118; Formel (5a) 3,1936 } Factor 0,09114.

$\lambda = 4{,}8355\ \mu$.

Spaltbreite 6 Minuten; Hohlraum IV; Schirmtemperatur 14,7° C.; Schirmcorrection + 0,20.

	T	1189,1	1013,3	782,6	620,1	493,2	419,9
	$1/\lambda T$ 0,00	01739	02041	02643	03335	04193	04924
i	beob.	583,0	364,8	148,1	54,10	15,97	5,32
	Wien	555,7	357,7	148,6	54,09	15,45	5,31
	Planck	585,3	366,5	148,4	53,65	15,37	5,31

γ { Formel (4a) 3,8476; Formel (5a) 3,8259 } Factor 0,02125.

$\lambda = 6{,}2554\ \mu$.

Spaltbreite 6 Minuten; Hohlraum II; Schirmtemperatur 14,1° C.; Schirmcorrection + 0,37.

	T	1467,5	1081,0	841,5	631,4	528,9	441,8
	$1/\lambda T$ 0,00	01089_5	01479	01900	02532	03023	03618
i	beob.	305,6	153,0	78,52	29,85	14,76	6,29
	Wien	247,3	140,1	75,75	30,09	14,71	6,16
	Planck	302,1	154,5	79,06	30,38	14,72	6,16

γ { Formel (4a) 3,0839; Formel (5a) 3,0657 } Factor 0,1223.

$\lambda = 7{,}7267\ \mu$.

Spaltbreite 6 Minuten; Hohlraum II; Schirmtemperatur 15,8° C.; Schirmcorrection + 2,13.

	T	1567,3	1315,6	987,6	778,2	596,2	476,3
	$1/\lambda T$ 0,00	008258	009837	01341	01663	02170	02717
i	beob.	604,9	438,1	242,0	136,8	63,39	27,11
	Wien	433,7	344,4	213,7	127,7	60,87	27,40
	Planck	601,0	439,2	242,7	136,9	62,39	27,55

γ { Formel (4a) 3,1608; Formel (5a) 3,1426 } Factor 0,1025.

$\lambda = 7{,}7293\ \mu$.

Spaltbreite 6 Minuten; Hohlraum IV; Schirmtemperatur 14,7° C.; Schirmcorrection + 1,99.

	T	1179,1	961,0	766,3	572,3	475,6	408,4
	$1/\lambda T$ 0,00	01097	01346	01688	02260	02720	03168
i	beob.	327,8	213,1	123,0	51,09	26,27	13,49
	Wien	279,1	194,0	117,8	51,06	26,11	13,58
	Planck	333,5	215,9	123,3	51,07	25,73	13,32

8 { Formel (4a) 3,1415; Formel (5a) 3,1148 } Factor 0,1093.

$\lambda = 8{,}7973\ \mu$.

Spaltbreite 6 Minuten; Hohlraum IV; Schirmtemperatur 15,2° C.; Schirmcorrection + 0,96.

	T	1184,5	988,4	767,3	578,6	481,3	410,5
	$1/\lambda T$ 0,00	009596	01150	01481	01965	02361	02769
i	beob.	92,26	65,86	36,84	17,16	9,00	5,09
	Wien	71,83	54,37	33,54	16,56	9,27	5,12
	Planck	92,54	64,93	36,97	17,18	9,42	5,14

8 { Formel (4a) 2,4647; Formel (5a) 2,4465 } Factor 0,5091.

$\lambda = 8{,}7958\ \mu$.

Spaltbreite 6 Minuten; Hohlraum II; Schirmtemperatur 15,1° C.; Schirmcorrection 0,98.

	T	1458,6	1069,8	844,4	625,6	483,1
	$1/\lambda T$ 0,00	007795	01063	01347	01817	02353
i	beob.	131,7	74,43	44,51	20,46	9,22
	Wien	90,40	59,79	39,52	19,86	9,08
	Planck	129,1	73,75	44,83	20,90	9,22

8 { Formel (4a) 2,4504; Formel (5a) 2,4322 } Factor 0,5261.

Während in diesen Beispielen nur wenige der beobachteten Curven wiedergegeben sind, finden sich auf Taf. IX die Beobachtungspunkte aller Messungsreihen in der Darstellung $\log i = f(1/\lambda T)$. Zunächst sind alle beobachteten Isochromaten, welche nahe derselben Wellenlänge entsprechen, übereinander gelegt. Bei diesen einzelnen Beobachtungsreihen war der Hohlraum oder die Spaltbreite verschieden. Die Curven enthalten die Beobachtungspunkte folgender übereinander gezeichneter Isochromaten:

Curve 1: λ = **1,0616, 1,2875, 1,0959, 1,0504, 1,0279, 1,6933, 1,9363, 1,9770, 1,9942, 2,0303, bezeichnet als ⊙⊙⊙ und**

λ = **2,9085, 3,5327, 3,5389, 3,8572, 3,7610, 3,7650, 3,7202, bezeichnet als × × ×.**

Curve 2: λ = **4,8355, 4,6433, 4,5897, 4,6150, 4,7007, 4,7007, 4,6198, 4,6138, 4,6509, 4,6511, 4,6868, 4,7007, 4,6008.**

Curve 3: λ = **6,2622, 6,2622, 6,2622, 6,2724, 6,2651, 6,2554, 6,2647, 6,2635.**

Curve 4: λ = **7,6503, 7,7125, 7,6921, 7,7267, 7,6255, 7,7293, 7,6823, 7,6823, bezeichnet als × × × und**

λ = **8,7973, 8,7958, 8,7958, 8,7958, 8,7958, bezeichnet als ⊙⊙⊙.**

In Curve 5 endlich sind alle diese Curven durch verticale Verschiebung zu einer einzigen vereinigt. In Curve 6 finden sich meine sämtlichen Beobachtungen für Werte $1/\lambda T > 0{,}0003$ zusammen mit den photometrischen Beobachtungen von Wanner und mir, und Wanner allein dargestellt, um zu zeigen, dass die Neigung aller dieser Isochromaten die gleiche und zwar die dem Wien'schen oder Planck'schen Gesetze entsprechende ist. In sämtlichen Curven folgt die gerade Linie ------ der Formel (4a) (Wien's Gesetz) und die ausgezogene Linie der Formel (5a) (Planck's Gesetz). Die Curven 2, 3, 4 sind doppelt so gross dargestellt, als die Curven 1, 5, 6, um die Abweichungen von Wien's Gesetz deutlich zu machen.

Aus dem wiedergegebenen Beobachtungsmateriale schliesse ich folgendes:

Für grössere Werte von $1/\lambda T$ als ungefähr 0,0003 ($\lambda T < 3000$ ungefähr) folgen die Beobachtungen innerhalb der möglichen Fehler dem Wien'schen Gesetze. Für kleinere Werte von $1/\lambda T$ als ungefähr 0,0003 ($\lambda T > 3000$ ungefähr) treten in allen Curven Abweichungen vom Wien'schen Gesetze auf, welche für gleiche Werte von $1/\lambda T$ in verschiedenen Isochromaten denselben Betrag haben, sodass Formel (1b) nicht verletzt ist. Erst diese Thatsache, welche aus der gewählten Darstellung einwandfrei hervorgeht, beraubte mich der Möglichkeit, die Abweichungen als fehlerhaft anzusehen.

Innerhalb des ganzen Beobachtungsgebietes gilt Planck's Gesetz innerhalb der möglichen Fehler.

Mit diesem Resultate sind in guter Uebereinstimmung die photometrischen Beobachtungen von Wanner und mir und

von Wanner allein. Denn aus ihnen folgt die Gültigkeit von Wien's Gesetz (4a) mit $c_2 = 14600$[1]) für Werte von $1/\lambda T$, welche zwischen 0,0020 ($\lambda = 0,486\ \mu$, $T = 1033,3^0$) und 0,00095 ($\lambda = 0,656\ \mu$ und $T = 1603,3$) liegen. Wenn diese Beobachtungen in meine Curve 1 (Taf. IX) eingetragen werden, wird diese Curve entsprechend Wien's Gesetz nach der Seite der wachsenden Werte $1/\lambda T$ um mehr als das Doppelte verlängert. Dies zeigt Curve 6. Der kleinste Wert $1/\lambda T$ der photometrischen Versuche ist zugleich der grösste Wert des jetzt von mir untersuchten Beobachtungsgebietes. Auch Wanner's Resultat, dass Wien's Gesetz im Sichtbaren bis 4000° gelten müsse, ist im Einklange mit meinen jetzigen Messungen, da in diesem Falle $\lambda T \leqq 4000 \times 0,7 (= 2800)$ ist, also noch in dem Gültigkeitsbereiche von Wien's Formel liegt.[2]) Die einfache von Wanner hierauf hin vorgeschlagene Methode der Temperaturmessung wird überall richtige Werte liefern, wo die Strahlung im Sichtbaren schwarz ist. Es scheint, dass dies für viele glühende Körper nahe zutrifft.

Auch mit Planck's Gesetz sind die photometrischen Versuche im Einklang. Denn dies Gesetz ergiebt für $\lambda T < 3000$ Werte des Differentialquotienten

$$-\frac{d \log_n (J \lambda^5)}{d\, 1/\lambda T} = N,$$

welche bis auf etwa 1 Proc. constant sind. Unter der Annahme $\lambda_m . T = 2920$ nämlich werden die folgenden Werte N berechnet:

$1/\lambda T$	0,01	0,002	0,0015	0,0010	0,00070	0,00050	0,0003401	0,0003333
N	14498	14498	14498	14498	14498	14507	14600	14611

Die Beobachtungen sind nicht genau genug, um das geringe Anwachsen des Differentialquotienten zwischen $1/\lambda T = 0,00050$

1) Wanner giebt 14500 an in guter Uebereinstimmung mit Planck's Gleichung und $\lambda_m . T = 2920$. Der Wert 14600 würde noch eine gute Darstellung der Beobachtungen ergeben, wie aus den von Wanner angegebenen Einzel- und Mittelwerten ersichtlich ist.

2) Obwohl gerade in der Nähe dieses Wertes λT auch die Beobachtungen von Lummer und Pringsheim einigermaassen dem Wien'schen Gesetze zu folgen scheinen, drücken sie doch über diese Beobachtung und Schlussfolgerung von Wanner ihre Verwunderung aus O. Lummer u. E. Pringsheim, l. c. 3. Arbeit p. 165, Anm. 2.

und 0,0003333 mit Sicherheit ergeben zu können, sie sind also mit Planck's Formel in gleicher Weise wie mit Wien's Formel im Einklange.

Auch an den Resultaten meiner Messungen der Energiecurven bei niederen Temperaturen ist nichts Wesentliches zu ändern. Denn unter den dort vorkommenden Werten der Grösse $1/\lambda T$ liegt keiner in dem Gebiete, wo die Abweichungen von Wien's Gesetz bereits ausserhalb der Beobachtungsfehler jener Arbeit wären. Dagegen müssen die bei langen Wellen liegenden Aeste meiner Energiecurven höherer Temperatur merklich geändert werden, damit sie im Einklang mit den Resultaten der Isochromaten sind. Diese Aeste müssen weniger steil abfallen, als meinen Beobachtungen entspricht. Ich habe mit dem Hohlraume II noch eine Beobachtungsreihe von Energiecurven höherer Temperaturen gemacht, bei welcher mein Apparat mit neuen, optisch sehr genauen Silberspiegeln ausgestattet war, deren Politur vorzüglich war und über deren Reflexionsfähigkeit besondere Versuche mir eine genauere Kenntnis verschafft hatten. Aber ich habe nicht den Verlauf erhalten, welcher den Resultaten dieser Arbeit entspricht. Die langwelligen Aeste dieser Energiecurven fallen zwar nicht so steil ab, wie Wien's Curve, sie liegen aber der Wien'schen Curve näher als der Planck'schen. Sollen diese in logarithmischem Maasse dargestellten Energiecurven congruent sein, wie es Formel (1a) verlangt, so würde der den Curven verschiedener Temperatur entsprechende mittlere Curvenzug der Wien'schen Curve wieder sehr nahe kommen. Dagegen gehen diese Energiecurven in diejenigen des Planck'schen Gesetzes über und erfüllen dabei die Forderung der Congruenz weit besser, wenn ich annehme, dass aus einem mir nicht bekannten Grunde bei längeren Wellenlängen die Energie meines Spectrums geschwächt erscheint, sodass die beobachtete Energie bei folgenden Wellenlängen mit den darunter verzeichneten Factoren multiplicirt werden muss:

$\lambda =$	3,91	4,59	5,12	6,26	7,74	8,25	8,81	9,33
Factor:	1,020	1,038	1,050	1,068	1,165	1,195	1,31	
				(1,035)	(1,06)	(1,07)	(1,075)	(1,089)

Wenn diese Energiecurven durch diese Correctionen die Form des Planck'schen Gesetzes erhalten, so ändern sich die Werte der maximalen Energie und Wellenlänge J_m und λ_m nur unwesentlich. Ebenso bringt die neue Temperaturcorrection nur geringe Aenderungen. So ergiebt die erwähnte neue Beobachtungsreihe an Hohlraum II z. B.

T abs.	λ_m	$\lambda_m \cdot T$	J_m	$J_m / T^5 \times 10^{15}$
1580,6	1,846	2918	12,26	1,242
1567,9	1,858	2913	12,28	1,296
1357,4	2,157	2929	5,797	1,258
1352,7	2,159	2920	5,665	1.251
1347,4	2,172	2927	5,499	1,238
1337,4	2,188	2926	5,454	1,275
1055,2	2,777	2929	1,643	1,255
1053,7	2,770	2919	1,660	1,277
1052,2	2,781	2926	1,667	1,293
875,0	3,328	2911	0,642	1,252
876,4	3,333	2914	0,637	1,232
	Mittel:	2921		

Diese Factoren sind je nach der Anordnung des Hohlraumes und der Weite des Spaltes etwas verschieden. Sie sind grösser für kleinere Hohlraumöffnungen und Spaltbreiten. Die oben eingeklammerten Werte von Factoren entsprechen ungefähr Hohlräumen mit grösseren Oeffnungen und Spaltbreiten von 5 Minuten, wie solche auch bei niederen Temperaturen angewandt wurden. Es ist daher möglich, dass diese Messungen mit den eingeklammerten Factoren zu corrigiren sind. Sie würden dadurch zwar unerheblich, aber doch so geändert, dass der Wert von $\lambda_m \cdot T$ in bessere Uebereinstimmung mit den Resultaten der höheren Temperaturen kommt, wie folgende Tabelle zeigt, welche die Resultate der mit Bolometer V meiner Arbeit über niedere Temperaturen gewonnenen Energiecurven enthält, nachdem die eingeklammerten Correctionen angebracht sind.

T abs.	λ_m	$\lambda_m \cdot T$	J_m	$J_m / T^5 \times 10^{14}$
723,0	4,038	2920	4,169	2,101
577,1	5,047	2913	1.352	2,105
462,4	6,310	2917	0.4365	2,065
373,0	7,798	2909	0,1513	2,097
	Mittel:	2915		

Ich vermute als Ursache dieser Fehlerquelle bei den längsten Wellen die Beugung an den Rändern der Oeffnungen des Hohlraumes und Spaltes. Sichtbare Strahlen gelangten stets nur von der Hinterwand des Hohlraumes zum Bolometer. Strahlung 10 facher Wellenlänge dagegen müsste durch Beugung auch von den kühleren Blenden in und vor der Oeffnung des Hohlraumes das Bolometer erreicht haben, um so mehr, je kleiner die Oeffnung des Spaltes und des Hohlraumes war. Ich musste aber kleine Oeffnungen anwenden, da ich nicht die Mittel habe, grössere Hohlräume hoch zu erhitzen. Die Anordnung der vorliegenden Untersuchung ist von dieser Fehlerquelle frei.

Als Gesamtergebnis aller meiner Versuche und derjenigen von Wanner und mir und Wanner allein folgt die Gültigkeit von Planck's Gesetz innerhalb des Gebietes

$$1/\lambda T = 0{,}002 \text{ bis } 0{,}000078.$$
$$\lambda T = 500 \text{ bis } 13000.$$

Das Ergebnis der Arbeit der Herren Rubens und Kurlbaum ist die Gültigkeit von Planck's Gesetz zwischen den Werten $\lambda = 28\ \mu$ (ungefähr), $T = 85$, $1/\lambda T = 0{,}00042$ und $\lambda = 51{,}2\ \mu$, $T = 1773$, $1/\lambda T = 0{,}000011$. Das Gebiet der Werte $1/\lambda T = 0{,}00042$ bis $0{,}000078$ ist ein gemeinsames für diese Messungen und die meinigen. Obwohl die Wellenlängen ausserordentlich verschieden sind, herrscht hier doch eine gute Uebereinstimmung in der Form der Function $F(\lambda T)$ der Formel (1b). Hieraus folgt unter anderem, dass die schwierige Bestimmung der grossen Wellenlängen der Reststrahlen des Flussspates und Steinsalzes gut gelungen sein muss. Auch die Messungen der Herren Lummer und Pringsheim werden, soweit ich es nach ihren Angaben beurteilen kann, wenigstens für grössere Werte von λT[1]) gut mit Planck's Gesetz vereinbar sein.

1) Für kleinere Werte von λT dagegen würden bedeutende Abweichungen bleiben, wenn die Beobachtungen hier wirklich der Thiessen'schen Formel folgen. Nach meinen Beobachtungen ist für $\lambda T < 3000$ Thiessen's Formel nicht gültig. Denn der Differentialquotient

$$-\frac{d \log_n . (J \lambda^5)}{d\, 1/\lambda T}$$

würde nach Thiessen mit abnehmendem λT kleiner werden, und z. B. im Sichtbaren für $T = 1200$ schon den Wert 13350 haben, während

sodass nunmehr unter allen Beobachtern eine gute Uebereinstimmung herrschen dürfte. Dass das Gesetz Planck's zwischen $1/\lambda T = 0{,}002$ und 0,00001 gültig gefunden ist, kann wohl kaum mehr einem Zufall zugeschrieben werden.

Die folgenden zwei Notizen geben kurz die Resultate einer neuen Bestimmung der Dispersion des Flussspates und einer Messung der selectiven Reflexionsfähigkeit einiger Metallspiegel, deren Kenntnis mir erwünscht war.

Wanner's und meine Beobachtungen für alle beobachteten Werte $\lambda T < 3000$ die Constanz des Differentialquotienten innerhalb der etwa 2 Proc. betragenden höchstens möglichen Fehler der Mittelwerte ergeben: in Uebereinstimmung mit Wien's und Planck's Gesetzen. Ein Wert $c_2 < 14300$ dürfte im Sichtbaren für Temperaturen von etwa 1200° nach unseren Versuchen nicht möglich sein. Wenn die Herren Lummer und Pringsheim bereits bei 1,21 μ den Wert $c_2 = 13510$ finden (l. c. p. 36), so widerspricht das meinen Beobachtungen, dem Wien'schen und dem Planck'schen Gesetz, ist aber mit Thiessen's Formel in Uebereinstimmung. Vielleicht aber ist diese Isochromate von Lummer und Pringsheim nicht mehr so genau beobachtet, um sichere Sehlüsse zuzulassen.

(Eingegangen 29. November 1900.)

3. *Eine neue Bestimmung der Dispersion des Flussspates im Ultrarot;* *von F. Paschen.*

Versuchsanordnung (vgl. Figur).

Es bedeuten: s_1 den Spalt des Prismenapparates, G das früher schon von mir benutzte Rowland'sche Concavgitter, drehbar um eine verticale Axe, S ein silberner Concavspiegel, der sich in der Richtung des Pfeiles verschieben lässt, s_2 einen bilateral erweiterbaren Spalt.

Das vom Spalt s_2 kommende Licht erhielt bei einer geeigneten Stellung des Spiegels S eine solche Convergenz (oder Divergenz), dass das Spectrum der gewünschten höheren Ordnung scharf auf dem Spalte s_1 entworfen wurde. Man benutzte zur Justirung die im Knallgasgebläse erzeugten Natriumlinien. Die Dispersion des in der Ebene des Spaltes s_1 abgebildeten Gitterspectrums war eine solche, dass die D-Linien $n-1^{\text{ter}}$ und $n+1^{\text{ter}}$ Ordnung je um durchschnittlich 50 mm vom Spalt entfernt lagen, wenn die n^{ter} Ordnung mit dem Spalte coincidirten. Die Justirung der D-Linien auf dem Spalte s_2 geschah mit engem Spalte s_2. Zur Messung wurde s_2 so viel erweitert, dass genügende Energie zur exacten Messung auf den Bolometerstreif fiel. Der Bolometerstreif und das Spaltbild einer Linie im Prismenapparate nahmen einen Winkel von 3 Min. im Spectrum ein. Nur bei wenigen Versuchen wurden die Bolometer- und Spaltbreiten 1,5 Min. gewählt. Die Dispersion sowohl des Prismen- wie des Gitterapparates war ungefähr doppelt so gross, als bei meinen früheren Bestimmungen.

Die abbildenden Teile der Apparate waren genügend vollkommen, sodass auch die Definition in den Spectren entsprechend gesteigert war. Die Leistungsfähigkeit des bolometrischen Apparates[1]) war durch ein empfindlicheres Galvano-

---

1) In Hrn. Lummer's Referat, Paris 1900, p. 70 steht folgender Satz: „Paschen emploie le bolomètre à bande de Lummer et Kurlbaum (Wied. Ann. **46.** p. 204—224. 1892), qu'il dit avoir rendu dix fois plus sensible: mais cette assertron repose sur une erreur.“ Erstens benutze ich meine eigenen Bolometer, deren Streifen allein aus Lummer-Kurlbaum'schem Platinsilberblech bestehen, welche im übrigen aber ähnlich den Langley'schen und wesentlich anders construirt sind, als die von Lummer und Kurlbaum beschriebenen Bolometer. Zweitens steht in meinem Aufsatze (Wied. Ann. **48.** p. 286. 1893): „Es wird auffallen, dass O. Lummer und F. Kurlbaum nur einen Hauptstrom von 0,006 Amp. benutzten und nur einen solchen von 0,004 Amp. benutzen konnten, trotzdem ihre Streifen bei gleicher Dicke doppelt so breit waren als meine.“ Statt „0,004 Amp.“ muss es hier heissen „0,04 Amp.“ nach den Angaben von Lummer u. Kurlbaum (l. c. p. 222). Dass „0,004 Amp.“ ein Druckfehler ist, geht aus dem Sinne des Satzes hervor, auch habe ich es den Herren Lummer und Kurlbaum damals (1893) brieflich mitgeteilt und durch Beilage der Seite aus meinem Manuscripte belegt, als dieselben mir ein zur Veröffentlichung bestimmtes Concept sandten, welches durch die Zahl „0,004“ veranlasst war. Ferner habe ich diesen Druckfehler (Wied. Ann. **49.** p. 52, Anm. 1. 1893) berichtigt. Hr. Lummer kann demnach diesen Druckfehler „0,004 Amp.“ nicht wohl von neuem meinen. Es bleiben dann nur noch folgende Stellen meiner citirten Arbeit: p. 279 sagte ich, dass der Thermoapparat bei Benutzung des dort beschriebenen Bolometers erst durch die Anwendung eines geeigneten Galvanometers erheblich an Empfindlichkeit gewänne, und p. 286, dass die von mir gewöhnlich benutzte Empfindlichkeit sich als 300 mal grösser berechne als die, welche Lummer und Kurlbaum für ihr Beispiel anwandten. Statt dieses Empfindlichkeitsverhältnisses würde das 1 : 40 übrig bleiben, wenn der Bolometerstrom bei Lummer und Kurlbaum von 0,006 Amp. auf das höchstmögliche Maass 0,04 Amp. erhöht würde. Diese Steigerung der Empfindlichkeit kommt, wie ich ausgeführt habe, hauptsächlich auf Rechnung meines Galvanometers. Andere Aussagen über das Verhältnis meiner Bolometer zu denen Lummer und Kurlbaum's habe ich nie gemacht, und die obigen Aussagen beruhen, so viel ich sehe, nicht auf einem Irrtum. Ich schätze übrigens die schöne Platinfolie von Lummer und Kurlbaum sehr und habe sie vielfach empfohlen.

In demselben Referate des Hrn. Lummer steht über die Schwärzung des Bolometers durch eine spiegelnde Hülle p. 53 und 54 folgendes: „il est préférable d'employer une enveloppe polie, ainsi que nous l'avons fait, Pringsheim et moi (Wied. Ann. **63.** p. 397. 1897), avec le bolomètre

meter in dem Maasse gesteigert, wie die Lichtstärke infolge der grösseren Dispersion abgenommen hatte. Die exacten Messungen mit dieser Anordnung bis zur Wellenlänge 7 μ teile ich hier mit.

Beispiel. Resultate der Messung der Wellenlänge 3,2413 μ entsprechend dem Beugungsbilde zweiter Ordnung, wenn die D-Linien elfter Ordnung auf dem Spalte s_1 abgebildet waren: 3,2413 = 11/2 0,5893. Die einzelnen Messungsreihen der Energiecurven der Beugungsbilder ergaben die Maxima bei folgenden Minimalablenkungen:

30°	9,269′	11,0° C.
	9,192	11,0
	9,148	10,6
	9,243	10,1
	9,379	9,9
	9,343	10,2
	9,167	10,1
	9,194	10,4
	9,180	10,3
	9,240	10,3

Mittel: 30° 9,236′
= 30° 9′ 14,2″ w. F. = 0,98″
Mittel: Temp. = 10,3° C.

Der umrandete Teil der folgenden Tabelle enthält die Messungsresultate. Es sind angegeben: die beobachteten mittleren Minimalablenkungen δ und ihr wahrscheinlicher Fehler $\omega.F$ in Secunden, die Anzahl Messungsreihen, die mittlere Temperatur und der Brechungsexponent n. In den drei letzten Columnen sind die Differenzen der beobachteten Brechungs-

---

de surface, et ainsi que l'a réalisé plus tard **Paschen** (Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin p. 4. 1899; Wied. Ann. **60.** p. 722. 1897) pour le bolomètre linéaire." Erstens haben **Lummer** und **Pringsheim** 1897 nur gesagt, *Versuche mit einem Bolometer, bei dem die reflectirte Energie mittels eines versilberten Hohlspiegels wiedergewonnen wird, sollen zeigen, inwieweit etc.* Zweitens geht aus den Citaten hervor, dass mein Vorschlag, das Bolometer in eine spiegelnde Hülle zu setzen, der ältere ist. (Zweites Citat meiner Arbeiten, welches älteren Datums ist, als das Citat der Arbeit von **Lummer** und **Pringsheim**.)

λ (μ)	δ Grad	Min.	sec	w. F. sec	Anzahl der Messungsreihen[1]	Mittlere Temp. °C.	n beob.	Δn Einh. der 5. [...] beob. — ber. Fl. (Ia)	Fl. (Ib)	Fl. [...]
0,32525							1,44987	+ 4	+ 4	+
0,34015							1,44775	− 3	− 4	−
0,36009							1,44535	−14	−14	−1
0,39681							1,44214	− 3	− 3	−
0,41012							1,44121	+ 2	+ 1	+
0,48607							Paschen { 1,43713	0	+ 1	+
0,58932							Paschen { 1,43393	+ 1	0	+
0,65618							1,43257	− 2	− 2	−
0,68671							1,43200	− 9	− 9	−
0,71836							1,43157	− 6	− 6	−
0,76040							1,43101	− 8	− 8	−
0,8840	31	16	3,1	1,19	11	11,0	1,42989	0	0	+
1,1786	31	6	40,1	1,66	11	10,8	1,42798	− 1	0	
1,4733	30	59	30,5	0,95	7	11,1	1,42652	− 1	− 2	−
1,5715	30	57	22,6	1,12	11	10,6	1,42608	0	0	+
1,7680	30	52	46,6	1,20	14	10,8	1,42515	0	0	
2,0626	30	45	36,2	0,91	6	10,7	1,42368	− 1	− 1	−
2,1608	30	43	7,1	0,71	6	10,7	1,42317	0	0	
2,3573	30	37	47,5	0,86	13	10,7	1,42208	0	0	−
2,6519	30	29	10,3	0,87	7	10,3	1,42032	+ 1	0	
2,9466	30	19	35,1	0,80	20	10,9	1,41835	− 1	− 2	−
3,2413	30	9	14,2	0,98	10	10,3	1,41623	+ 3	+ 2	
3,5359	29	57	49,3	1,18	7	11,2	1,41388	+ 2	0	−
4,1252	29	32	7,9	0,72	7	10,5	1,40858	+ 4	+ 3	
4,7146	29	2	21,8	0,97	12	10,5	1,40242	+ 7	+ 5	+
5,3039	28	28	11,9	1,08	9	10,5	1,39531	+ 5	+ 3	
5,8932	27	49	26,8	2,32	12	11,0	1,38721	0	− 3	−
6,4825	27	7	14,0	0,90	8	10,6	1,37834	+16	+14	+
7,0718	26	18	50,4	2,85	5	10,5	1,36810	+ 8	− 1	
7,6612							1,35680	− 4	−10	−
8,2505							1,34444	− 2	− 7	−
8,8398							1,33079	0	− 7	−
9,4291							1,31612	+36	+29	+

Brechender Winkel: 59° 59′ 15″.

---

1) Dieselbe Wellenlänge wurde vielfach aus mehreren verschiedenen Gitterordnungen bestimmt, wie l. c. gezeigt ist.

2) Diese Abweichung liegt weit ausserhalb der möglichen Fehler. Die Wellenlänge 6,48 μ fällt in das Maximum der stärksten Absorption des Wasserdampfes der Luft. Bei kleineren Wellenlängen steigt die Energie sehr schnell bis zu der Stelle 6,26 μ, wo keine erhebliche Absorption ist. Es ist wahrscheinlich, dass von dieser Energie kürzerer Wellenlänge ein wenig in den Spalt des Prismenapparates hineingelangte.

exponenten von den nach Ketteler's Formeln berechneten in Einheiten der fünften Decimalen aufgeführt.

Ketteler's Formeln.

$$\text{(I)} \qquad n^2 = a^2 - \frac{M_1}{\lambda_1^2 - \lambda^2} + \frac{M_2}{\lambda^2 - \lambda_2^2},$$

$$\text{(II)} \qquad n^2 = A^2 - \frac{M_2}{\lambda^2 - \lambda_2^2} - k\lambda^2 - h\lambda^4.$$

Die Zahlenwerte der zur Berechnung benutzten Constanten sind:

Formel (Ia $\begin{cases} a^2 = 6{,}09104 \\ \lambda_1^2 = 1258{,}47 \\ \lambda_2^2 = 0{,}008884 \end{cases}$ $\quad M_1 = 5099{,}15$, $M_2 = 0{,}00612093$

Dies sind die Werte, mit denen die Formel (I) meine ersten Beobachtungen[1]) gut darstellte.

Formel (Ib) $\begin{cases} M_1 = 5102{,}07 \\ \lambda_1^2 = 1259{,}19 \end{cases}$ die übrigen Constanten wie in Formel (Ia)

Formel (II) $\begin{cases} A^2 = 2{,}03918 \\ k = 0{,}0032055 \\ h = 0{,}0_6 2894 \end{cases}$ $\quad M_2 = 0{,}006125$, $\lambda_2^2 = 0{,}008884$

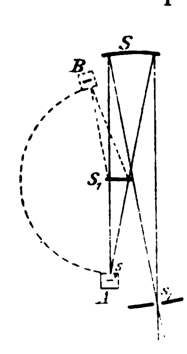
Die letzte Formel giebt den besten Anschluss an die Beobachtungen. Die Abweichungen der Beobachtungen von den Formeln entsprechen im Ultrarot wenigen Einheiten der dritten Decimalen im Werte der Wellenlängen, sodass es möglich scheint, durch exacte Einstellung diese Decimale noch einigermaassen genau zu messen.

1) F. Paschen, Wied. Ann. 53. p. 821. 1894.

(Eingegangen 29. November 1900.)

4. *Bestimmung des selectiven Reflexionsvermögens einiger Planspiegel;* *von F. Paschen.*

Ein mit Eisenoxyd bedecktes Platinstreifchen wurde elektrisch geglüht und sandte durch eine spaltförmige Oeffnung s eines Kastens Licht zum concaven Spiegel S von 70 cm Krümmungsradius, welcher ein reelles Bild des Spaltes s auf dem Spalt s_1 meines Flussspat-Spectralapparates[1]) entwarf (vgl. Figur). Bei der Stellung A des Kastens gelangte das Licht direct zum Spiegel S_1, bei der Stellung B, nachdem es an dem zu untersuchenden Planspiegel S_1 reflectirt war. Der Einfallswinkel betrug bei der Anordnung 8,5 Grad. Der Kasten war an einem Arme eines Spectralapparates befestigt, mit dem er sich in die durch Anschläge fixirten Lagen A und B drehen liess. Der Spiegel S liess sich schnell in die für die Anordnung B richtige fixirte Lage bringen. Er stand auf dem Spectrometertischchen, welches mit den Spitzen seiner Füsse in kleine Vertiefungen hineinpasste. Die Ebene des Planspiegels ward in die Drehaxe hineinverlegt. und die Länge des Strahlenganges bei den Anordnungen A und B war genau die gleiche. Dies ist in dem an Absorptionen der Zimmerluft reichen ultraroten Spectralteile zweckmässig. Der Spalt s war ein wenig grösser, als der Spalt s_1, sodass sein Bild sehr exact stets in derselben Weise justirt werden konnte. Es sind untersucht die Reflexionen verschiedener Silberspiegel und eines Neusilberspiegels: 1. ein Planspiegel I auf einer Feinsilberplatte, geschliffen und polirt von Zeiss. Ebensolche Hohlspiegel be-



1) Die Breite des Bolometers betrug 3 Minuten im Spectrum.

nutzte ich im Spectrometer, deren Reflexion ich wissen wollte. 2. Eine frisch versilberte ebene Glasfläche II. Die dicke Versilberung war zwar noch ein wenig durchsichtig für Blau, wie die meisten versilberten Glasflächen, aber die Schicht war sehr gleichmässig und vorzüglich polirt. Aehnlich versilberte Glasspiegel sind häufig im Spectrobolometer verwendet. Ist die Versilberung neu, so sind sie in der Reflexion Vollsilberspiegeln wenig unterlegen, wie die Messungen zeigen. Drittens untersuchte ich einen genau ebensolchen versilberten Glasspiegel III, der aber 4 Jahre alt war, und dessen Silber schon die bekannte bräunliche Färbung zeigte, die alte Silberspiegel mit der Zeit erlangen. Die Reflexion dieses Spiegels ist bedeutend schlechter geworden. Der neusilberne Spiegel IV bestand aus derselben Legirung, aus der die Halbkugeln bestanden, welche ich zur Schwärzung der strahlenden und bestrahlten Flächen benutzte. Auch dieser Spiegel war von Zeiss vorzüglich ausgeführt.

	Vollsilberspiegel I			Versilberte Glasspiegel.		
				neu II		alt III
λ	R	m. F.	Zahl d. Mess.	R	Zahl d. Mess.	R
0,7786	94,24	0,39	4	91,96	3	85,15
0,9104	95,43	0,15	4	94,38	2	86,48
1,096	96,45	0,14	5	96,04	3	88,25
1,329	97,30	0,11	5	97,27	1	89,50
1,718	97,70	0,11	4	97,50	2	90,94
2,204	97,97	0,19	4	97,95	2	91,91
3,842	98,18	0,14	4	98,08	2	93,58
4,810	98,23	0,18	4	98,13	2	94,06
6,264	98,40	0,08	6	98,20	3	95,47
7,737	98,69	0,24	4	98,46	2	96,17

λ bedeutet die Wellenlänge in μ, R die reflectirte Strahlung in Procenten der einfallenden, m. F. den mittleren Fehler, Zahl d. Mess. die Anzahl der Messungsreihen, aus denen das Mittel und der mittlere Fehler berechnet ist. Bei Spiegel III ist jede Zahl das Resultat nur einer Messungsreihe (die aber aus etwa zehn Einzelbeobachtungen bestand). Die Galvanometerausschläge betrugen nie unter 100 Sct., und ein einziger Ausschlag war bis auf $^1/_2$ Sct. genau.

Neusilberspiegel.

λ	R	m. F.	Zahl d. Mess.	λ	R	m. F.	Zahl d. Mess.
0,7786	70,89	0,11	3	2,204	88,43	—	2
0,9104	72,44	0,10	3	3,842	91,80	—	2
1,096	76,16	0,06	4	4,810	92,53	—	2
1,329	80,67	0,06	3	6,264	93,17	0,18	3
1,718	85,05	0,09	3	7,737	94,03	—	2

Die Resultate für den Spiegel I schliessen gut an die Resultate der Herren Langley[1]), E. Hagen und H. Rubens[2]) an. Auch sind sie in guter Uebereinstimmung mit den Resultaten von H. Rubens[3]), welcher Messungen bis 3 μ gemacht hat, und auch mit denen von Nichols[4]) bis 9 μ. Sie sind ferner im Einklang mit der Annahme, dass bei den langen Wellen der Rubens'schen Reststrahlen die Reflexion des Silbers eine nahezu vollständige ist. Denn bei 8 μ fand ich das Reflexionsvermögen bereits auf 98,7 Proc. gestiegen.

Die Reflexion des Silbers im Ultrarot nach verschiedenen Beobachtern.

λ (μ)		0,80	0,90	1,00	2,00	2,50	3,00	3,50
Rubens[5])	I	94,2	95,1	96,3	97,2	96,3	98,0	—
	II	96,3	96,5	96,8	97,4	97,8	98,3	—
Nichols[6])		—	96,0	—	97,2	96,5	97,3	98,3
Paschen[7])		94,83	95,48	96,04	97,88	98,04	98,12	98,16

λ (μ)	4,00	6,00	7,00	8,00
Nichols	100	99,8	99,6	99,0
Paschen[7])	98,18	98,36	98,52	98,71

Das Reflexionsvermögen steigt nach meinen Messungen für die vorzüglichen Spiegel I und II nicht ganz so schnell an, wie nach denen von Nichols.

1) S. P. Langley, Phil. Mag. **27.** p. 10. 1889.

2) E. Hagen u. H. Rubens, Zeitschr. f. Instrumentenk. Heft 10. p. 293. 1899.

3) H. Rubens, Wied. Ann. **37.** p. 249. 1889.

4) E. F. Nichols, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin 1183—1196. 1896; Wied. Ann. **60.** p. 401. 1897.

5) Hr. H. Rubens untersuchte zwei verschiedene Silberspiegel I u. II.

6) Hr. E. F. Nichols untersuchte einen Silberniederschlag auf Glas.

7) Spiegel I, interpolirte Werte.

(Einge[illegible]vember 1900.)

5. *Ueber das Verhalten flüssiger Dielektrica beim Durchgange eines elektrischen Stromes; von Egon v. Schweidler.*

(Aus den Sitzungsberichten der k. Akad. d. Wissensch. in Wien; math.-naturw. Klasse (IIa) 109, Juli 1900.)

Bestimmungen der „Leitfähigkeit“ schlecht leitender flüssiger Dielektrica sind wiederholt ausgeführt worden, doch stimmen die Angaben verschiedener Beobachter so wenig überein, dass die Leitfähigkeit einstweilen kaum als charakteristische Constante einer solchen Substanz verwendet werden kann. Diese Nichtübereinstimmung mag teilweise an dem Umstande liegen, dass die flüssigen Dielektrica häufig chemisch nicht definirte Gemische verschiedener organischer Verbindungen sind (wie die meisten fetten Oele, Petroleum, Benzin u. dgl.), oder sich nur schwierig rein darstellen und in diesem Zustande beim Experimentiren erhalten lassen. Ausserdem hat es sich aber gezeigt, dass selbst bei einer gegebenen Probe einer Substanz der scheinbare Widerstand von Nebenumständen abhängt, indem das Ohm'sche Gesetz bei flüssigen Dielektricas nicht erfüllt ist.

Neben älteren Beobachtungen von Hertz[1]), Quincke[2]) und anderen sind es hauptsächlich die Untersuchungen Koller's[3]), die hierüber Aufschluss geben.

Koller maass den Widerstand einer von zwei parallelen Metallplatten begrenzten Schicht eines flüssigen Dielektricums, indem er diesen Condensator und einen bekannten grossen Widerstand hintereinander in den Kreis einer Batterie einschaltete und elektrometrisch den Potentialabfall im Conden-

1) H. Hertz, Wied. Ann. 20. p. 279. 1883.

2) G. Quincke, Wied. Ann. 28. p. 529. 1886.

3) H. Koller, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien 98. p. 201. 1889.

sator und im Vergleichswiderstande bestimmte. Die elektromotorische Kraft variirte bei seinen Versuchen zwischen $^1/_8$ und 8 Daniells, die Elektrodendistanz zwischen einigen Zehntelmillimetern bis zu nahe einem Centimeter.

Die Ergebnisse seiner Beobachtungen waren kurz die folgenden: Die Stromstärke ändert sich mit der Zeit, sie nimmt unmittelbar nach Stromschluss rasch, späterhin langsamer ab, und es ist diese Aenderung stundenlang verfolgbar. Der Gegensatz zwischen dem raschen Absinken des Stromes in den ersten Secunden und dem langsamen in der darauffolgenden Zeit ist bei manchen Substanzen sehr schroff, bei anderen weniger ausgesprochen, einzelne zeigen überhaupt nur geringe zeitliche Aenderungen.

Die Stromstärke ist nicht proportional der eingeschalteten elektromotorischen Kraft, sondern nimmt in geringerem Maasse zu als diese, wenigstens bei den von Koller angewendeten niedrigen Spannungen, während Quincke[1]) bei hoher Spannung das entgegengesetzte Verhalten beobachtet hatte.

Ebenso ist die Stromstärke bei constanter elektromotorischer Kraft und verschiedenen Schichtdicken nicht dieser umgekehrt proportional, sondern die scheinbare Leitfähigkeit nimmt mit der Elektrodendistanz zu.

Nach einer der Koller'schen im Principe gleichen Methode hat Naccari[2]) analoge Versuche angestellt. Im Gegensatze zu Koller findet Naccari nur geringe Abweichungen vom Ohm'schen Gesetze; ferner constatirt er ein rasches Anwachsen der Leitfähigkeit mit der Temperatur.

Da auch Koller in einzelnen Fällen nur geringe Abweichungen vom Ohm'schen Gesetze erhielt, sind Naccari's Resultate kein Gegenbeweis dafür, dass häufig, wenn auch nicht immer, unter noch nicht bekannten Bedingungen solche Abweichungen bestehen.

Gerade die Verhältnisse in einem derartigen Dielektricum scheinen mir eine grosse Analogie mit jenen eines ionisirten Gases (von Röntgen- oder Becquerelstrahlen durchsetzte Gase,

---

1) l. c.

2) A. Naccari, Nuov. Cim. (4) 8. p. 259. 1898; 11. p. 50. 1900.

Flammengase) zu zeigen. Auch bei diesen finden wir eine Abnahme der Leitfähigkeit infolge der Aufzehrung der freien Ionen, dieselbe Art der Abhängigkeit der Stromstärke von der elektromotorischen Kraft und von der Elektrodendistanz, Erscheinungen, die durch die verschiedene Geschwindigkeit der positiven und negativen Ionen und durch die Störung des elektrischen Feldes infolge der Aufstauung derselben verständlich gemacht wurden.

Um diese Analogien weiter zu verfolgen, habe ich zunächst an Toluol Messungen angestellt; ich bediente mich der directen galvanometrischen Methode, die bei besser isolirenden Flüssigkeiten vielleicht versagt hätte, bei Toluol aber eine ziemliche Variation der elektromotorischen Kräfte zuliess und durch ihre Einfachheit nicht nur bequemer als die elektrometrische, sondern auch verlässlicher ist und rascheres Arbeiten ermöglicht.

Das verwendete Toluol war käufliches, „rectificirtes“; auf besondere Reinheit desselben legte ich keinen Wert, da es sich mir zunächst nicht um die Frage handelte, ob die Abweichungen vom Ohm'schen Gesetze bloss von Verunreinigungen (Staub, Wassergehalt u. dgl.) herrühren oder auch bei vollkommen reinen Substanzen auftreten, sondern nur darum, das Verhalten einer einmal gegebenen Substanz beim Durchgange eines elektrischen Stromes genauer festzustellen. In der That zeigte es sich, dass verschiedene Proben zwar ziemlich verschiedene Werte für die „Leitfähigkeit“ lieferten, dass aber die Aenderungen derselben mit der Durchströmungsdauer und anderen Nebenumständen in qualitativ gleicher Weise erfolgten.

Die Versuchsanordnung war die folgende:

In einer von der zu untersuchenden Flüssigkeitsprobe erfüllten Porzellanschale lagen parallel und horizontal die beiden Elektroden, gebildet durch Messingscheiben von circa 66 mm Durchmesser, die durch drei dazwischen gelegte isolirende Plättchen (entweder Quarzstücke von 1 mm oder Glasstücke von 3, 1 mm Dicke) getrennt waren. Die eine Elektrode war über ein Galvanometer, eventuell über einen Kurzschluss der Galvanometerrolle dauernd zur Erde geleitet, die andere mit einem Punkte constanten Potentiales verbunden, das zwischen 0 und + 300 Volt variirt und mittels eines Weston-

voltmeters auf ca. 1 pro mille genau gemessen werden konnte. Die Isolation der Quarz-, bez. Glasplättchen erwies sich als unendlich gross im Vergleiche zu der des Toluols. Das verwendete Galvanometer war ein hochempfindliches d'Arsonval'sches von Siemens & Halske; sein innerer Widerstand betrug 10000 Ω, die Schwingungen waren fast aperiodisch gedämpft, sodass beim Oeffnen des die Galvanometerspule kurz schliessenden Schlüssels die Einstellung in die neue Ruhelage in ungefähr 20 Secunden erfolgte; der Reductionsfactor betrug $5{,}00 \cdot 10^{-10}$ Ampère pro 1 mm einseitigen Ausschlages. Für einige Versuche wurde in die Zuführungen zu den Elektroden des zu messenden Widerstandes ein Commutator eingeschaltet, mittels dessen die Stromrichtung im Dielektricum umgekehrt werden konnte.

Was zunächst die Abnahme der Stromstärke mit der Durchströmungsdauer betrifft, so erhielt ich mit den Koller'schen übereinstimmende Resultate, wie aus den nachstehenden Tabellen hervorgeht, in denen einige charakteristische Versuchsreihen dargestellt sind.

Es bedeutet E die elektromotorische Kraft in Volt, d die Elektrodendistanz in Millimetern, t die Zeit in Minuten, vom Stromschluss an gerechnet, i die beobachtete Stromstärke in 10^{-10} Ampère.

I. $E = 300$ V., $d = 1$ mm.		II. $E = 200$ V., $d = 1$ mm.	
t	i	t	i
0	—	0	—
0,75	545	0,5	375
1	480	1	260
1,5	440	1,5	182
2	410	2	155
2,5	390	2,5	140
3	375	3	130
4	348	4	117
5	330	5	110
6	319	6	105
7	305	7	101
8	297	8	99
9	294	9	95
10	282	[illegible]	94
—	—		78

III. $E = 10$ V., $d = 1$ mm.

t	i
0	—
0,25	115
0,5	110
1	100
2	80
3	75
4	65
5	55
6	72
7	60
8	51
9	42
10	40

IV. $E = 5$ V., $d = 3,1$ mm.

t	i
0	—
0,5	34
1	32
1,5	30
2	26
2,5	24
3	20
4	18
5	15
6	13
7	11
8	10
9	10
10	8
12	6
14	5

Man erkennt auch hier wieder, dass die procentuelle Abnahme der Stromstärke, also auch die ihr proportionale Abnahme der Leitfähigkeit, die ich kurz als „Ermüdung“ des Dielektricums bezeichnen will, unmittelbar nach Stromschluss weit höhere Werte annimmt als später, ferner dass die „Ermüdung“ um so mehr in den ersten Secunden erfolgt, je höher die angewendete elektromotorische Kraft ist, bei kleinerer elektromotorischen Kraft aber gleichmässiger über einen längeren Zeitraum verteilt ist, was bereits von Koller behauptet wurde. Häufig (wie z. B. in Versuchsreihe III) kam ein vorübergehendes Anwachsen der Stromstärke vor, was wohl auf zufällige Störungen zurückzuführen sein dürfte.

Wird nach längerer Durchströmungsdauer die elektromotorische Kraft plötzlich ausgeschaltet und die Anode mit der Erde verbunden, so ist ein Polarisationsstrom nicht sicher nachweisbar, jedenfalls übersteigt seine Grösse nicht 2 bis $3 \cdot 10^{-10}$A; eine durch Polarisation entstandene elektromotorische Gegenkraft beträgt somit höchstens ein Volt und kann weder die allmähliche Abnahme der Stromstärke, noch einige später erwähnte Erscheinungen erklären.

Wird die elektromotorische Kraft, nachdem sie einige Zeit ausgeschaltet war, wieder eingeschaltet, so ist in der Regel die Stromstärke grösser als vorher, sinkt aber wieder auf den

früheren Wert; auch diese Erscheinung ist bei Anwendung höherer Spannungen stärker ausgeprägt, bei niederen Spannungen oft nicht merkbar. Bereits Hertz[1]) erwähnt diese Thatsache und fasst sie auf als das Resultat der Uebereinanderlagerung der „rückstandbildenden" und der „eigentlichen Strömung". Da aber nach dem Obigen die den Rückstand liefernden Ströme galvanometrisch nicht messbar, also von anderer Grössenordnung sind, muss man wohl schlechthin ein Wiederanwachsen der Leitfähigkeit, eine „Erholung" des Dielektricums in der stromlosen Periode annehmen, über deren Natur man sich die von der Theorie der Gasentladungen nahegelegten Vorstellungen bilden mag.

Zwei Beispiele für den Verlauf dieser Erscheinung geben die Tab. V und VI.

V. $E = 300$ V., $d = 1$ mm.

t	i	t	i
0	—	26	286
0,25	365	[26—31;	$E = 0$]
1	340	31,3	362
2	325	32	315
3	315	36	278
5	309	[36—36,5;	$E = 0$]
[5—6;	$E = 0$]	36,8	290
6,25	332	37,5	265
7	320	[68—69;	$E = 0$]
10	306	69,3	65
[10—12;	$E = 0$]	73	61
12,3	345	[73—75;	$E = 0$]
13	325	75,3	68
15	307	77	64
[15—19;	$E = 0$]	[77—107	$E = 0$]
19,3	362	107,3	82
20	330	120	66

VI. $E = 200$ V., $d = 1$ mm.

t	i
0	—
1	125
2	114
5	107
10	100
68	60

VII.

τ	$\frac{\Delta i}{i}$
$\tau = 0,5$	$\frac{\Delta i}{i} = 4,3$ Proc.
1	7,5
2	12,7
4	18
5	27

1) H. Hertz, l. c.

In Tab. VII ist der Zusammenhang der durch die procentuelle Zunahme der Leitfähigkeit ($\Delta i / i$) quantitativ festgesetzten „Erholung" mit der Dauer der Erholungsperiode (τ) auf Grund der Versuchsreihe V dargestellt. Es zeigt sich analog wie bei der „Ermüdung", dass die „Erholung" hauptsächlich in der ersten Zeit stattfindet, später langsamer zunimmt.

Wird nach längerer Dauer des Stromes seine Richtung im Dielektricum umgekehrt, so erhält man zunächst eine bedeutend grössere Stromstärke als in der ursprünglichen Richtung, zugleich ist aber die zeitliche Abnahme derselben eine noch raschere als bei einem noch gar nicht vom Strome durchflossenen Dielektricum. Bei beliebig oft wiederholtem Umschalten zeigt sich diese Erscheinung immer wieder; ähnlich wie die Phänomene der „Ermüdung" und „Erholung" ist übrigens auch dieses um so auffallender, je grösser die angewandte elektromotorische Kraft ist.

Die Tab. VIII und IX enthalten die Resultate zweier aus anderen herausgegriffenen Versuchsreihen. A und B bezeichnen hierbei die beiden entgegengesetzten Stromrichtungen.

VIII. $E = 200$ V.

t		i
40	A	58
42	B	170
43	B	90
45	B	85
46	A	110

IX. $E = 100$ V.

t		i
0	A	77
11	A	41
12	B	107
16	B	60
17	A	115
22	A	47

Auch diese Erscheinung, die ja mit den Rückstandserscheinungen offenbar in nahem Zusammenhange steht, lässt sich aus den bereits erwähnten Gründen nicht einfach durch die Annahme erklären, dass zu einem gewöhnlichen Leitungsstrome ein Rückstandsstrom sich addire. Vielmehr scheint hier ein Analogon zu der unipolaren Leitfähigkeit der Gase vorzuliegen; ein durch die längere Wirkung eines Stromes ermüdetes Dielektricum zeigt, wenn auch nicht ein streng unipolares Leitvermögen, wie Gase unter bestimmten Bedingungen, doch eine beträchtliche Verschiedenheit der Werte seines Leitvermögens für entgegengesetzte Stromrichtungen.

Die Erscheinungen der „Ermüdung" und „Erholung" er-

schweren die Aufstellung quantitativer Beziehungen zwischen elektromotorischer Kraft und Stromstärke. Je nach der Reihenfolge, in der man von niederen zu höheren Spannungen oder umgekehrt fortschreitet und der Zeit, durch welche man diese Spannungen wirken lässt, kann man daher ziemlich verschiedene Formen für diese Abhängigkeit finden. Immerhin liess sich erkennen, dass die Werte, welche bei verschiedenen elektromotorischen Kräften die Stromstärken nach hinreichend langer Dauer nahezu constant beibehalten, nicht der elektromotorischen Kraft proportional sind, sondern hinter derselben zurückbleiben, was also ebenfalls mit Koller's Resultaten übereinstimmt.

Wenn die bisher besprochenen Eigentümlichkeiten flüssiger Dielektrica in ihrem Verhalten beim Durchgange eines elektrischen Stromes wirklich in Analogie mit der Theorie der Erscheinungen in ionisirten Gasen zu erklären sind, so müssen sich auch innerhalb eines durchströmten Dielektricums freie positive und negative Ladungen nachweisen lassen. Dies ist mir mittels folgender Versuchsanordnung in der That gelungen.[1]

Zwei Zinkblechplatten vom Formate 9×6 cm standen in einem mit Toluol gefüllten Gefässe parallel und vertical in einer Distanz von 24 mm; die eine Platte war über das Galvanometer zur Erde abgeleitet, die andere blieb constant auf $+300$ Volt geladen; der zwischen den Platten übergehende Strom betrug 250 bis $190 \cdot 10^{-10}$ Ampère. Zwischen den beiden Platten war eine aus einem verticalen Platindrahte gebildete Sonde horizontal verschiebbar, deren Entfernung von den Elektroden auf 0,1 mm bestimmbar war, während ihr Potential an einem Exner'schen Elektroskope auf ± 1 Volt gemessen werden konnte. Die Resultate zweier Versuchsreihen sind in den Tab. X und XI angegeben, wo x die Entfernung der Sonde von der Kathode in Millimetern, V ihr Potential in Volt bedeutet. Für V sind in XI die Mittelwerte aus je drei bei abwechselnder Verschiebungsrichtung der Sonde gewonnenen Werten eingesetzt, wobei die maximalen Abweichungen vom Mittel 2 Volt betrugen. Nachstehende Textfigur stellt die Resultate graphisch dar.

1) Hr. Koller hat vor Jahren analoge Versuche mittels Tropfelektroden ausgeführt; über die Resultate derselben, die nicht publicirt wurden, konnte ich aber nichts näheres erfahren.

X. $E = 300$ V., $d = 24$ mm.

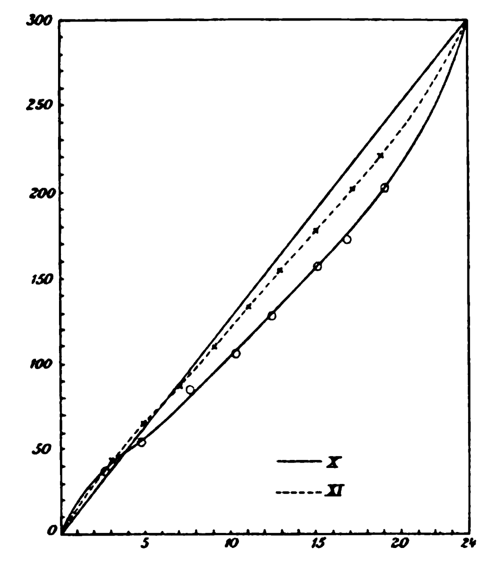
$$\frac{E}{d} = 12{,}5 \frac{\text{V.}}{\text{mm}}.$$

$x =$	$V =$
3	41
5	57
7,5	85
10	106
12,5	130
15	157
17	174
19	200

XI. $E = 300$ V., $d = 24$ mm.

$$\frac{E}{d} = 12{,}5 \frac{\text{V.}}{\text{mm}}.$$

$x =$	$V =$
3	43
5	66
7	88
9	110
11	132
13	156
15	177
17	200
19	222



Es ist deutlich zu erkennen, dass die Potentialgradienten an den Elektroden erhöht, in der Mitte dagegen erniedrigt sind, dass also in der Nähe der Anode freie negative, in der Nähe der Kathode positive Ladungen angehäuft sind.

Auf Grund dieser Ergebnisse dürfte der Schluss gerechtfertigt sein, dass die Analogien im Verhalten ionisirter Gase und flüssiger Dielektrica keine zufälligen, sondern im Wesen des Entladungsvorganges begründet sind.

Wien, Physikalisch-chemisches Institut der Universität.

(Eingegangen 7. November 1900.)

6. *Ueber die Prüfung von Magnetstahlsorten; von I. Klemenčič.*

Die Untersuchung der Stahlsorten hinsichtlich ihrer Eignung zur Anfertigung von Magneten ist ohne Zweifel von grosser praktischer Bedeutung. Es ist jedoch nicht zu leugnen, dass es derzeit kaum ein sicheres Verfahren giebt, mittels dessen man in jeder Hinsicht ein richtiges Urteil über eine Magnetstahlsorte gewinnen kann. Es sind zwar sowohl von Seite der Physiker als auch von Seite der Praktiker bez. der Fabrikanten Versuche in dieser Richtung gemacht worden; doch glaube ich, dass dieselben kaum als in jeder Beziehung zufriedenstellend bezeichnet werden können, da ihnen ein Factor, die Ausdehnung über eine gewisse Zeitdauer, abgeht. Insbesondere die Fabrikanten scheinen manchmal in besonders kurzer Zeit ein Urteil über eine Stahlsorte zu fällen. So schreibt mir z. B. Hr. Zellweger aus Uster bei Zürich, dass er, um ein schnelles Urteil über die Constanz der Magnete zu gewinnen, dieselben mehrfachen Erschütterungen aussetzt und notirt, welche Abnahme das magnetische Moment hierdurch erfährt.

Im Nachfolgenden soll gezeigt werden, dass für die Beurteilung einer Magnetstahlsorte auch die Umstände maassgebend sind, unter denen der Magnet verwendet werden soll und dass eine bestimmte Magnetstahlsorte nicht unter allen Verwendungsumständen die beste sein muss.

Die Bedingungen, unter welchen Magnete functioniren und ein constantes Moment bewahren sollen, sind im allgemeinen verschieden, lassen sich aber doch in zwei Hauptgruppen einordnen. Eine Reihe hat beim Gebrauche starke mechanische Erschütterungen, Abreissen des Ankers etc. zu ertragen; für Magnete, welche unter solchen Umständen zu functioniren haben, wird vielleicht die Methode Zellweger's brauchbare Resultate liefern.

Ganz anders verhält sich die Sache bei Magneten, welche den Bedingungen der zweiten Hauptgruppe unterliegen. Hier

sollen die Magnete bei ziemlich ruhigem Lagern ihr Moment constant erhalten. Diesen Bedingungen unterliegen z. B. die Magnete bei erdmagnetischen und physikalischen Instrumenten, Normalmagnete zur Aichung von Galvanometern etc. Bei solchen Magneten ist die hauptsächlichste Ursache der Aenderungen des Momentes in den Temperaturschwankungen, wie sie durch den Wechsel der Jahreszeiten bedingt sind, zu suchen. Daraus folgt aber, dass man von diesem Gesichtspunkte aus ein grösseres Zeitintervall für die Beobachtungen heranziehen muss.

Es ist gar nicht einzusehen, warum eine Stahlsorte, die sich in einer Beziehung bewährt, auch in der anderen die besten Resultate liefern müsste. Dies ist in der That auch nicht der Fall.

Im allgemeinen wird man bei der Prüfung der Stahlsorten, bez. der daraus verfertigten Magnete ein Verfahren einschlagen müssen, wie man es bei der Untersuchung der Normalelemente angewendet hat. Hierbei bildet die Ausdehnung der Beobachtungen auf ein grosses Zeitintervall die Hauptrolle.

Um einen Beitrag zur Klärung der soeben erwähnten Punkte zu liefern, habe ich mit einer grossen Zahl von Magnetstäben Untersuchungen angestellt, die einen Zeitraum von mehr als einem Jahre umfassen. Ich untersuchte das Verhalten der Magnete bei ruhigem Lagern; während einer meiner Schüler, Hr. Krüse, die Probestücke auf die Constanz ihres Momentes bei starken Erschütterungen und sonstigen mechanischen Einflüssen untersuchte.[1])

Die Untersuchung erstreckte sich auf Magnete verschiedener Provenienz. Die Probestücke wurden von verschiedenen Fabriken[2]) in gehärtetem Zustande bezogen und hier im Institute in dem homogenen Felde (600—700 abs. Einh.) einer stromdurchflossenen Spule magnetisirt. Für die vorliengede Frage sind insbesondere die Beobachtungen an einer Reihe von Stahlstäben der Firma „Böhler & Cie“ lehrreich. Diese

1) Vgl. I. Klemenčič, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien, Abt. IIa. **109.** p. 242. 1900; C. Krüse, l. c. p. 195.

2) Von Böhler & Cie. in Wien, von Marchal in Paris, von Zellweger in Uster bei Zürich, von Remy in Hagen und von Berg in Berlin.

Firma lies mir in der coulantesten Weise eine Serie von 40 Stäben mit verschiedenen Dimensionsverhältnissen aus ihren Magnetstahlsorten anfertigen und besorgte auch deren Härtung nach ihrem eigenen Verfahren.

Die gelieferten Magnetstäbe trugen die Fabrikmarken „45", „43", „UI", „0" und „00". Von jeder Marke waren acht Stäbe vorhanden. Sie hatten durchweg quadratischen Querschnitt und ihr Dimensionsverhältnis V (d. h. Verhältnis der Seite zur Länge) betrug entweder 10 oder 25 bei 4 oder 6 mm Seitenlänge.

Es waren also von jeder Marke folgende Dimensionen vorhanden:

Je zwei Stück zu 15 cm Länge und 6 mm Seite
„ „ „ „ 6 „ „ „ 6 „ „
„ „ „ „ 10 „ „ „ 4 „ „
„ „ „ „ 4 „ „ „ 4 „ „

Die Härtung dieser Magnete geschah Mitte April 1898, die Beobachtungen wurden anfangs Mai desselben Jahres aufgenommen.

Zunächst wurde die Constanz des Momentes bei ruhigem Lagern untersucht.

Die Bestimmung des Momentes erfolgte nach der magnetometrischen Methode aus der ersten Hauptlage.

Das Magnetometer samt den aus Metall verfertigten Ablenkungsstativen stand auf einer in die Wand eingemauerten Marmorplatte. Die Horizontalcomponente wurde mittels einer am Magnetometer angebrachten, in Paraffin ausgekochten Spule und mittels eines constanten Stromes (Clarkelement und Manganinwiderstände) controlirt. Die Magnete selbst lagerten ganz ruhig in einem Kasten in der Ost-Westlage und wurden nur zur Beobachtung herausgenommen und auf das Ablenkungsstativ gelegt.

Die Beobachtungen über die Abnahme des Momentes wurden sofort nach der Magnetisirung (etwa 2—3 Stunden danach) aufgenommen. Die nächste Beobachtung des Momentes erfolgte zwei Tage später, die dritte nach 6 Tagen, die vierte nach 13 und die fünfte nach 27 Tagen. Nach diesen 27 Tagen wurde in den Beobachtungen eine Pause gemacht und dieselben im Juli 1898 mit der halben Zahl dieser Magnete ohne neuerliche Magnetisirung

wieder aufgenommen. Die Magnete lagerten in dieser Zwischenzeit ganz ruhig an ihrem Orte. Was nun die Abnahme des Momentes in den ersten 27 Tagen nach der Magnetisirung anbelangt, so ergab sich dabei pro Magnet bei den einzelnen Marken eine mittlere Abnahme für die beiden Dimensionsverhältnisse wie folgt:

Marke	$V = 25$	$V = 10$
„UI“	1,25 Proc.	1,72 Proc.
„00“	1,06	1,20
„0“	1,01	1,19
„45“	0,69	0,85
„43“	0,72	0,89

Wenn man die Güte einer Stahlsorte nach der Abnahme des Momentes während der ersten 27 Tage nach der Magnetisirung beurteilen wollte, würde sich also die Reihenfolge

„45“ „43“ „0“ „00“ „UI“

ergeben.

Für die weiteren Messungen wurde, wie schon erwähnt, eine Teilung der Magnete vorgenommen. Für die Beobachtungen der Abnahme bei ruhigem Lagern wurden nur 20 Stäbe beibehalten, indem von jedem Paar ein Stück ausgeschieden wurde. Mit den ausgeschiedenen Exemplaren wurden sodann die weiter zu besprechenden Versuche des Hrn. Krüse gemacht.

Die weiteren Beobachtungen laufen von Juli 1898 bis Ende October 1899. Die mittlere Abnahme pro Magnet ergiebt sich während dieser Zeit bei den einzelnen Marken:

Marke	$V = 25$	$V = 10$
„UI“	1,37 Proc.	3,33 Proc.
„00“	1,65	3,84
„0“	1,58	3,80
„45“	1,35	2,95
„43“	1,51	3,21

Es resultirt daher in diesem Falle die Reihenfolge:

„45“ „UI“ „43“ „0“ „00“

für die Güte der untersuchten Sorten.

Aus diesen Beobachtungen folgt zunächst die Thatsache, dass für die Constanz des Momentes die grossen Dimensionsverhältnisse besser sind als die kleinen, was zu erwarten war.

Es geht daraus weiter hervor, dass eine Beobachtungsdauer von 27 Tagen noch nicht in allen Fällen ein richtiges Maass für die Beurteilung einer Stahlsorte liefert, wie das aus dem Verhalten der Marke „UI" hervorgeht.

Es ist nicht uninteressant, die mittlere Abnahme in den ersten 27 Tagen pro Tag und Magnet zu berechnen. Es ergiebt sich daraus folgende Tab. I:

Tabelle I.

Periode	Procentabnahme pro Tag und Magnet			
	I	II	III	IV
0.—2. Tag	0,141	0,134	0,086	0,077
2.—6. „	0,039	0,046	0,029	0,047
6.—13. „	0,034	0,058	0,029	0,049
13.—27. „	0,030	0,031	0,021	0,021

Dabei sind eingetragen die Magnete unter

I	mit	15 cm	Länge,	6 mm	Seite,	$V = 25$
II	„	6 „	„	6 „	„	$V = 10$
III	„	10 „	„	4 „	„	$V = 25$
IV	„	4 „	„	4 „	„	$V = 10$.

Die Abnahme des Momentes ist in den ersten zwei Tagen nach der Magnetisirung besonders gross; von da an hält sie sich auf einem viel niederen und langsam sinkenden Niveau. Diese Thatsache spricht ganz deutlich für das Vorhandensein von zwei Ursachen für die Abnahme des Momentes, wovon die eine in den durch die Magnetisirung hervorgerufenen Nachwirkungsdeformationen, die andere aber in sonstigen durch die vorausgegangene Härtung bedingten langsamen Umsetzungen in der Structur des Metalles liegt.[1])

Einen Teil der Böhler'schen Magnete (Seitenlänge = 6 mm, $V = 25$) hatte ich auch nach dem Verfahren von Strouhal und Barus behandelt und sodann deren Verhalten ein Jahr lang beobachtet. Es ergab sich bei allen Marken eine ausserordentlich geringe Abnahme, welche im ersten Jahre nach

1) Vgl. I. Klemenčič, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien, Abt. IIa. **109.** p. 827. 1900.

der Magnetisirung bei den besten Böhler'schen Stahlsorten etwa 0,1 Proc. und darunter beträgt.

Hr. Krüse untersuchte mehrere Böhler'sche und auch andere Magnete hinsichtlich ihres Verhaltens bei Erschütterungen, indem er sie aus verschiedenen Höhen (1 und 1,94 Meter, in einigen Fällen auch 9,6 Meter) auf eine Marmorplatte fallen liess und sodann die Abnahme ihres Momentes bestimmte; auch brachte er die Magnete vielfach mit Eisenstäben und Eisenplatten in Berührung und untersuchte auch den Einfluss dieser Umstände auf die Constanz des Momentes. Schliesslich bestimmte er die Magnetisirungscurven einiger der untersuchten Stäbe, berechnete hieraus die Coercitivkraft und prüfte danach den Zusammenhang zwischen dieser und der Abnahme des Momentes nach Erschütterungen etc.

Krüse's Beobachtungen liefern das Resultat, dass die Verluste nach Erschütterungen um so grösser ausfallen, je kleiner die Coercitivkraft ist. Folgende Daten kennzeichnen diese Thatsache; sie beziehen sich auf Böhler'sche Magnete von $V = 25$ bei 6 mm Seite.

Marke	„0"	„00"	„UI"	„43"	„45"
Coercitivkraft	84	76	63	59	57
Abnahme in Proc.	3,5	5,4	5,5	5,9	6,7

Versuche mit den gleichen Marken aber mit Stäben von 4 mm Seite und $V = 25$ ergaben das gleiche Resultat.

Will man also die Güte einer Stahlsorte nach der Abnahme des Momentes bei Erschütterungen beurteilen, so ergiebt sich aus den Beobachtungen Krüse's für die Böhler'schen Marken die Reihenfolge:

„0" „00" „UI" „43" „45",

während meine Beobachtungen für die Güte der Stahlsorten bei ruhigem Lagern die Reihe

„45" „UI" „43" „0" „00"

ergeben.

Die beiden Reihen laufen zwar nicht ganz entgegengesetzt, jedoch folgt aus ihnen ganz deutlich, dass Magnete, welche sich bei Erschütterungen als besonders gut erweisen, bei ruhiger Lagerung durch längere Zeit die geringste Constanz des Momentes erwarten lassen. Diese Thatsache wird durch

das Verhalten eines Magnetes von Zellweger noch besonders bekräftigt. Dieser Magnet (rund, Durchmesser = 8 mm, $V = 12{,}5$) zeigte nach Erschütterungen unter allen untersuchten Magneten die geringste Abnahme, bei ruhigem Lagern verlor er jedoch in acht Monaten 8,7 Proc. seines Momentes, eine Abnahme des Momentes, welche jene der übrigen untersuchten Magnete weitaus übertrifft.

Im allgemeinen wird man danach den Satz aussprechen können, dass bei ruhiger Lagerung Magnete mit kleiner Coercitivkraft bessere Resultate ergeben als solche mit grosser. Danach müsste eigentlich weiches Eisen unter Umständen die besten permanenten Magnete liefern. Vorläufige Orientirungsversuche haben in der That ergeben, dass weiches Eisen den remanenten Magnetismus zeitlich überraschend gutfesthält, sobald man nur jede Erschütterung des Probestabes vermeidet.

Innsbruck, im November 1900.

(Eingegangen 21. November 1900.)

7. *Bestimmung der Wechselzahl eines Wechselstromes; von R. Wachsmuth.*

Hr. Samojloff[1]) hat kürzlich unter demselben Titel einen einfachen Weg zur Bestimmung einer Wechselzahl angegeben. Eine verwandte Methode ist von mir in letzter Zeit benutzt worden. Das Gebiet ihrer Anwendbarkeit ist wohl ein kleineres, sie hat aber vielleicht den Vorzug noch grösserer Einfachheit.

Eine Uhrfeder wird an ihrem einen Ende in einen kleinen Feilkloben gespannt, das andere Ende trägt, mit etwas Klebwachs befestigt, ein kleines weisses Papierquadrat. Bringt man die Feder durch Zupfen in Schwingung und beleuchtet mit Wechselstromlicht, so wird das weisse Quadrat still zu stehen scheinen, wenn die Schwingungszahl der Wechselzahl entspricht.

Die Schwingungszahl eines einseitig befestigten rechteckigen Stabes von der Dicke e und der Länge l beträgt, wenn v die Schallgeschwindigkeit in dem betreffenden Metall bedeutet:

$$N = \frac{1{,}028}{6{,}36} \frac{e \cdot v}{l^2}.$$

Für Uhrfedern hat die Schallgeschwindigkeit in Stahl $v = 4900$ m stets gut übereinstimmende Werte geliefert. Die Richtigkeit des angenommenen v-Wertes wurde geprüft durch Abstimmung der Federn nach dem Gehör auf Stimmgabeltöne von 32 bis 128 Schwingungen. Aber auch für schwere Stahlstäbe gilt der Wert noch, wie der Vergleich mit einer Stimmgabel von 435 Schwingungen lehrte.

Giebt man e in Millimeter, l in Centimeter an, so ist:

$$N = \frac{1{,}028 \cdot 4{,}9}{0{,}000636} \frac{e}{l^2} = 7920 \cdot \frac{\text{Dicke in mm}}{\text{Quadrat der Länge in cm}}.$$

Die Dicke e wird einfach mit der Mikrometerschraube gemessen. Die Länge l bedarf jedoch bei leichten Federn noch

1) A. Samojloff, Ann. d. Phys. 3. p. 353. 1900.

einer Correctur. Hat man niedrige Unterbrechungszahlen — wie bei den Inductorien mit Wagner'schem Hammer —, so kann man schwere Federn benutzen, die so dick und breit sind, dass die Belastung mit einem Papierscheibchen nicht mehr in Frage kommt. Man hat dann gegenüber dünneren Federn die grössere Länge voraus und erreicht eine leichtere und genauere Einstellung. Für *grössere* Wechselzahlen — zu denen schon 80—100 Wechsel pro Secunde zählen — kann man jedoch nur noch dünne und schmale Federn brauchen, weil nur diese (wegen der grösseren Elasticität) die erforderliche Schwingungsweite und mässige Dämpfung besitzen. Dann wird aber selbst die Belastung mit einem Papierscheibchen nicht mehr zu vernachlässigen sein und es muss eine Correctur auf den unbelasteten Stab eintreten.

Die Correctur bestimmt sich leicht durch Vergleich des belasteten Federstückes mit einem unbelasteten Stück derselben Feder, das man in einen Schraubstock klemmt. Man wählt eine oder mehrere beliebige Tonhöhen des unbelasteten Stabes und stimmt den belasteten nach dem Gehör auf diese ab. Die constante Längendifferenz ergiebt die nötige Correctur. Da bei kürzeren Längen die Tonhöhe sich schneller ändert, so ist für Uhrfedern von 0,1—0,2 mm Dicke eine Länge von etwa 2—3 cm am günstigsten.

Schliesslich ist bei Inductorien noch durch Versuch zu ermitteln, ob auch der Schliessungsstrom eine genügend helle Leuchterscheinung hervorruft. Bei kleinen Inductorien ist das zumeist nicht der Fall. Dann ist natürlich die beobachtete Schwingungszahl gleich der Unterbrechungszahl d. h. Periodenzahl, während für den Wechselstrom einer Dynamo das Resultat immer die Wechselzahl giebt.

Als Lichtquelle wurde zumeist eine Funkenstrecke benutzt, jedoch ist für Inductorien das Licht von Geissler'schen Röhren wesentlich bequemer. Der niedrig gespannte (15 Volt) Strom eines Gleichstrom-Wechselstromumformers wurde durch die Primärrolle eines Inductoriums geschickt und so auf die für Funkenspiel nötige Spannung transformirt.

Der Versuch gestaltet sich demnach folgendermaassen: Die einseitig mit einem Papierquadrat belastete Uhrfeder wird zunächst ziemlich kurz in den Feilkloben gefasst und auf die Tonhöhe einer zweiten, ganz gleichartigen, aber unbelasteten

Feder abgestimmt. Falls eine Längendifferenz auftritt, wird diese als Correctionsglied notirt. Dann wird die belastete Feder so lang gefasst, dass sie sicher zu langsam schwingt, das Papierquadrat der Wechselstrombeleuchtung ausgesetzt, und die Feder durch Zupfen in Schwingung gebracht. Bei zunehmender Verkürzung lassen sich dann in drei- und zweifachen Bildern die tieferen Octaven beobachten. Tritt zum *ersten* Mal nur *ein* Bild auf, so stimmen Funkenzahl und Schwingungszahl nahe überein. Das Quadrat scheint sich erst schnell, dann langsamer hin und her zu bewegen, bis es schliesslich still steht. Ein völliges Stillstehen wird man nur bei sehr regelmässigen Unterbrechungen erhalten, immer aber lässt sich mit Sicherheit auf die langsamste Bewegung einstellen, da die Geschwindigkeit der scheinbaren Bewegung bei weiterer Verkürzung wieder zunimmt.

Nun wird die Länge der Feder gemessen, das Correctionsglied für die Länge hinzuaddirt und nach der angegebenen bekannten Formel die Schwingungszahl berechnet.

Häufig, namentlich bei schnelleren Schwingungen, ist es von Vorteil, nachdem man den Grundton bestimmt hat, diesen durch Mitbenutzung der tieferen Octaven zu corrigiren, weil bei diesen die Federlänge eine grössere, die Aenderung der Tonhöhe mit der Länge eine langsamere und daher die Genauigkeit eine bessere ist. Aber auch höhere Octaven können zur Controle dienen.

Ich lasse einige Beispiele mit Variation der benutzbaren Möglichkeiten folgen.

A. Kleines Inductorium (ziemlich constant laufend) mit Hammerunterbrecher.

1. Feder einer Zugklingel, 28 mm breit; $e = 0{,}82$ mm; Längencorr. $\lambda = 0$ cm.

2 Bilder (tiefere Octave)	$l = 23{,}8$ cm	$\frac{1}{2} N = 11{,}5$	$N = 23{,}0$
1 Bild (Grundton)	$l = 17{,}1$ „		$N = 22{,}5$

2. Uhrfeder, 7 mm breit; $e = 0{,}42$ mm; Längencorr. $\lambda = 0$ cm.

1 Bild (Grundton)	$l = 12$ cm		$N = 23{,}2$
1 „ (höhere Octave)	$l = 8{,}7$ cm	$2 N = 44$	$N = 22$

3. Uhrfeder, 22 mm breit; $e = 0{,}26$ mm; Längencorr. $\lambda = 0$ cm.

2 Bilder (tiefere Octave)	$l = 13{,}85$ cm	$\frac{1}{2} N = 10{,}7$	$N = 21{,}4$
1 Bild (Grundton)	$l = 9{,}3$ „		$N = 23{,}8$

4. Uhrfeder, 1,5 mm breit; $e = 0{,}15$ mm; Längencorr. $\lambda = + 0{,}15$ cm.

1 Bild (Grundton)	$l = 7{,}1 + \lambda = 7{,}25$ cm		$N = 22{,}6$

B. Gleichstrom-Wechselstromtransformer, bei 5 etwas gebremst, bei 6 und 7 volle Tourenzahl.

5. Uhrfeder, 1 mm breit; $e = 0{,}18$ mm; Längencorr. $\lambda = + 0{,}20$ cm.

2 feste Bilder, drittes bald mit 1, bald mit 2 in Deckung	$l_{corr.} =$ 6,75 cm	$\frac{1}{3} N = 31{,}4$	$N =$ 94,2
2 Bilder	$l =$ 5,55 „	$\frac{1}{2} N = 46{,}5$	$N =$ 93,0
1 Bild	$l =$ 3,9 „		$N =$ 93,7

6. Dieselbe Feder.

$l =$ 3,63 cm $\qquad N = 100{,}8$

7. Feder von Versuch 4 (wegen Steifheit mühsam einzustellen).

$l =$ 4,5 cm $\qquad N = 100{,}2$

C. Grosses Inductorium von 40 cm Schlagweite mit Deprezunterbrecher.

8. Feder von Versuch 5. (Benutzt: Teslaanordnung. Beleuchtungsquelle: die Funken der Leydener Flaschenentladung.)

$l =$ 3,45 cm $\qquad N = 101{,}8$

9. Dieselbe Feder, Beleuchtung durch Geissler'sche Röhre, giebt die doppelte Zahl.

Da bei Versuch 9 nicht nur Oeffnungs-, sondern auch Schliessungsfunken Leuchten hervorrief und letzteres viel schwächer ist, so sah man bei $l = 3{,}45$ cm zwei Bilder, ein sehr helles und ein schwaches. Dagegen gelang es nicht mehr, *ein* Bild allein einzustellen.

Hierdurch ist die Grenze der Methode gegeben: Ueber ca. 150 Schwingungen hinaus wird die Methode unbrauchbar, weil die Federn zu starr werden. Dagegen ist sie zwischen 1 und 100 Schwingungen äusserst bequem, weil sie ohne Messung von Zeiten oder Umdrehungszahlen mit grosser Schnelligkeit die Schwingungszahl zu messen gestattet.

(Eingegangen 8. December 1900.)

8. *Ueber Temperaturen in Geissler'schen Röhren*[1]; *von K. Kerkhof.*

§ 1. Die ersten Gesetze über die durch Entladungen in Geissler'schen Röhren hervorgerufenen Erwärmungen rühren von G. Wiedemann[2]) her. Mit Hülfe eines Thermoelementes, das er aussen an die Capillarröhren bringt, findet er, dass „Röhren von verschiedenem inneren, aber gleichem äusseren Durchmesser in gleichen Zeiten durch die Entladungen einer Influenzmaschine nahezu gleiche Wärmemengen erhalten."

Dieses Wiedemann'sche Gesetz ist späterhin durch die calorimetrischen Messungen von Naccari und Bellati[3]), von E. Wiedemann[4]) und Neesen und Paalzow[5]) bestätigt worden; auch führen die Messungen des Potentialgradienten in verschieden weiten Geissler'schen Röhren von A. Herz[6]), E. Wiedemann und G. C. Schmidt[7]), wie das Joule'sche Gesetz, wenn man die von Hittorf[8]) gefundene Gesetzmässigkeit zwischen Leitungsvermögen und Stromdichtigkeit berücksichtigt, zu dem Ergebnis, dass die vom Strome in einer bestimmten Zeit erzeugte Wärmemenge von dem Röhrenquerschnitt unabhängig ist.

Unter Zugrundelegung der calorimetrischen Messungen sind nun die Temperaturen, die Gase bei dem Durchgang des Stromes in verschieden weiten Röhren annehmen, berechnet worden. E. Wiedemann[9]), Neesen und Paalzow[10]) kommen

1) Auszug aus der Bonner Dissertation mit Zusatz.
2) G. Wiedemann, Pogg. Ann. **158.** p. 57. 1876.
3) A. Naccari u. M. Bellati, Beibl. **2.** p. 720. 1878.
4) E. Wiedemann, Wied. Ann. **10.** p. 202. 1880; **20.** p. 758. 1883.
5) F. Neesen u. A. Paalzow, Verhandl. d. Gesellsch. Deutscher Naturf. u. Aerzte, 63. Versamml. Abt. II. p. 51. 1890; Wied. Ann. **56.** p. 275. 1895.
6) A. Herz, Wied. Ann. **54.** p. 244. 1895.
7) E. Wiedemann u. G. C. Schmidt, Wied. Ann. **66.** p. 314. 1898.
8) W. Hittorf, Wied. Ann. **7.** p. 629. 1879.
9) E. Wiedemann, Wied. Ann. **6.** p. 298. 1879.
10) F. Neesen u. A. Paalzow, Wied. Ann. **56.** p. 276. 1895.

hierbei zu dem Ergebnis, dass ein Gas in einer Geissler'schen Röhre mit grösserem Durchmesser weit unter 100° bereits leuchten kann, während in engen Capillaren Temperaturen über 100000° herrschen müssen, der aus dem Wiedemann'-schen Gesetz gezogenen Folgerung gemäss, wonach die Temperaturen sich umgekehrt proportional wie die Röhrenquerschnitte verhalten.

Gegen die hohen Temperaturen, die Gase in den engen Capillaren nach den calorimetrischen Messungen annehmen sollen, sprechen aber die Beobachtungen von Hittorf[1]) und Stark.[2]) Da weiterhin Messungen von de la Rive[3]), Hasselberg[4]), Goldstein[5]) und Wood[6]), die mit Hülfe von Temperaturmessapparaten innerhalb der Geissler'schen Röhre ausgeführt wurden, zum grössten Teil Temperaturen ergaben, die weit unter 100° lagen, so ging ich zunächst in der vorliegenden Arbeit davon aus, mit Hülfe eines Bolometers zu prüfen, ob der aus dem Wiedemann'schen Gesetz gefolgerte Schluss, dass die Temperaturen der Gase in verschieden weiten Geissler'schen Röhren den Querschnitten der Röhren umgekehrt proportional sind, richtig ist.

§ 2. Die Apparate bestanden ausser der Geissler'schen Röhre, die mit einer Töpler'schen Quecksilberluftpumpe in Verbindung stand, aus dem Temperaturmessapparat und aus der Stromquelle, deren Entladungen durch die Geissler'sche Röhre hindurchgingen. Der Temperaturmessapparat bestand nach dem Verfahren von R. W. Wood[7]) aus einem verschiebbaren Bolometer, das einen der vier Zweige einer Wheatstone'schen Brücke bildete; als Bolometerdraht wurde ein etwa 1,5 cm langer Platindraht von 0,025 mm Durchmesser benutzt. Als Stromquelle für die Wheatstone'sche Brückenanordnung diente ein Accumulator mit gewöhnlich 200 Ohm Vorschaltungswiderstand; der Ausschlag des mässig astasirten Wiedemann'-

---

1) W. Hittorf, Wied. Ann. **21**. p. 106. 1884.
2) J. Stark, Ann. d. Phys. **2**. p. 424. 1900.
3) de la Rive, Pogg. Ann. **131**. p. 577. 1867.
4) B. Hasselberg, Mém. de l'ac. de Péterbourg (IV) **18**. p. 1. 1879.
5) E. Goldstein, „Elektrische Abstossung", p. 175. Berlin 1880.
6) R. W. Wood, Wied. Ann. **59**. p. 238. 1896.
7) l. c.

schen Galvanometers wurde durch ein Fernrohr, das etwa 2 m von dem Spiegel der Nadel entfernt war, abgelesen; es zeigte sich, dass einer Temperaturerhöhung um 1° C. des Bolometerdrahtes bei einer Stromstärke von etwa 0,005 Amp. 4 Sct. entsprachen, sodass man die $^1/_8$-Grade noch sehr genau ablesen konnte.

Da mir keine constante Batterie zur Verfügung stand, so wurden die Versuche mit einem Ruhmkorff ausgeführt, der so weit vom Galvanometer aufgestellt war, dass er keinen störenden Einfluss auf letzteres ausüben konnte.

Als Gase wurden CO_2, O, H und Luft benutzt.

§ 3. Die ersten Versuche bezogen sich darauf, die Temperaturen des positiven Lichtbüschels für verschiedene Gase in Röhren verschiedener Lichtweite zu ermitteln. Vor jeder Messungsreihe vergewisserte man sich durch Ausschalten der Bolometerstromquelle, dass eine Ablenkung der Galvanometernadel nur durch die Erwärmung des Bolometerdrahtes veranlasst wurde. Beobachtete man die Ablenkung der Galvanometernadel von dem Augenblick an, wo der Strom durch die Geissler'sche Röhre hindurchging, so bemerkte man zunächst eine erhebliche Ablenkung, bis nach einigen Minuten das Maximum der Ablenkung eingetreten war, bei welchem wir annehmen können, dass der Wärmezustand im Geissler'schen Rohr stationär ist, dass also ebensoviel Wärme im Entladungsrohr erzeugt wird, als nach aussen an die Glaswand und an die Luft abgegeben wird. Der Galvanometerausschlag blieb bei niedrigem Drucke in der Geissler'schen Röhre constant, während bei den höheren Drucken von etwa 7 mm an geringe Schwankungen der Galvanometernadel eintraten. Die Messungen ergaben, dass die Temperaturen im positiven Lichtbüschel bei Verminderung des Druckes geringer werden, um vom kritischen Drucke an wieder schnell anzuwachsen [1]), und zwar sind die Temperaturen bei demselben Drucke für CO_2 grösser, als die für Luft, diese erheblich grösser als die Temperaturen bei der Entladung durch Wasserstoff; dieses Verhältnis ändert sich jedoch von Druck zu Druck. Temperaturcurven, die in Röhren

1) E. Wiedemann, Wied. Ann. **10.** p. 226. 1880 und **20.** p. 757. 1883; A. Naccari u. G. Guglielmo, Att. di Torino **19.** p. 9. 1884.

mit dem inneren Durchmesser 2,5, 2, 1,5 und 1,3 cm ermittelt wurden, liessen bei den complicirten Verhältnissen des Inductoriums keine Gesetzmässigkeit zwischen Temperatur und Röhrenquerschnitt erkennen, doch sind die Temperaturen bei weitem nicht umgekehrt proportional den Querschnitten der Röhren. Um den Entladungsprocess des Inductoriums für verschiedene Röhrenquerschnitte möglichst einheitlich zu gestalten, wurde bei den folgenden Messungen eine Röhre mit verschiedenen Querschnitten benutzt; dieselbe hat eine Länge von 50 cm und war aus 5 Röhren von 5, 4, 3, 2 und 1,5 cm Durchmesser zusammengesetzt. Die Temperaturen, die das Bolometer in den verschiedenen Querschnitten der Röhre anzeigt, werden nur dann genau die Abhängigkeit von dem Querschnitte angeben, wenn sie in der positiven Entladung bei den verschiedenen Entfernungen von den Elektroden constant bleiben. Da die Temperaturcurve vom dunklen Trennungsraume nach dem positiven Lichtbüschel hin stark ansteigt, in dem positiven Lichtbüschel annähernd horizontal bleibt, um in der Nähe der Anode wieder abzufallen, so können nur in jenen Teilen der Röhre Messungen angestellt werden, die hinlänglich weit von dem dunklen Trennungsraum und der Anode entfernt sind, und zwar war die Röhre so zusammengesetzt, dass die grössten Werte der Temperaturcurve des positiven Lichtbüschels in den engsten Querschnitten der Röhre liegen, sodass die unten angeführten Temperaturen für die engsten Röhren im Vergleich mit den Temperaturen für die weiten etwas zu hoch sein können.

Die Zahlen in den Columnen rechts bei den folgenden Reihen bilden das Mittel aus 3 bis 4 an verschiedenen Stellen jedes etwa 6—7 cm langen Röhrenabteiles gemachten Messungen; es seien hier nur einzelne Reihen angeführt:

a) Luft 3,2 mm.

Durchmesser	4	cm	20,75
"	2	"	34
"	1,5	"	42

b) Luft 1,6 mm (geschichtet).

Durchmesser	4	cm	15,2
"	2	"	24,6
"	1,5	"	28,9

c) Wasserstoff 5,3 mm.

Durchmesser	4	cm	33,5
"	2	"	50,2
"	1,5	"	59,5

d) Wasserstoff 3,1 mm.

Durchmesser	4	cm	24,5
"	2	"	35,2
"	1,5	"	43,2

Um eine grössere Unterbrechungszahl zu erhalten, sind noch einige Messungen mit einem Wehneltunterbrecher bei einer Klemmspannung von etwa 70 Volt gemacht worden.

e) Wasserstoff 3,5 mm.

Durchmesser	4	cm	29
"	2	"	49,1
"	1,5	"	63,5

f) Wasserstoff 2,3 mm.

Durchmesser	4	cm	31
"	2	"	49,8
"	1,5	"	72

Bei der folgenden Reihe wird das Inductorium durch acht Accumulatoren angeregt; es geht hier der Oeffnungs- und und Schliessungsfunke über:

g) Wasserstoff 2,2 mm.

Durchmesser	5	cm	30,6
"	4	"	33
"	2	"	46,8
"	1,5	"	61,8

Der aus dem Wiedemann'schen Gesetz gezogene Schluss, dass die Temperaturen sich umgekehrt proportional den Röhrenquerschnitten verhalten, steht mit den vorhergehenden Messungen in Widerspruch.

Das Wiedemann'sche Gesetz beruht auf Bestimmungen der Wärmemenge, die von einem Entladungsschlage herrührt; man könnte also den obigen Messungen den Einwurf machen, dass die Entladungen eines Inductoriums benutzt worden sind, die nur nach gewissen Zeiträumen durch die Geissler'sche Röhre hindurchgehen; das Bolometer müsste demnach, vorausgesetzt, dass das Verhältnis der zwischen den einzelnen Entladungen verstrichenen Zeit zu der Entladungsdauer sehr gross ist, eine Temperatur anzeigen, die notwendig kleiner sein müsste als die Temperatur, welche das Gas bei seinem Aufleuchten hatte.[1]) Einer continuirlichen Entladung werden wir aber um so näher kommen, je grösser wir die Zahl der Unterbrechungen des primären Stromkreises des Inductoriums machen. Nach den vielfachsten Messungen lassen aber selbst gesteigerte Unterbrechungszahlen — Wagner'scher Hammer, Deprez- und Wehneltunterbrecher — keine wesentlichen Unterschiede erkennen.

1) B. Hasselberg, l. c.

§ 4. Da das Wiedemann'sche Gesetz, dass die vom Strome erzeugte Wärmemenge vom Röhrenquerschnitt unabhängig ist, nach vielen Untersuchungen als richtig sich erwiesen hat, so lassen sich die oben experimentell gefundenen Temperaturen in den verschiedenen Querschnitten nur dann mit dem Wiedemann'schen Gesetze vereinbaren, wenn wir annehmen, dass während der Entladung Wärme an die Glaswand bez. Luft abgegeben wird.

Wie weit dieses zutrifft, soll im Folgenden, sowohl unter Zugrundelegung der G. Wiedemann'schen Versuche[1]), als auch aus dem auf elektrostatischem Wege gefundenen Gesetze, dass der Potentialgradient in Röhren verschiedener Lichtweite im positiven Lichtbüschel gleich gross ist, gezeigt werden.

1. Lässt man durch eine Geissler'sche Röhre einen elektrischen Strom hindurchgehen, so wird bald ein Zeitpunkt eintreten, wo ebensoviel Wärme in der Röhre erzeugt wird, als nach aussen an die Glaswand bez. an die Luft abgegeben wird; der Wärmezustand der Geissler'schen Röhre ist stationär.

Die Fourier'sche Wärmegleichung

$$(1) \qquad \varrho \cdot e \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)$$

wird in diesem Falle

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0,$$

da T von der Zeit t unabhängig ist. Wir legen nun die z-Axe des Coordinatensystems mit der Axe des Rohres zusammen; der Wärmestrom ist dann der xy-Ebene parallel und in einiger Entfernung von den Rohrenden von z unabhängig, demnach

$$(3) \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial r} \cdot \frac{x}{r},$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 T}{d r^2} \frac{x^2}{r^2} + \frac{d T}{d r} \frac{1}{r} - \frac{d T}{d r} \cdot \frac{x}{r^3},$$

$$(4) \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{d^2 T}{d r^2} + \frac{1}{r} \frac{d T}{d r} = \frac{1}{r} \frac{d\left(r \frac{d T}{d r}\right)}{d r} = 0 \text{ (nach Gl. 3)},$$

$$(4\text{a}) \qquad \frac{d T}{d r} = \frac{c}{r},$$

$T = c \log r + c'$ ist somit ein Integral von Gleichung (3).

1) G. Wiedemann, Pogg. Ann. 128. p. 57. 1876.

Setzen wir

$$T_1 = c \log r_1 + c',$$
$$T_2 = c \log r_2 + c',$$

so wird bei der Elimination von c und c':

$$(5) \qquad T = (T_1 - T_2) \frac{\log r - \log r_1}{\log r_1 - \log r_2} + T_1 .$$

Demnach

$$(6) \qquad \frac{dT}{dr} = \frac{T_1 - T_2}{r(\log r_1 - \log r_2)} .$$

Für den Wärmestrom U in der Richtung r haben wir die Gleichung

$$(7) \qquad U = -k \frac{dT}{dr},$$

wo k das Wärmeleitungsvermögen bedeutet, nach Gleichung (6) also:

$$(8) \qquad U = \frac{k(T_1 - T_2)}{r(\log r_2 - \log r_1)} .$$

Die Wärmemenge, welche längs der Peripherie des Kreises vom Radius r durch die Längeneinheit des Rohres ausströmt, ist:

$$(9) \qquad 2\pi r U = \frac{2\pi k(T_1 - T_2)}{\log r_2 - \log r_1},$$

wo T_1 und T_2 die Temperaturen in den Kreisperipherien vom Radius r_1 und r_2 bedeuten. Aus Gleichung (9) folgt, dass für eine Geissler'sche Röhre mit dem inneren Radius r_1 und dem äusseren r_2 die Temperatur an der inneren Glaswand T_1 sich berechnet zu:

$$(10) \qquad T_1 = \frac{r_1 U}{k}(\log r_2 - \log r_1) + T_2,$$

wo k das Wärmeleitungsvermögen des Glases und T_2 die Temperatur an der äusseren Glaswand bedeutet.

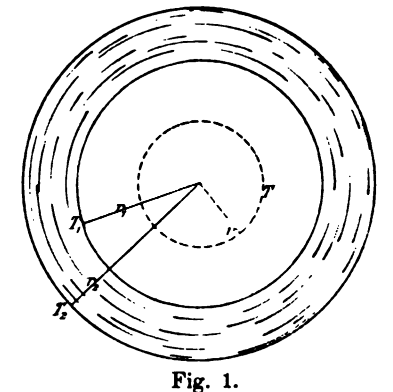


Fig. 1.

Um nun aus der an der inneren Glaswand eintretenden Wärmemenge und der dort herrschenden Temperatur T_1 einen Schluss auf die mittlere Temperatur des Gases zu machen,

denken wir uns einen mit dem Rohre concentrischen Gascylinder vom Radius r und der Höhe der Längeneinheit, in welchem überall die constante Temperatur T herrscht, und von dem durch Leitung durch die übrige Gasschicht an der inneren Glaswand in das Glas eine bestimmte Wärmemenge eintritt.

Die mittlere Temperatur, die die „Gasröhre" infolge der Wärmeleitung angenommen hat, ist:

$$T_{r r_1} = \frac{1}{(r_1^2 - r^2)\pi} \int_r^{r_1} T\, 2\, r\, \pi\, d\, r = \frac{2}{(r_1^2 - r^2)} \int_r^{r_1} T\, r\, d\, r$$

$$= \frac{2}{r_1^2 - r^2} \left\{ \left[\frac{T r^2}{2}\right]_r^{r_1} - \int_r^{r_1} \frac{r^2}{2}\, d\, T \right\}.$$

Nach Gleichung (4a) ist:

$$d\, T = \frac{c}{r}\, d\, r,$$

also:

$$T_{r r_1} = \frac{T_1 r_1^2 - T r^2}{r_1^2 - r^2} + \frac{U_\beta\, r_1}{2\, k'},$$

da

$$U_\beta = -k' \left(\frac{d\, T}{d\, r}\right)_{r = r_1} = -\frac{k' c}{r_1}.$$

Die mittlere Temperatur des ganzen Gases würde hiernach sein:

$$\frac{T_{r r_1} (r_1^2 - r^2)\pi + T r^2 \pi}{r_1^2 \pi} = T_1 + \frac{U_\beta\, r_1}{2\, k'} - \frac{U_\beta\, r_1\, r^2}{2\, r_1^2\, k}.$$

Setzen wir nun diesen Ausdruck ein in die Gleichung:

$$T_m = \frac{1}{r_1^2 \pi} \int_0^{r_1} T\, 2\, r\, \pi\, d\, r,$$

so wird:

$$(11) \qquad T_m = \frac{2}{r_1^2} \int_0^{r_1} \left(T_1 + \frac{U_\beta\, r_1}{2\, k'} - \frac{U_\beta\, r_1\, r^2}{2\, k\, r_1^2}\right) r\, d\, r = T_1 + \frac{U_\beta\, r_1}{4\, k'},$$

Nach Gleichung (10) wird:

$$(12) \qquad T_m = \frac{r_2\, U}{k} (\log r_2 - \log r_1) + \frac{U_\beta\, r_1}{4\, k'} + T_2.$$

Die Wärmemenge, welche an der äusseren Glaswand austritt, ist dieselbe, welche, in dem Gase durch den elektrischen Strom erzeugt, an der inneren Glaswand eintritt:

$$2 r_2 \pi U = 2 r_1 \pi U_\beta = Q_1,$$

mithin wird:

$$T_m - T_2 = \frac{Q_1}{2 \pi k} (\log r_2 - \log r_1) + \frac{Q_1}{8 \pi k'}. \tag{13}$$

Nach den Wiedemann'schen Messungen sind bei dem Durchgang des elektrischen Stromes in Capillaren von demselben äusseren Halbmesser r_2 und dem verschiedenen inneren r_1 und r_1' die Temperaturen an der äusseren Glaswand (T_2) ebenso wie die ausströmenden Wärmemengen (Q_1) dieselben. Für eine Röhre vom Radius r_1' bez. r_2 würde die mittlere Temperatur demnach sein:

$$T_m' = \frac{Q_1}{2 \pi k} (\log r_2 - \log r_1') + \frac{Q_1}{8 \pi k'} + T_2. \tag{14}$$

Setzen wir $T_2 = 0$, so wird:

$$T_m : T_m' = \frac{1}{k} \log\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \frac{1}{4 k'} : \frac{1}{k} \log\left(\frac{r_2}{r_1'}\right) + \frac{1}{4 k'}. \tag{15}$$

Zu einem ähnlichen Ausdruck gelangt man durch einige Folgerungen, welche man aus der Abhandlung von E. Warburg: „Ueber Wärmeleitung und Temperatur der in Geissler'schen Röhren leuchtenden Gase"[1]) ziehen kann.

Für das positive ungeschichtete Licht ist unter der Annahme, dass die ganze elektrische Arbeit dort, wo sie geleistet wird, sich in Wärme umsetzt und die Stromdichte im ganzen Querschnitt des Rohres constant ist, die durch die Stromarbeit hervorgerufene Wärmemenge q in Grammcalorien pro Secunde und Cubikcentimeter:

$$q = 0{,}237 \frac{v i}{R^2 \pi}, \tag{1}$$

wo v der Potentialgradient in Volt pro Centimeter, i die Stromstärke in Ampère und R der innere Röhrenhalbmesser in Centimetern bedeutet.

---

1) E. Warburg, Wied. Ann. 54. p. 265. 1895.

Vermittelst der Gleichungen:

$$r^2 \pi q = -2 r \pi k' \frac{du}{dr} (r < R) \tag{2}$$

und

$$R^2 \pi q = -2 r \pi k \frac{du}{dr} (r > R), \tag{3}$$

wo u die Temperatur, k' das Wärmeleitungsvermögen des Gases und k das des Glases bezeichnet, findet man für die mittlere Temperatur des Gases:

$$\bar{u} = v i \left(\frac{0{,}237}{2 \pi k} \log \left(\frac{R'}{R} \right) + \frac{0{,}237}{8 \pi k'} \right). \tag{4}$$

Da der Potentialgradient nach den Messungen von A. Herz[1]) für das positive Lichtbüschel von dem Röhrenquerschnitt nahezu unabhängig ist (der Potentialgradient nimmt mit abnehmender Lichtweite ein wenig zu), so ist für die gleiche Stromstärke i das Product $v i$ in allen Röhren eine Constante. Nach Gleichung (4) besteht daher zwischen den Temperaturen in zwei Geissler'schen Röhren mit dem gleichen äusseren Radius R' und dem verschiedenen inneren R_α und R_β die Beziehung:

$$\bar{u}_\alpha : \bar{u}_\beta = \frac{1}{k} \log \left(\frac{R'}{R_\alpha} \right) + \frac{1}{4 k'} : \frac{1}{k} \log \left(\frac{R'}{R_\beta} \right) + \frac{1}{4 k'}. \tag{5}$$

Dieses ist aber derselbe Ausdruck für die Temperaturen, wie er sich aus den Wiedemann'schen Messungen ergeben hatte, was nach den Annahmen, unter denen die vorhergehende Rechnung vor sich ging, und nach den Untersuchungen von Ångström[2]) und W. Wien[3]) vorauszusehen war.

Ist die Glasdicke der Röhre ϱ gegen den Radius der Röhre hinlänglich klein, so erhält man für die mittlere Temperatur den Wert:

$$u = v i \left(\frac{0{,}0378}{k'} \left(\frac{\varrho}{R} \right) + \frac{0{,}0094}{k} \right).$$

Bei gleicher Glasdicke würden die Temperaturen in verschiedenen Geissler'schen Röhren hiernach höchstens den reciproken Werten der Radien proportional sein können, wie es auch die obigen Messungen ergeben, und zwar müssen.

1) A. Herz, Wied. Ann. **54.** p. 264. 1895.

2) K. Ångström, Abhandl. d. k. Gesellsch. d. Wissensch. zu Upsala 1892.

3) W. Wien, Physikal. Zeitschr. **1.** p. 10. 1899.

entsprechend den Werten für das Wärmeleitungsvermögen k' für Wasserstoff und Luft, die Temperaturunterschiede in den verschiedenen Querschnitten für Luft grösser sein als für Wasserstoff [vgl. für gleiche Verhältnisse ($p = 3{,}2$ mm), Reihe a und d].

Nach den vorstehenden Erörterungen können wir demnach auch in den engen Capillaren nicht so hohe Temperaturen annehmen, wie sie nach den calorimetrischen Messungen berechnet worden sind.[1])

Temperaturen in Geissler'schen Röhren beim Einschalten von Funkenstrecken.

§ 5. Mit Rücksicht auf die in der Spectralanalyse bisher allgemein vertretene Ansicht, dass die Veränderung des Bandenspectrums beim Einschalten von Funkenstrecken in ein Linienspectrum durch die Temperaturerhöhung des Gases bedingt ist, indem das Bandenspectrum einer niedrigen, das Linienspectrum einer hohen Temperatur entspricht[2]), schien es nicht unwesentlich, den Einfluss von Funkenstrecken auf die Temperatur des Gases zu untersuchen; es war hierzu die Einrichtung getroffen, dass mit Hülfe einer Wippe ein gut isolirtes Funkenmikrometer in den secundären Stromkreis des Inductoriums ein- und ausgeschaltet werden konnte. Die Versuche mussten sich in der Regel auf sehr kleine Funkenstrecken beschränken, da beim Einschalten von grossen Funkenstrecken erhebliche Schwankungen der Galvanometernadel eintraten.

Beim Einschalten von 2—3 cm grossen Funkenstrecken zeigt sich stets eine höhere Temperatur als ohne Funkenstrecke und zwar nahm diese Temperaturerhöhung mit abnehmendem Drucke zu; wurden kleinere Funkenstrecken eingeschaltet, so zeigte die Galvanometernadel ohne grössere Schwankungen niedrigere Temperaturen an.

---

1) E. Warburg, Wied. Ann. **54.** p. 270. 1894; W. Hittorf, Wied. Ann. **7.** p. 576. u. 578. 1879; G. Klingenberg, Elektrotechn. Zeitschr. **14.** p. 226. 1896; M. Cantor, Ann. d. Phys. **3.** p. 462. 1900; H. Hertz, Wied. Ann. **19.** p. 782. 1895; F. Neesen u. A. Paalzow, Wied. Ann. **56.** p. 226. 1895; A. Wüllner, Lehrbuch der Physik **3.** p. 1892. 1896; O. Lehmann, Elektrische Entladungen p. 541. 1898.

2) H. Kayser, Wied. Ann. **42.** p. 310. 1891; E. Wiedemann, Wied. Ann. **10.** p. 231. 1880.

Bei der folgenden Messungsreihe befand sich das Bolometer 2,5 cm von der Anode im positiven Lichtbüschel; die Geissler'sche Röhre mit dem Durchmesser 2 cm war mit Luft angefüllt.

Druck	Temperaturen ohne Funkenstrecke	Temperaturen mit einer Funkenstrecke = 3 mm	Differenz
7,66 mm	29,4°	23,8°	5,6°
4,7	23,2	19,8	3,4
2,9	14,6	12,2	2,4
1,9	11	11	—
1,6	18,6	18,2	0,4
1,5	26,5	26	0,5

Hiernach nimmt bei Einschaltung kleinerer Funkenstrecken (hier — 3 mm —) die durch diese bedingte Temperaturerniedrigung vom kritischen Druck aus mit höheren und niedrigen Drucken zu.

Den Einfluss kleiner Funkenstrecken erkennt man besser bei den folgenden Messungen, wo für die einzelnen Drucke die Grösse der eingeschalteten Funkenstrecke verändert wird. Die Geissler'sche Röhre hat einen Durchmesser von 1,5 cm und ist mit Wasserstoff angefüllt.[1])

Druck 7 mm Funkenstrecke	Druck 7 mm Scalenteile	Druck 4,2 mm Funkenstrecke	Druck 4,2 mm Scalenteile
0 mm	183	0 mm	147,5
0,3	152	0,5	119
0,5	148,5	1	113
1	143,5	2	108,5
2	139	3	107,0
3	136,5	5	105,5
6	133,5	7	105,5
10	133	10	106
13	(140)		

1) Bei der Entladung durch CO_2, O und Luft bildete sich infolge Zerstäubens der Platinelektrode ein Platinspiegel an der inneren Glaswand; liess man dann in dem Rohre die Entladungen durch Wasserstoff gehen, so verschwand der Platinniedeıschlag nach wenigen Secunden.

Bei grösseren Funkenstrecken als 10 mm nimmt die Tem-
ratur wieder zu, es treten aber jetzt derartige Schwankungen
r Galvanometernadel ein, dass keine genauere Messung mehr
öglich ist.

Druck 2,5 mm		Druck 1,5 mm	
Funkenstrecke	Scalenteile	Funkenstrecke	Scalenteile
0 mm	83	0 mm	157
1	79	1	152
2	79	2	151
3	81,5	4	149
4	88,5	6	148,5
6	86,5	10	156
10	87	20	180

Mit zunehmender Funkenstrecke nimmt also die Tem-
ratur im positiven Lichtbüschel immer mehr ab; doch wird
e Temperaturerniedrigung bei gleicher Zunahme der Funken-
recke immer kleiner, bis bei einer gewissen Länge der Funken-
recke ein Minimum der Temperatur vorhanden ist; diese
unkenstrecke hat für die verschiedenen Drucke verschiedene
'erte,

bei dem Drucke 7 mm ist sie etwa gleich 10 mm
" " " 4,2 " " " " " 6 "
" " " 2,5 " " " " " 1,5 "
" " " 1,3 " " " " " 6 "

Schliesslich möge noch eine Messungsreihe angeführt
erden, welche den Einfluss einer Funkenstrecke von 3 mm
änge auf die Temperatur der Gase in Geissler'schen Röhren
erschiedenen Querschnittes zeigt:

Luft, $p = 2{,}4$ mm

Durchmesser der Röhre	Temperatur ohne Funkenstrecke	Temperatur mit Funkenstrecke	Differenz
4 cm	12,5°	11,6°	0,9°
2	21,2	19,9	1,3
1,5	26	25,5	1,5

Man erkennt aus der Tabelle, dass die Temperatur-
niedrigung durch Einschalten kleiner Funkenstrecken um so
össer ist, je enger der Querschnitt der Röhre wird.

Wir können uns diese Resultate so erklären, dass beim Einschalten von sehr kleinen Funkenstrecken der Verlauf der Entladungen nicht geändert wird, indem für die Entladung im Geissler'schen Rohre ein höheres Potential erforderlich ist als zu der Durchbrechung der kleinen Luftstrecken; beim Einschalten der Funkenstrecken geht aber ein Teil der Energie in Form von Wärme verloren, wir haben eine Temperaturerniedrigung, die um so grösser ist, je länger die Funkenstrecke und je enger der Röhrenquerschnitt wird.

Beim Einschalten einer grösseren Funkenstrecke, zu dessen Durchbrechung ein grösseres Potential erforderlich ist, ändert sich, wie E. Wiedemann gezeigt hat[1]), der ganze Verlauf des Entladungsprocesses; die im Geissler'schen Rohre übergehenden Elektricitätsmengen werden grösser, wir haben eine Temperaturerhöhung.

Bei der Funkenstrecke endlich, bei der das Maximum der Temperaturerniedrigung eintritt, können wir annehmen, dass das Potential zur Durchbrechung der Luftschicht ebenso gross sein muss, wie an den Elektroden der Geissler'schen Röhre; die Funkenstrecke, bei der die grösste Temperaturerniedrigung vorhanden ist, muss für die verschiedenen Drucke demnach verschiedene Länge haben; sie wird, wie es auch die Versuche ergeben, vom kritischen Druck an mit ab- und zunehmendem Druck zunehmen müssen.

Temperaturen in Geissler'schen Röhren beim Einschalten von Selbstinductionsspiralen.

§ 6. A. Schuster und G. A. Hemsalech[2]) haben kürzlich, als sie, um die oscillirenden Entladungen einer Leydener Flasche zu trennen, in den Stromkreis derselben eine Selbstinduction einschalteten, die Beobachtung gemacht, dass die Luftlinien, die bisher das Metallspectrum störten, im Spectrum verschwanden. Aus der weiteren Beobachtung[3]), dass gerade die Spectrallinien, welche nur bei einer hohen Temperatur im

---

1) E. Wiedemann, Wied. Ann. **20.** p. 758. 1883.

2) A. Schuster u. G. A. Hemsalech, Proc. Roy. Soc. **64.** p. 321. 1899.

3) G. A. Hemsalech, Journal de physique (3) **8.** p. 652. 1899.

Spectrum auftreten, beim Einschalten einer Selbstinduction geschwächt werden und sogar verschwinden, hat man den Schluss gezogen, dass der Einfluss der Selbstinduction auf eine Temperaturerniedrigung des Funkens zurückzuführen ist.

In der Annahme, dass eine durch Selbstinduction bewirkte Temperaturerniedrigung bei der Funkenentladung in freier Luft ebenso bei der Entladung durch eine Geissler'sche Röhre eintritt, sind Messungen gemacht worden, welche den Einfluss einer Selbstinduction auf die Temperatur im Geissler'schen Rohre darthun sollen; zu diesem Zwecke war die Einrichtung getroffen, dass vermittelst zweier Wippen eine Spirale, eine Leydener Flasche und beide gleichzeitig in den Stromkreis eines Inductoriums eingeschaltet werden konnten.

Die Leydener Flasche war stets parallel geschaltet; d. h. ihre innere Belegung war mit der Kathode und dem einen Pol, die äussere mit der Anode und dem anderen Pol des Inductoriums verbunden. Die Selbstinduction bestand aus einem gewöhnlichen kupfernen Leitungsdraht, der zu einer Spirale von 5 cm Höhe mit einem äusseren Durchmesser von 9 cm und einem inneren von 4 cm aufgewickelt war; sie war gewöhnlich vor der Kathode eingeschaltet.

Die in den folgenden Tabellen angeführten Scalenteile bilden den Mittelwert von mehreren durch wiederholtes Ein- und Ausschalten der Leydener Flasche bez. Spirale erhaltenen Messungen, und geben die Temperatur-Erniedrigung bez. -Erhöhung an, die durch Einschalten dieser in der Geissler'schen Röhre hervorgerufen wird.

Entfernung O-Anode	CO_2 Druck = 4 mm Scalenteile	Spirale	Leydener Flasche	Leydener Flasche u. Spirale
5 mm	135	+ 1	129,5	+ 1,5
30 „	136,5	+ 1	131	+ 2
60 „	134	+ 3	126	+ 1,5
80 „	130	+ 1	124	+ 1,5
100 „	125	+ 0	120	+ 0,2
130 „	116	− 3,5	119	− 8,5
150 „	127	− 4,5	132	− 9,5
163 „	228,5	− 7	247	− 12,5
165 Kathode				

Durch Einschalten einer Spirale in den Stromkreis wird hiernach eine Temperaturerhöhung in dem positiven Lichtbüschel, eine Temperaturerniedrigung in der Nähe der Kathode hervorgerufen.

Wahrscheinlich hat neben der Selbstinduction noch die Capacität der Spirale Einfluss auf den Entladungsprocess; bei den folgenden Versuchen bleibt die Leydener Flasche stets eingeschaltet, gegen deren Capacität man die der Spirale vernachlässigen kann; der primäre Strom des Inductoriums wird durch sechs Accumulatoren geliefert, sodass jetzt der Oeffnungs- und Schliessungsstrom übergeht. Die Kathode der ersteren befindet sich bei 267 mm, die des Schliessungsstromes bei 0 mm.

H Druck = 4,6 mm.			H Druck = 2 mm.		
Entfernung	Scalenteile ohne Spirale	Scalenteile mit Spirale	Entfernung	Scalenteile ohne Spirale	Scalenteile mit Spirale
10 mm	101,5	0	5 mm	109	− 1
45 „	88,2	0	35 „	89	− 1
110 „	91,5	0	70 „	87	− 1
140 „	91,8	0	110 „	88,5	− 2,5
190 „	91,5	−0,8	150 „	87,5	− 1,5
220 „	88,5	−0,8	150 „	89	− 3,5
240 „	83	−1	210 „	88,5	− 5,5
255 „	97	−1	240 „	128	−14
265 „	108	−1,5	260 „	215	−20
			267 „	Kathode des Oeffnungsstromes	

Bei dem Druck = 2 mm sind die Temperaturerniedrigungen, welche durch eine Selbstinduction verursacht wird, grösser als bei dem höheren Druck = 4,6 mm. Die grösste Temperaturerniedrigung findet an der Elektrode statt, die der Kathode des Oeffnungsstromes entspricht.

§ 6. Ein eigenartiges Gebilde von Thonerde[1]) setzte sich an der einen der kreisförmigen Aluminiumelektroden einer Geissler'schen Röhre, in der sich Luft unter etwa 5—6 mm Druck befand, ab. Nach wenigen Secunden Stromdurchgang eines starken Inductionsstromes hörte die Entladung plötzlich auf, und beschränkte sich auf ein Glimmen der oberen Elek-

1) W. Hittorf, Pogg. Ann. **136.** p. 23. 1869.

trode, an welcher sich symmetrisch zu der Elektrodenfläche *a* auf beiden Seiten eine Abbildung derselben gesetzt hatte (*b* und *c*), welche mit dem eigentlichen Elektrodenscheibchen durch feine Stäbchen verbunden war (Fig. 2)[1]; an der unteren Fläche befand sich eine runde Oeffnung *d*, die augenscheinlich denselben Querschnitt hatte, wie das Aluminiumstäbchen, an dem die Elektrodenscheibe befestigt war. Die untere Aluminiumelektrode wies an dem sie tragenden Aluminiumdraht



Fig. 2.

nur vereinzelte graue Fädchen auf, die scheinbar symmetrisch um den Draht gruppirt waren.

Abscheidungen von Thonerde an den Elektroden haben bereits Hittorf, Graham[2]) und Warburg erhalten; letzterer beschreibt die Bildung von Thonerde folgendermaassen:[3]) „Wenn Al-Kathoden in Gegenwart von Hg-Dämpfen längere Zeit den Strom geleitet haben, so zeigen sie in der Regel, an die frische Luft gebracht, zunächst einen gelblich weissen Anflug und nach einiger Zeit sieht man hier und da weissliche Haarwülste aus dem Draht hervorwachsen."

1) Die Fig. 2 ist nach einer photographischen Aufnahme hergestellt worden.

2) E. Graham, Wied. Ann. **64.** p. 49. 1898.

3) E. Warburg, Wied. Ann. **21.** p. 756. 1884.

Da, wie sich später herausstellte, das hier benutzte Geissler'sche Rohr nicht ganz dicht war, also während des Stromdurchganges Luft zutreten konnte, ferner aus der Ansatzröhre, die mit Hg angefüllt war, Hg-Dämpfe vorhanden waren, so sind die Bedingungen, unter denen derartige Thonerdeabsetzungen vor sich gehen, auch hier gegeben.

Weitere Versuche, die mit vollständig blanken, und amalgamirten Aluminiumelektroden angestellt wurden, ergaben, wenn Luft zugelassen wurde, nur eine unregelmässige Bildung von Thonerde an der Kathodenelektrode.

Vorliegende Arbeit wurde im Physikalischen Institute der Universität Bonn ausgeführt; ich benutze die Gelegenheit, dem Director desselben, Hrn. Prof. Dr. H. Kayser, sowie dem Hrn. Privatdocenten Dr. A. Hagenbach auch an dieser Stelle für die mir jederzeit in liebenswürdigster Weise gewährte Unterstützung bei meiner Arbeit meinen verbindlichsten Dank auszusprechen.

(Eingegangen 7. December 1900.)

9. *Magnetische Spiegelbilder;* *von Heinrich Jaeger.*

(Auszug aus der von der technischen Hochschule in München gekrönten Preisschrift.)

Wie von J. Stefan bereits 1882 theoretisch dargethan wurde [1]), haben ferromagnetische Substanzen bei geeigneter Disposition die Fähigkeit, in magnetischen Feldern hinsichtlich der Energieverteilung Veränderungen hervorzurufen. Man beschränkte sich darauf, die sogenannte „Schirmfähigkeit“ gedachter Materialien festzustellen, d. h. das Vermögen ferromagnetischer Substanz, in gewissen Fällen als Schutz gegen magnetische Kräfte dienen zu können. So wichtig die experimentell verificirten und maritimen Interessen nutzbar gemachten Untersuchungen Stefan's gewesen sind [2]), ihnen kann der Vorwurf einer gewissen Einseitigkeit nicht erspart bleiben. Der Gedanke, dass in *dem* Teile des auf gedachte Weise gestörten Feldes, welcher mit der „geschirmten“ Stelle correspondirt, durch die Anwesenheit des Ferromagneticums ebenfalls Veränderungen der Energieverteilung — vielleicht *conträrer* Art als die seither beobachteten — aufträten, erschien durchaus discutabel und bei dem Dunkel, welches heute noch die letzten Ursachen des Phänomens verschleiert, welches als „Magnetismus“ in die Erscheinung tritt, gewiss der eingehenden Prüfung würdig. Ich stellte mir daher die Aufgabe, unter möglichst klaren und übersichtlichen Verhältnissen Schirmwirkungen im Sinne Stefan's herzustellen und die Untersuchungen in den Grenzen zu vervollständigen, die durch die experimentelle Durchführbarkeit gegeben waren.

1. Versuchsanordnung und Messmethoden.

Als magnetisches Feld wählte ich zunächst das einfachste und bekannteste, das des *geradlinigen* stromdurchflossenen *Leiters.* Diese Annahme und technische Erwägungen führten

---

1) J. Stefan, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien 85. 2. Abt. p. 613.

2) W. Thomson's Marinegalvanometer.

zu dem Entschluss, für das ins Feld einzubringende Ferromagneticum die Form breiter, ebener Platten zu wählen. Derartige 150—200 mm breite Stäbe aus Stahl oder Eisen — es erschien ein Vergleich des Verhaltens verschiedenster Materialien für höchst zweckmässig — konnten relativ billig genau gleichmässig hergestellt werden und boten hinsichtlich der Homogenität des Materiales die grösste Gewähr. Vermutlich waren dieselben befähigt, ins Feld gebracht, die translatorische Ausdehnung des magnetischen Kraftflusses zu hemmen, d. h. in *einer* Richtung eine mehr oder minder vollkommene *Schirmwirkung* zu veranlassen.

Die directe Messung der zu untersuchenden Feldstärken mit dem Magnetometer erschien unthunlich, einerseits wegen der relativ geringen Empfindlichkeit, dann aber auch wegen des vom Instrument selbst ausgehenden Kraftflusses. Es kam demnach für die beabsichtigten Versuche nur eine Methode in Betracht, nämlich in einer secundären eisenlosen Spule („*Tastspule*") Inductionsströme zu erzeugen, deren Intensität ein relatives Maass für die locale Feldstärke war. Zur Erzeugung dieses secundären Stromes lagen zwei Möglichkeiten vor, nämlich durch *Drehen* der Tastspule um ihre zum Leiter parallele Axe im *constanten* Feld, oder aber durch ein *entstehendes* oder *vergehendes* Feld, bewirkt durch Schliessen oder Unterbrechen des Primärstromes. Beide Methoden erwiesen sich als durchaus gleichwertig, indessen machte ich meistens von der ersterwähnten „Methode I" Gebrauch, da sich die Untersuchungen vornehmlich auf *constante Felder* beziehen sollten. Zu Vorversuchen, und wenn sonstige magnetische Einflüsse die Erzeugung des Messinductionsstromes im constanten Felde unmöglich machten, wandte ich die, wie sich zeigen wird, wesentlich einfachere und deshalb schneller zum Ziele führende „Methode II" an. In diesen Fällen erfolgte der Stromschluss durch einen sinnreich construirten automatischen Schliesser, bei dem der Contact durch Niederschnellen einer angespannten Feder hergestellt wurde. Fehler, herrührend aus ungleichmässigem Tempo des Stromschlusses, waren also mit absoluter Sicherheit ausgeschlossen. Die specielle Versuchsanordnung war demgemäss zweckmässig so zu wählen, dass beide Methoden in beliebigem Wechsel als Controle angewandt werden konnten.

2. Specielle Versuchsanordnung.

Als Strommesser im secundären Kreis benutzte ich das astatische Galvanometer von H. du Bois-Rubens, welches, mit dem leichtesten der drei vorhandenen Magnetsysteme ausgerüstet, auf 17 sec einer vollen Amplitude astasirt und in

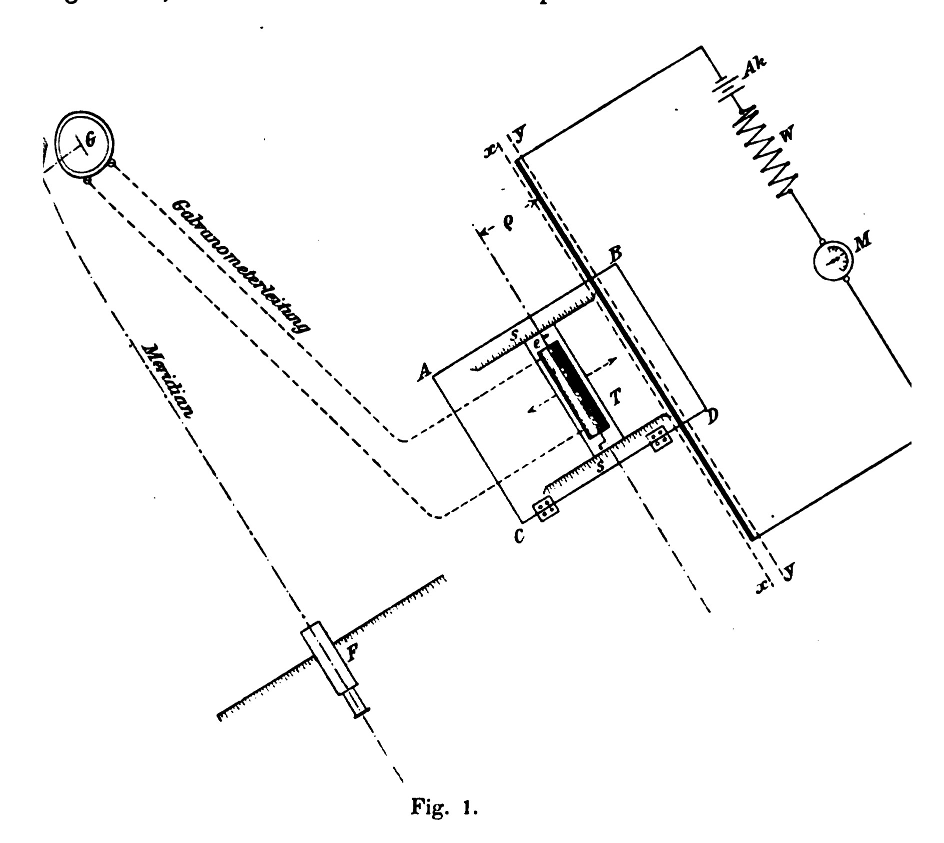


Fig. 1.

Verbindung mit der Spiegelablesung nach Gauss benutzt wurde. Die Notwendigkeit, mit der Versuchseinrichtung thunlichst dem Messapparate fernzubleiben, zwang mich, den Galvanometerspiegel mittels des zu seiner Normalen unter 45⁰ aufgestellten Hülfsspiegels *H*, vergl. Fig. 1, zu beobachten. Der Abstand dieses Bildes von der Scala am Fernrohr *F* betrug 2000 Scalenteile. Unter diesen Verhältnissen ergab sich als Galvanometer-

empfindlichkeit pro Scalenteil für *dauernde Ablenkung* 1.10^{-9} *Amp.* Die Verwendung dieses höchstempfindlichen Instrumentes bedingte die Elimination des erdmagnetischen Einflusses auf die drehbare Tastspule, d. h. die Spulenaxe, sowie die wesentlichen Teile des Versuchsapparates: der geradlinige Leiter und die Axe der ferromagnetischen Platten bez. deren Einspannvorrichtung waren in die Richtung der Inclination zu bringen, die am Orte der Untersuchungen (München) rund 64^{0} beträgt.

Die schliesslich getroffene Einrichtung ähnelte derjenigen mancher Erdinductorien; sie gestattete die Tastspule nach den drei Coordinatenaxen einzustellen. Sieht man von der vorerwähnten Complication ab, die doch lediglich durch die experimentelle Technik bedingt ist, so gewährt Fig. 1 ein Bild der Gesamtanordnung.

Auf einem genau senkrecht zum magnetischen Meridian fixirten Tische befand sich die (behufs Einstellung in die Inclination in den Charniren EF drehbare), kräftige Grundplatte $ABCD$, welche an der Rückseite mit verstellbaren Stützen versehen war. Auf ihr und unveränderlich mit ihr verbunden waren angebracht:

1. eine mit Scala versehene Führung ss, bestimmt zur Aufnahme des in ihr verschiebbaren Tastspulenschlittens e;

2. die Träger des geradlinigen Leiters L;

3. eine Einspannvorrichtung, bestehend aus zwei kräftig gehaltenen Schraubzwingen, die mittels passender Einlagstücke gestatteten, Platten von 150—200 mm Breite in eine beliebige Lage zum unveränderlich fixirten geradlinigen Leiter zu bringen.

Für die zunächst beabsichtigten Versuche war die bezügliche Platte einmal in die durch die Grade xx gekennzeichnete Lage, dann in die Lage yy zu bringen, wodurch die Abtastung der correspondirenden Felder ermöglicht war.

Die Tastspule T war auf dem Schieber e montirt, welcher in der Führung ss genau parallel mit sich selbst verschoben werden konnte. Die jeweilige Entfernung der Tastspulenaxe von der Axe des geradlinigen Leiters war durch zwei am Schieber e befindliche Zeiger in Verbindung mit den Führungsscalen jederzeit genau ablesbar. Umgekehrt war die Spule mit grösster Genauigkeit in jeder beliebigen Entfernung vom

Leiter, die ich stets mit ϱ bezeichnen werde, zu fixiren. Die Windungsgruppen der Tastspule waren auf einen an den Kanten abgerundeten Holzrahmen (Länge 200 mm, Höhe 20 mm) gewickelt. Um ein Werfen oder Ziehen dieses Rahmens thunlichst zu verhindern, war er aus mehreren Stücken harten Holzes zusammengeleimt. Seitliche Schilde aus dünnem Holze vervollständigten die Spule. Auf dieser befanden sich zwei hintereinandergeschaltete Wickelungen von je 4 Lagen von 59 bez. 55 Windungen. Der Durchmesser des Drahtes der inneren Wickelung betrug 0,25 mm, derjenige der äusseren 0,18 mm. Der Widerstand ergab sich zu $43{,}4 + 67{,}28\ \Omega = 110{,}68\ \Omega$. Die Enden dieser combinirten Wickelung führten zu am Spulenrahmen befestigten kleinen Messingstücken, an diese schloss sich die Galvanometerleitung. Zur Vermeidung von thermischen Einflüssen war es notwendig, in diesem secundären Stromkreise sämtliche blanke Metallteile mit Filz und Gummi zu umkleiden. Um die Tastspule bequem um ihre zum geradlinigen Leiter parallele Axe drehen zu können, trugen beide Kopfenden ihres Rahmens Messingbügel, in deren einem eine Kurbel, im anderen ein in seiner Verlängerung rechtwinklig gebogener Zapfen genau centrisch eingelassen waren. Regulirbare Anschläge gestatteten die genaue Einhaltung eines Drehwinkels von 180°, andererseits war die Spule leicht in der Nulllage zu fixiren. (Methode II.)

Der geradlinige Leiter L bestand aus einem 2,5 m langen, sorgfältigst durch Drillen gestreckten, gut isolirten Kupferdraht von 2,0 mm Durchmesser, welcher genau parallel der Spulenaxe ausgespannt war. Von seinen Enden aus setzte sich die Stromleitung geradlinig bis zur Decke, bez. bis zum Boden des Versuchsraumes fort, ging an diesem weiter bis zu der etwa 7 m entfernten Wand, wo sie sich durch die constante Stromquelle Ak, den variabeln Widerstand W und das Messinstrument schloss. Als Strommesser M diente in diesem Kreise ein Weston'sches Normalampèremeter, dessen absolute Zuverlässigkeit mir durch frühere Versuche bekannt war.

Durch diese Anordnung erreichte ich, dass weder das Einschalten eines Stromes von 1,5 Ampère maximaler Stärke in die Primärleitung, noch das Einbringen des Ferromagneticums die Galvanometerempfindlichkeit irgendwie beeinflusste.

Ich wende mich nun zur Darlegung des Ganges einer vollständig durchgeführten Versuchsreihe und beziehe mich in der Folge auf diese ausführliche Darstellung. Zunächst wurde für eine beliebige Stellung der Tastspule, beispielsweise „ϱ“ = 20 mm, der Neigungswinkel der Spulenaxe zur Horizontalen so lange variirt, bis ein blosses Drehen der Spule im Erdfeld einen möglichst verschwindenden Ausschlag im Galvanometer bewirkte, d. h. bis sich das ganze Versuchsgestell in der Richtung der erdmagnetischen Inclination befand. Dann wurde mit Fernrohr und Fadenkreuz ein geeigneter Punkt des Versuchsgestelles einvisirt, sodass sich eine eventuelle Aenderung des Grundplatten-Neigungswinkels durch die folgenden Operationen und eine dadurch eventuell bewirkte Veränderung des Wertes der erdmagnetischen Kraft sich nicht der Beobachtung entziehen konnte. Da sich das Erdfeld für die mittels Tastspule messbare Strecke von 200 mm ($\varrho_{\text{min.}} = 20$ mm, $\varrho_{\text{max.}} = 220$ mm, bedingt durch die Eigendimensionen der Tastspule und die Schieberabmessungen) als inconstant erwies, so ergab sich als zweite Operation: Abtastung des „Erdfeldes“, vergl. Tabellenschema. Demnächst war die Feldmessung vorzunehmen, wenn der Strom den geradlinigen Leiter durchfloss. Die durch die Abtastung erhaltenen Werte bringe ich unter *Berücksichtigung* der *Erdfeldquote* unter „Feld des freien Leiters“.

Dem Grundgedanken der Untersuchungen entsprechend war die Constitution des so genau bekannten Feldes durch eingebrachte Ferromagnetica zu stören. Da sämtliche Versuchsmaterialien mindestens Spuren eines durch unsere Mittel nicht zu vernichtenden magnetischen Residuums aufwiesen, so war vor Vornahme der endgültigen Abtastung das Eigenfeld der betr. Versuchsplatte abzutasten. Hierdurch wurden auch die kleinsten Aenderungen hinsichtlich des Verlaufes der erdmagnetischen Kraftlinien eliminirbar (Columne IV). Schliesslich wurde die letzte Abtastung vorgenommen, wenn der Primärstrom wieder geschlossen war. Die directe Beobachtung (Columne V) ergab natürlich den Summenwert der ineinandergelagerten Felder. Die unter Berücksichtigung des Plattenfeldes richtiggestellten Werte figuriren unter Columne VI. Zu bemerken ist, dass bei Abtastung des Feldes mit Hülfe des automatischen Rheotoms die Columnen II, IV u. V in Wegfall geraten, da

constante Felder in der ruhenden Spule keine Inductionswirkungen hervorrufen.

Tabellenschema.

Stromstärke im Primärleiter: .... Ampère.

I	II	III	IV	V	VI
ϱ mm	Erdfeld	Feld des freien Leiters	Feld der Platte	Feld der Platte + verändert. Feld des Leiters	Verändertes Feld des Leiters

3. Versuchsmaterial.

Wie erwähnt, war für das ins Feld einzubringende Ferromagneticum die ebene Plattenform gewählt worden.

Wurden diese Platten in die Inclinationsrichtung gebracht, — dazu zwang ja die Versuchstechnik —, so nahmen die Enden durch Induction im Erdfeld eine gewisse Polarität an. Der Einfluss dieser Magnetisirung konnte verschwindend klein gemacht werden, wenn man die Länge der Stäbe im Vergleich zu ihrer Dicke und Breite reichlich bemaass. So wählte ich als Plattenlänge das 8- bis 10 fache der Tastspulenlänge, eine Annahme, die sich durchaus bewährte. Folgende Tabelle gewährt einen Ueberblick über das reiche Versuchsmaterial. sowie über die speciellen Eigenschaften desselben. Die Platten 3, 4 und 5 stellen die verschiedenen Härtephasen *einer* Stahlsorte dar. — Vor Beginn der Versuche wurde jede einzelne Platte in Drahtschleifen senkrecht zum Meridian aufgehängt und durch kräftige longitudinale Erschütterungen möglichst entmagnetisirt.

Tabelle I.

Bezeichnung Nr.	Material	Sonstiger Verwendungszweck	Härtegrad	Mech. Eigenschaft		Chem. Eigenschaft Gehalt		Dimensionen
				k_z kg	D %	C	W	
1	Gussstahl (Wolframstahl)	zur Bearbeitung *härtester* Materialien	glashart	115,0	5,0	1,2	5,5	2000 × 20 × 10
2	Gussstahl	für Werkzeuge	hart	80,0	10,0	0,7	—	do.
3	Gussstahl	für Federn	sehr hart	101,0	6,0	0,7	—	1500 × 15 × 10
4	Gussstahl	für Federn	hart	—	—	0,7	—	do.
5	Gussstahl	für Federn	weich	—	—	0,7	—	do.
6	Flusseisen	für Federn	sehr weich	38,3	25,6	0,09	—	do.
7	Holzkohleneisen (geglüht)	für Dampfkessel	weichstes Material	—	—	0,08	—	2000 × 96 × 12

4. **Vergleich der Schirmfähigkeiten.**

Entsprach die eingangs aufgestellte Hypothese den physikalischen Thatsachen, so mussten zwischen der Schirmwirkung und der vermuteten Correspondenzerscheinung enge Beziehungen bestehen. Ich verglich daher zunächst sämtliche Platten hinsichtlich ihrer Schirmfähigkeit nach vorerwähnter „Methode II“. Die beigegebene Tab. II lässt mit grosser Klarheit erkennen, dass die Abschwächung des Feldes durchaus proportional der Härte des zwischen Leiter und Tastspule eingebrachten Ferromagneticums ist. Da sich die Schirmwirkung bei dem *weichsten* Materiale als am vollständigsten erwies, so war dieses für die ferneren Versuche ganz besonders zu berücksichtigen.

Tabelle II.

Stromstärke: $i = 1{,}0$ Amp.

ϱ mm	Feld des freien Leiters	Abschwächung des Feldes durch					
		Platte Nr. 1	Platte Nr. 2	Platte Nr. 3	Platte Nr. 4	Platte Nr. 5	Platte Nr. 6
30	47,2	15,0	13,9	14,1	10,9	10,5	7,2
35	40,2	13,1	11,0	12,5	10,8	9,85	7,21
40	35,1	13,2	12,5	12,5	10,1	9,25	7.1
45	31,8	13,0	11,3	11,8	9,8	9,1	8,1
50	28,4	12,0	10,2	11,5	10,2	9,4	7,8
60	24,0	11,0	10,2	10,8	10,1	9,6	8,1
70	20,5	11,2	9,9	11,1	9,2	8,3	8,0
80	18,5	10,0	9,5	10,6	8,8	8,5	8,2
90	16,9	9,9	10,0	10,1	8,3	8,2	7,8
100	15,0	9,8	9,4	9,6	8,8	8,5	8,0
—	—	—	—	sehr hart	hart	weich	sehr weich

5. Verhalten der Weicheisenplatte Nr. 6 speciell.

Einige Versuche liessen erkennen, dass der *procentuale* Grad der Schirmwirkung mit *abnehmender* Stromstärke im Primärkreis im allgemeinen *zunahm*. Bei 0,5 Ampère war dieselbe, wie Tab. III (p. 354) erkennen lässt, nahezu vollständig, d. h. im abgeschirmten Raume waren nur noch Spuren vom Strom herrührender magnetischer Energie vorhanden. — Die gewünschten Prämissen waren also gegeben.

6. Spiegelartige Feldverstärkung.

Nun brachte ich die Platte derart ins Versuchsgestell ein, dass es möglich war, mittels der Tastspule den mit der geschirmten Stelle correspondirenden Raum nach Methode I zu untersuchen. Das Resultat dieser Abtastung ist aus Tab. IV (p. 355) ersichtlich, der ich zur Erhöhung der Uebersichtlichkeit unter Columne III* die *verdoppelten* Werte des Feldes des freien Leiters, Columne III, beifüge.

Ein Vergleich der Zahlwerte in Columne III* und VI lässt unmittelbar erkennen, dass das Feld eines auf einer genügend

Tabelle III.

Methode I. Stromstärke: i = 0,5 Amp.

I	II	III	IV	V	VI
Abstand ϱ	Erdfeld	Feld des freien Leiters	Feld der Platte	Feld der Platte + veränderl. Feld des Leiters	Verändertes Feld des Leiters
22	+0,2	66,8	22,1	23,6	1,5
25	+0,8	56,3	21,0	22,6	1,6
30	+1,2	47,2	21,2	22,0	0,8
35	+1,2	38,8	19,5	21,0	1,5
40	+1,8	36,8	19,5	20,5	1,0
45	+2,2	33,0	15,0	18,3	3,3
50	+1,6	30,6	15,5	17,7	2,2
60	+1,7	17,6	14,0	18,6	4,6
70	+1,0	15,6	13,5	16,5	3,0
80	+1,8	15,2	11,8	14,8	3,0
90	+1,0	14,4	11,5	13,0	1,5
100	+0,9	13,0	11,5	13,0	1,5
120	+0,6	11,0	10,0	12,7	2,7
130	−0,8	10,2	10,5	12,7	2,2
140	−0,5	9,6	9,1	12,8	3,7
150	−0,2	9,3	10,0	11,7	1,7
160	−0,3	8,7	8,5	11,6	3,1
180	−1,0	8,0	8,0	9,9	1,9
200	−1,6	8,2	7,3	8,8	0,6

weichen und genügend dimensionirten Eisenplatte ruhenden geradlinigen stromdurchflossenen Leiters infolge der Anwesenheit des Ferromagneticums verdoppelt wird, d. h. letzteres wirkt so, als befinde sich in der Ebene seiner vorderen Begrenzungsfläche ein zweiter, den wirklich vorhandenen nach Richtung und Grösse durchaus identischer Strom. Diesen fictiven Strom kann man in Anlehnung an die bekannte optische Erscheinung als *magnetisches Bild* bezeichnen.

Tabelle IV.

Stromstärke: i = 0,5 Amp.

I	II	III	IV	V	VI	III*
ρ mm	Erdfeld	Feld des freien Leiters	Feld der Platte Nr. 6	Verändertes Feld des Leiters + Feld der Platte,	Verändertes Feld des Leiters	Feld des freien Leiters × 2
20	0,21	67,7	10,4	144,8	134,4	135,4
25	0,8	57,0	10,2	122,5	112,3	114,0
30	1,2	48,25	9,0	105,1	96,1	96,5
35	1,5	39,5	6,5	85,6	79,1	79,0
40	1,7	36,0	6,3	78,8	72,5	72,0
45	2,0	30,5	10,7	73,0	62,3	61,0
50	1,8	26,25	8,9	62,1	53,2	52,5
60	1,7	20,5	14,4	57,5	43,1	41,0
70	0,9	17,4	14,1	49,1	35,0	34,8
80	1,0	15,6	15,2	45,7	30,5	31,12
90	1,0	14,35	15,3	43,5	28,2	28,7
100	0,8	12,50	7,7	33,7	26,0	25,0
110	0,7	11,0	5,8	28,8	23,0	22,0
120	0,2	10,2	6,1	26,9	20,8	20,4
130	−0,3	9,8	5,1	25,2	20,1	19,6
140	−0,4	9,6	5,4	25,2	19,8	19,2
150	−0,2	9,4	5,2	24,1	18,9	18,8
160	−0,6	8,6	5,3	23,8	18,5	17,2
170	−0,6	8,0	5,1	22,1	17,0	16,0
180	−0,9	7,95	5,5	21,7	16,2	15,9
190	−0,7	8,0	4,0	19,9	15,9	16,0
200	−1,2	7,2	5,1	19,7	14,6	14,4
210	−0,7	6,1	4,0	17,1	13,1	12,2
220	−1,0	5,5	3,0	14,1	11,1	11,0

7.

An diese Versuche schlossen sich eingehende Untersuchungen hinsichtlich der Abhängigkeit jener spiegelartigen Feldverstärkungen von der Plattenbreite, der Materialhärte und von der Intensität des Stromes im geradlinigen Leiter. Indessen stiess ich hierbei auf grosse Schwierigkeiten. Bei

schwachen Strömen trat eine wesentliche Differenzirung in gedachter Hinsicht nicht hervor, andererseits scheiterte die Anwendung stärkerer Ströme an der relativ geringen Plattenbreite; auch beeinflusste Starkstrom das überaus empfindliche Galvanometer in unangenehmster Weise. So stellte ich nach zahlreichen vergeblichen Versuchen die Untersuchungen mit dem stromdurchflossenen geradlinigen Leiter einstweilen ein, welche namentlich für die *theoretische Forschung* den Vorteil möglichster Einfachheit hatten, und wählte zur ferneren Bearbeitung meines Studienobjectes einen anderen Generator magnetischer Energie: das stromdurchflossene Solenoid. Mit diesem waren leicht grössere magnetische Dichten hervorzubringen, andererseits afficirten — falls die Solenoid*länge* im Vergleich zum *Durchmesser* klein genommen wurde — seine Pole entschieden weniger leicht die Galvanometerconstanz.

8. Versuche mit einem stromdurchflossenen Solenoide.

Durch freundliches Entgegenkommen der Maschinenbauanstalt J. G. Landes in München gelangte ich in den Besitz einer Eisenplatte aus sehr weichem, ausgeglühtem *Lowmoore Holzkohleneisen*, deren mechanische Eigenschaften im Verein mit den grossen Abmessungen, vergl. Tab. 1, nach den früheren Erfahrungen sehr günstige Resultate erwarten liessen. Indessen bildete die mehrere Centner schwere Eisenmasse eine nicht zu unterschätzende Gefahr für die Galvanometerconstanz. Eingehende Versuche überzeugten mich aber, dass — falls ein Mindestabstand des Plattenschwerpunktes von den Galvanometersystem von 6 m gewahrt blieb — kleinere durch die Versuchsweise bedingte laterale Verschiebungen der Platte ohne merkbaren Einfluss blieben. Um Fernwirkungen, die eventuell von dem stromdurchflossenen Solenoide ausgehen konnten, thunlichst zu vermeiden, wählte ich für dasselbe eine möglichst gedrungene Form. Zur Ermittelung der Feldstärken kamen wiederum nur die im ersten Teile besprochenen Messmethoden und als Tastspulenbahn das Solenoidinnere in Betracht. Ferner entschloss ich mich zur Vermeidung immerhin unsicherer Rechnungen zur Herstellung *zweier* möglichst identischer Solenoide, von denen das eine, als Bild des anderen betrachtet, durch geeignete Kom-

bination gestattete, die erhaltenen Resultate mit dener einer idealen Spiegelfeldverstärkung zu vergleichen.

9. Allgemeine Versuchsanordnung und Controleinrichtung.

Zur Strommessung im secundären Kreis diente wiederum das du Bois-Rubens'sche Galvanometer, welches indessen nun mit einem Systeme von geringerer Empfindlichkeit ausgerüstet und auf 7 sec einer vollen Amplitude astasirt wurde. Da die Empfindlichkeit astatischer Galvanometer dem allmählich abnehmenden Momente der Nadeln entsprechend mit der Zeit veränderlich ist, so war eine stete Controle der Galvano-

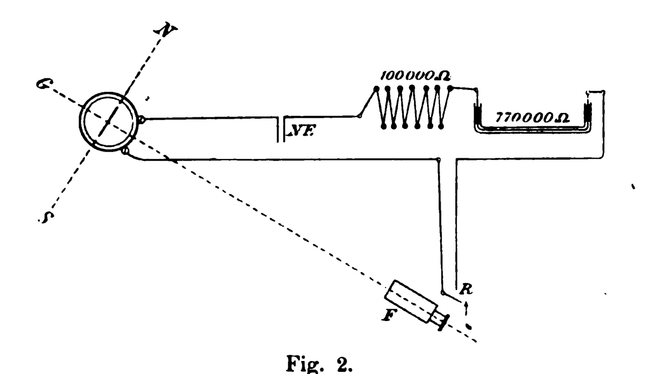


Fig. 2.

meterconstanten dringend erwünscht. Nach längeren Versuchen ergab sich die in Fig. 2 dargestellte Einrichtung, welche sich durchaus bewährte. Ihr liegt der Gedanke zu Grunde, dass eine Aenderung der Galvanometerempfindlichkeit unter sonst gleichen Umständen proportional sein muss dem durch eine *constante* elektromotorische Kraft bewirkten Scalenausschlag. Zur Erzeugung dieser elektromotorischen Kraft bez. zur Controlle ihrer Constanz dienten zwei Normal-Weston-(Cadmiumamalgam, -sulfat)-Elemente, die nach Fertigstellung eine Klemmenspannung von 1,019 Volt aufwiesen.

Der Temperaturcoefficient der Elemente war

$$\gamma_t = -0{,}0000125\,(t - 18^0),$$

die an und für sich geringen Temperaturschwankungen im Versuchsraum konnten demgemäss vernachlässigt werden. Von

diesen Elementen verwandte ich Nr. 1 (N. E.) im Galvanometercontrolkreis, während Nr. 2 in Verbindung mit einem Thomson'schen Quadrantenelektrometer zur gelegentlichen Prüfung der Constanz des arbeitenden Elementes diente. Nach siebenmonatlicher Benutzung des Normalelementes Nr. 1 war zwischen beiden Elementen irgend ein Unterschied in der Klemmenspannung nicht nachweisbar, jedenfalls war er *kleiner* als $^1/_{10000}$ Volt, die Fehlergrenze des Elektrometers.

Diese ausgezeichnete Constanz war erreicht durch einen vorsichtigerweise vorgeschalteten Widerstand, der verhinderte, dass dem N. E. jemals Ströme von grösserer Intensität als $\sim$ $^1/_{800000}$ Ampère entnommen werden konnten. Der Vorschaltwiderstand bestand aus einem Normaletalon von 100000 Ω und einem Flüssigkeitswiderstand von rund 770000 Ω bei 15°. Die Fernrohrscala befand sich in 2000 Scalenteilen Entfernung vom Galvanometerspiegel. Bei Schliessung des Stromes mittels des automatischen Schlüssels R beobachtete ich unter obengedachten Verhältnissen einen *ersten Ausschlag* von 315,5 Scalenteilen, sodass sich als Galvanometerempfindlichkeit für *erste Ausschläge* ergab:

$$\gamma_n = \frac{1{,}019}{870000\,.\,315{,}5} = \sim 2{,}7\,.\,10^{-8} \text{ Amp. pro Scalenteil.}$$

Vor Beginn und nach Beendigung einer Versuchsreihe wurde stets die Empfindlichkeit des Galvanometers controlirt, wobei natürlich der Inconstanz des Hülfsflüssigkeitswiderstandes Rechnung getragen werden musste.

10. Specielle Versuchsanordnung.

Nachdem ich mich beim Bericht über Versuche mit einem geradlinigen Stromleiter eingehender über gewisse Versuchsdetails äusserte, beginne ich hier unmittelbar mit der Beschreibung der modificirten Anordnung. Fig. 3.

Auf einem genau profilirten Grundbrette A glitten in sicheren Führungen die Schlitten des Hauptsolenoides $\mathfrak{H}$ des Vergleichssolenoides $\mathfrak{V}$ und des Tastspulensupports $T.\,S.$ Im Tastspulensupport war der Halter $T.\,H.$ um seine Längsaxe drehbar eingespannt. Dieser Halter trug am vorderen Ende einen Messingkopf, in dem die eigens construirte Tastspule T

untergebracht wurde. Durchfloss die Solenoidwindungen ein constanter Strom, und drehte man die Tastspule um ihre zur Solenoidaxe senkrechte Axe, so musste in derselben ein Inductionsstrom entstehen, desses Intensität ein relatives Maass für die locale Feldstärke gab. Führte man die Tastspule durch Verschiebung ihres Schlittens Punkt für Punkt durch das Solenoidinnere, so erhielt man nach obigem Verfahren ein präcises Bild von der Verteilung der magnetischen Energie.

Entsprechend der früheren Bezeichnungsweise werde ich den Abstand der Tastspulenaxe von der vorderen Stirnfläche des Hauptsolenoides mit ϱ bezeichnen.

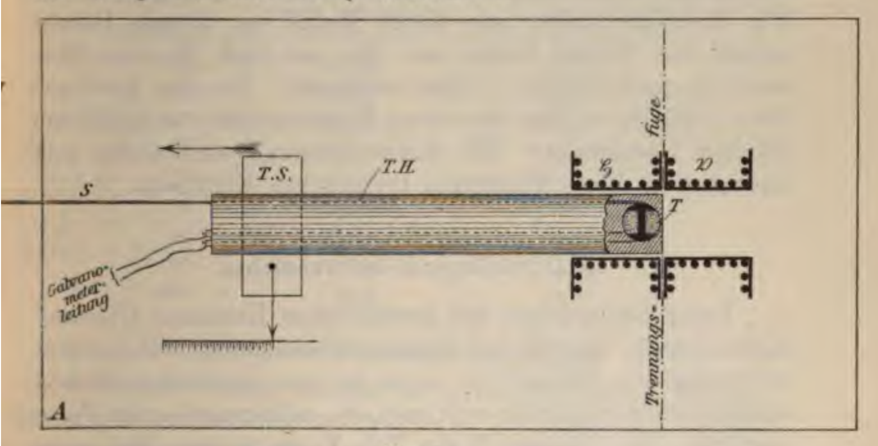


Fig. 3.

Der Tastspulenhalter *(T. H.)* war mit zwei Längsdurchbohrungen versehen, durch welche die zum Sitze des Beobachters führende Schnur *S*, mit der die Auslösung der Spulendrehung erfolgte, und die Ableitung des secundären Stromes gelegt war. Genau regulirte Anschläge sicherten die unbedingte Einhaltung des Tastspulendrehwinkels von 180°. Die Tastspulendrehung selbst wurde bewirkt durch ein System tangential vom Spulenumfang ablaufender, äusserst elastischer Bänder, sodass bei diesen Messungen individuelle Einflüsse vollständig ausgeschlossen waren. Wie früher, so war auch hier die erdmagnetische Kraft thunlichst zu eliminiren, deshalb wurde die ganze Versuchseinrichtung senkrecht zum Meridian montirt, und die Tastspulenaxe durch Drehen ihres Halters im Support

nach bekanntem Verfahren möglichst genau in die Richtung der erdmagnetischen Inclination gebracht. Die Solenoide $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{V}$ wurden mit grösster Sorgfalt *genau übereinstimmend* in starkem Messingblech gefertigt. Ihre Länge betrug 80, der innere Durchmesser 60 mm. Die mit peinlichster Sorgfalt hergestellte Armatur bestand aus je drei Lagen zu je 40 Windungen eines gut isolirten 1,65 mm dicken Kupferdrahtes. Der Widerstand eines jeden Solenoides betrug 0,251 Ω. Die in unmittelbarer Folge vorgenommene Durchtastung beider Solenoide lieferte den strikten Beweis, dass die Herstellung zweier *vollständig äquivalenter* magnetomotorischer Systeme gelungen war. — Die Tastspule stellte eine kleine Walze von 30 mm Durchmesser und 40 mm Länge dar. Sie war nach Werner Siemen's Doppel-T-Anker in Zink construirt. Um den mittleren Kern wickelte ich etwa 90 m eines Kupferdrahtes von 0,225 mm blankem Durchmesser. Ein dicker Ueberzug von Paraffin und Lack entzog diese Windungen thermischen Einflüssen.

11. Durchführung des Versuches.

Unter Beobachtung der gewöhnlichen Kautelen: Galvanometercontrole, Erdfeld und Plattenfeldbestimmung durchtastete ich einmal das Solenoid $\mathfrak{H}$, wenn die von constantem Strome durchflossenen Solenoide sich mit den entgegengesetzten Polen berührten, vgl. Columne II der Tab. V, ein anderes Mal, wenn das zweite Solenoid $\mathfrak{V}$ durch die obenerwähnte Eisenplatte dergestalt ersetzt war, dass die vordere Begrenzungsfläche des Hauptsolenoides die Platte etwa im Schwerpunkt ihrer Fläche berührte. Das Vergleichssolenoid wurde inzwischen an einer genügend entfernten Stelle des Primärkreises eingeschaltet, sodass die Versuchsbedingungen vollständig gewahrt blieben. Die unter diesen Umständen erzielten Resultate trug ich in Columne III der nachstehenden Tab. V ein. Ein Vergleich der Ergebnisse der Columnen II und III lässt unmittelbar erkennen, dass die Eisenplatte genau denselben Einfluss hervorbringt wie das Vergleichssolenoid, sodass der Vorgang in seiner Totalität ein Analogon bildet zu den optischen virtuellen und aufrechten Spiegelbildern. Zu bemerken ist noch, dass in dem Raume, welcher vom sich „magnetisch spiegelnden" Solenoide $\mathfrak{H}$ aus

betrachtet *hinter* der Eisenplatte lag, auch nicht eine Spur vom Solenoide herrührender magnetischer Energie nachweisbar war: es fand eine absolute Schirmwirkung statt, die a priori als wesentliches Kriterium der vermuteten Correspondenzerscheinung angesehen worden war.

Tabelle V.

Stromstärke: $i = 0,2$ Ampère.

I	II	III
ϱ	Solenoid $\mathfrak{H}$ gegen Solenoid $\mathfrak{V}$	Solenoid $\mathfrak{H}$ gegen Eisenplatte
20	253,2	251,5
30	250,9	251,4
40	243,1	243,0
50	230,72	228,5
60	207,8	204,6
70	173,15	172,05
80	135,4	133,2
90	96,0	94,02
100	65,4	65,3

12. Einfluss der mechanischen Härte.

Aeusserst wichtig erschien es zu entscheiden, ob die *mechanische Härte* bei dem spiegelartigen Verhalten eines Ferromagneticums von Einfluss sei; frühere Versuche in dieser Richtung waren — wie schon erwähnt — gänzlich fehlgeschlagen. Das Resultat dieser Betrachtung bringe ich in Tab. VI, der ich einige versuchstechnische Notizen beifüge. Die Tastspule wurde in einer Entfernung $\varrho = 20$ mm im Hauptsolenoide $\mathfrak{H}$ fixirt und das Vergleichssolenoid in gleicher Weise wie beim grundlegenden Versuche (11) der Reihe nach durch die verschiedenen Platten, vergl. Tab. I ersetzt. Die klarsten Resultate erzielte ich mit den Platten Nr. 3, 4, 5 und 6, welche — wie bereits früher erwähnt — die verschiedenen Härtephasen genau gleich dimensionirter Stäbe darstellen.

Tab. VI besagt:

Die Fähigkeit ferromagnetischer Substanz, spiegelartige Feldverstärkungen zu bewirken, ist eine Function ihrer mechanischen Härte. Sie nimmt mit Steigerung des Härtegrades ab.

Tabelle VI.

$\varrho = 20$ mm.

	So.	Solenoid ℌ gegen Solenoid 𝔅	Solenoid ℌ gegen Platte Nr. 3	Nr. 4	Nr. 5	Nr. 6	Parallelschluss zum Galvanometer	Empfindlichkeits-Abtönung
,25	125,6	166,5	159,2	161,5	162,4	165,1	∞ Ω	310,0 : 310,0 (normal)
,5	200,5	267,3	255,7	260,5	260,8	264,2	80 Ω	310,0 : 138,5
1,0	211,6	281,5	270,0	273,6	275,0	278,7	15 Ω	310,0 : 41,5
2,0	230,0	306,6	295,0	299,0	299,6	304,5	6 Ω	310,0 : 18
4,0	261,0	342,0	337,0	338,5	339,3	341,5	3 Ω	310,0 : 11
8,0	89,0	135,0	131,4	132,2	133,5	135,0	0 Ω	310,9 : 2
20,0	259,0	348,0	338,5	341,5	341,5	346,0	0 Ω	310,0 : 2

13. Spiegelfeldverstärkung bei schiefstehendem Solenoid.

Nun stellte ich mir die Aufgabe zu entscheidēn, ob auch dann eine der optischen Spiegelung analoge Feldverstärkung eintrete, wenn die Axe des stromdurchflossenen Solenoides mit der Normalen zur ferromagnetischen Platte einen Winkel bildete.

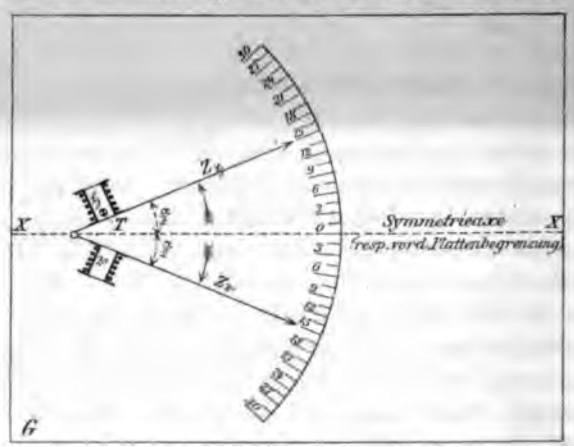


Fig. 4.

Zur Durchführung dieses interessanten Versuches wählte ich wiederum die grosse Platte, bezeichnet Nr. 7, denn diese gestattete erfahrungsgemäss die Verwendung stärkerer Primärströme, woraus wiederum die Möglichkeit resultirte, sich mit einer geringen Galvanometerempfindlichkeit zu begnügen. Ich

versah die Solenoide mit genau entsprechenden Drehzapfen $a_{\mathfrak{H}}$ und $a_{\mathfrak{B}}$, vgl. vorstehende schematische Abbildung Fig. 4, und mit grossen Messingzeigern $Z_{\mathfrak{H}}$ und $Z_{\mathfrak{B}}$, fixirte dieselben alsdann derartig auf der mit präciser Graduirung versehenen Grundplatte G, dass sie mit grösster Genauigkeit in die bezüglichen Spiegelbildstellungen — die Symmetrieaxe XX als spiegelnde Fläche gedacht — gebracht werden konnten. Die drehbare Tastspule T arretirte ich wiederum im Inneren des Hauptsolenoides in der Entfernung $\varrho = 20$ mm, stellte dann die — bei 1,0 Ampère Stromstärke im Solenoidkreis — an den bezüglichen Stellen vorhandene Feldstärke fest, indem ich allmählich den Winkel der Solenoide zur Symmetrieaxe ($\alpha/2$) grösser und grösser wählte (Tab. VII). Alsdann trennte ich die Grundplatte G im Schnitte XX und ersetzte das Vergleichssolenoid durch die vorerwähnte Eisenplatte, sodass die vordere Plattenebene mit der früheren Symmetrieaxe XX zusammenfiel, während die sonstigen Versuchsbedingungen gewahrt blieben. Das Resultat der nun vorgenommenen Abtastung der verschiedenen Positionen ist unter Columne III nachstehender Tabelle eingetragen.

Das Versuchsergebnis zeigt mit grösster Klarheit den spiegelartigen Einfluss eines Ferromagneticums auf das Feld eines beliebig zu ihm gelagerten von *constantem Strom* durchflossenen Solenoides. Die Galvanometerempfindlichkeit betrug $1,2 \cdot 10^{-7}$ Ampère pro Scalenteil. Die spiegelartigen Feldverstärkungen können also unter sonst günstigen Umständen mit Galvanometern von relativ geringer Empfindlichkeit dargethan werden.

Tabelle VII.

Stromstärke: $i = 1,0$ Amp.

$\frac{\alpha}{2}$	Solenoid gegen Solenoid	Solenoid gegen Eisenplatte	$\frac{\alpha}{2}$	Solenoid gegen Solenoid	Solenoid gegen Eisenplatte
0°	180,2	179,2	27°	145,6	145,3
3	173,7	172,0	33	144,6	144,0
6	165,9	165,0	39	141,9	141,8
9	161,3	160,7	45	138,4	138,1
12	156,0	156,0	51	137,0	137,2
15	152,0	153,15	60	136,6	136,6
21	148,2	149,09			

14. Kaleidoskopartige Feldverstärkung.

Es wurde gezeigt, dass das von einem geradlinigen von constantem Strome durchflossenen Leiter herrührende Feld durch ein benachbartes Ferromagneticum derartig beeinflusst werden kann, als befinde sich in der Lage des optischen Spiegelbildes ein zweiter, ersterem durchaus identischer Strom. Von höchstem Interesse war es zu entscheiden, ob die auffallende Identität der optischen und magnetischen Erscheinungen soweit gehe, dass bei Zusammenstellung mehrerer ferromagnetischer Platten Erscheinungen aufträten, die beim Licht als *Winkelspiegelbilder* bekannt sind.

Zur Beantwortung dieser Frage schlug ich den Weg ein, der sich aus vorläufig dunkeln Ursachen stets bewährte, gewissermaassen das Ideal der vermuteten Erscheinung zu construiren und die in der Realität erhaltenen Resultate mit dem Ergebnis am idealen Apparat zu vergleichen.

Zu dem Zwecke verband ich die Eisenplatten Nr. 6 und 7, die ja die in Rede stehende Eigenschaft in hohem Maasse gezeigt hatten, mittels kräftiger Schraubzwingen zu einem Eisenwinkel von 90° Oeffnung, in dem der geradlinige Leiter L genau in der Halbirungsaxe ausgespannt wurde (Fig. 5). Dann construirte ich mir mit grösster Sorgfalt den „*Idealapparat*", ein Holzgestell, welches vier in jeder Hinsicht dem geradlinigen Stromleiter L identische Kupferdrähte enthielt, die genau die Lagen optischer Spiegelbilder — die inneren Winkelflächen als Spiegelebenen gedacht — einnahmen. Vgl. Fig. 6.

Die in Betracht kommenden Maasse sind den schematischen Figg. 5 und 6 eingeschrieben. Die durch ihre Projection wiedergegebenen Leiter L^*, L_1, L_2, L_3 waren durch Drillen sorgfältigst gestreckt, sie waren den Plattenlängen entsprechend je 1,5 m lang. Die Feldmessung erfolgte mit der früher bereits erwähnten Tastspule, die zu diesem Zwecke auf ein kleines Böckchen geschraubt, und so mit grösster Präcision in eine bestimmte Lage sowohl zum geradlinigen Leiter L als L^* zu bringen war. Der secundäre Messstrom wurde durch Oeffnen und Schliessen des Primärstromes erzeugt, sodass eine Eigenbewegung der Spule vermieden war. Die Durchführung einer

Versuchsreihe gestaltete sich folgendermaassen. Nach Abtönung der Galvanometerempfindlichkeit auf 2,7 . 10^{-8} Ampère pro Scalenteil bestimmte ich, wie bei den früheren Untersuchungen, das „Feld des freien Leiters“ für $\varrho = 13$ mm. Nach Feststellung dieser Feldstärke (Tab. VIII, Columne II) brachte ich den stromdurchflossenen Leiter und mit ihm die Tastspule in den auf 14 mm präcisirten Abstand von *einer* Eisenplatte und stellte durch mehrfachen Stromschluss die *nun* vorhandene Feldstärke

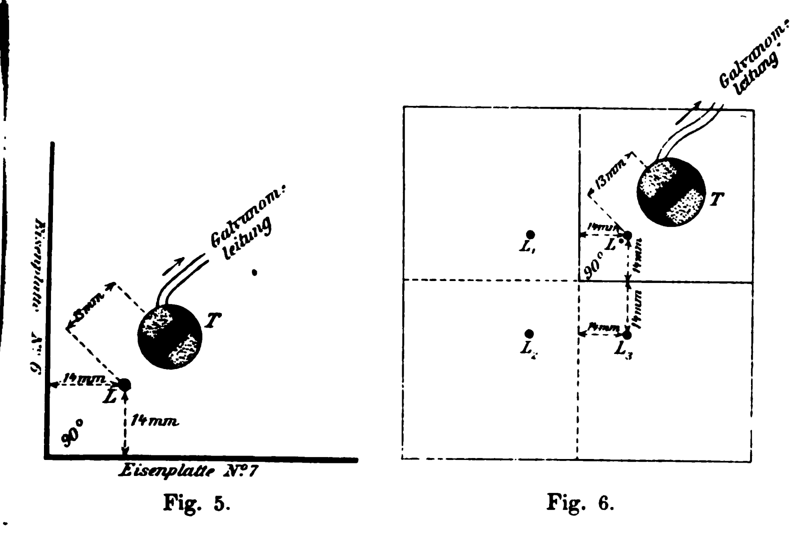


Fig. 5. Fig. 6.

fest (Tab. VIII, Columne III). Dann nahm ich unter sonst gleichen Bedingungen die Abtastung vor, wenn sich der Stromleiter in der durch Fig. 5 gekennzeichneten Stellung *im Eisenwinkel* befand (Columne IV). Schliesslich maass ich die durch die *vier Parallelströme* — vergl. Fig. 6 — an der entsprechenden Stelle im Idealapparat erzeugte Feldstärke, vgl. Tab. VIII, Columne V, und führte den Gesamtversuch für fünf verschiedene Stromstärken unter sorgsamer Beobachtung aller Controlmaassregeln durch. Die auf einwandfreie Weise erhaltenen Resultate der Tabelle weisen die Existenz *kaleidoskopartiger* Wirkung eines Winkels aus *ferromagnetischem* Materiale auf in demselben befindliche magnetische Energie überzeugend nach (Tab. VIII).

Tabelle VIII.

I	II	III	IV	V
Stromstärke i ... Amp.	Feld des freien Leiters	Feld des freien Leiters, verstärkt durch Platte 1	Feld des Leiters im *Winkel*	Feld des Leiters im *Idealapparat*
1,0	13,5	16,12	23,8	23,6
2,0	25,5	33,0	46,0	46,2
3,0	39,0	47,5	69.5	69,5
4,0	45,2	63,2	93,2	98,9
5,0	68,0	79,1	119,0	117,3

Schluss.

Die vorstehenden Untersuchungen liessen erkennen, dass zwischen den Erscheinungen des *Lichtes* und des *Magnetismus* grosse Analogien bestehen, deren zweifellos vorhandener causaler Zusammenhang unserer Erkenntnis noch verschlossen ist. Vielleicht gelingt es durch eingehende Prüfung der Beeinflussung magnetischer Energie durch *gekrümmte* ferromagnetische Flächen, weitere Brücken zwischen optischen und magnetischen Erscheinungen zu schlagen und einzureihen unter die als *Bewegungserscheinungen* erkannten Energieformen *Licht* und *Electricität*. die Kraft, die heute in zahllosen Anwendungen in Wissenschaft und Technik dem Wohle und Ruhme der Nationen dient.

München, December 1900.

(Eingegangen 12. December 1900.)

10. *Experimentelle Bestimmung von Capillaritätsconstanten condensirter Gase;* *von Leo Grunmach.*

[Aus den Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin mitgeteilt vom Verfasser.[1])]

Für Flüssigkeitswellen, welche unter der gemeinsamen Wirkung der Schwere und der Oberflächenspannung sich bilden, hat Lord Kelvin[2]), ausgehend von hydrokinetischen Betrachtungen, eine Beziehung zwischen Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Wellenlänge abgeleitet, welche lautet

$$v^2 = g\frac{\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\alpha}{\sigma}.$$

Hierin bedeuten v die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, g die Beschleunigung infolge der Schwere, λ die Wellenlänge, σ die Dichte der Flüssigkeit und α deren Oberflächenspannung. Jeder der beiden Teile, aus denen die rechte Seite der Gleichung besteht, hat eine bestimmte physikalische Bedeutung. Der erste, von der Schwere abhängige Teil entspricht Wellen von grösserer Wellenlänge, die vorwiegend von der Schwere und nur in geringem Grade von der Oberflächenspannung abhängig sind, während der zweite Teil für Capillarwellen gilt, die, von der Schwere nahezu unabhängig, in ihrem Entstehen und Fortbestehen fast nur durch die Oberflächenspannung bedingt sind. Für solche Capillarwellen lässt sich daher der erste von der Schwere herrührende Teil vernachlässigen, sodass man für sie erhält

$$v^2 = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\alpha}{\sigma},$$

und wenn man $v = n\lambda$ setzt, wo n die Schwingungszahl bedeutet,

$$\alpha = \frac{n^2\lambda^3\sigma}{2\pi}.$$

---

1) L. Grunmach, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin, Gesamtsitzung vom 26. Juli 1900.

2) W. Thomson, Phil. Mag. 42. p. 368. 1871.

Auf diese Weise lässt sich also die Oberflächenspannung einer Flüssigkeit bestimmen, wenn Dichte, Schwingungszahl und Wellenlänge bekannt sind.

Um Capillarwellen auf einer Flüssigkeitsoberfläche bequem zu erzeugen, taucht man nach dem Vorgange von Hrn. L. Matthiessen[1]) eine Stimmgabel von hoher Schwingungszahl, deren Zinken mit feinen Spitzen versehen sind, mit diesen in die Flüssigkeit 1—2 mm tief ein und bringt sie zum Tönen. Es entstehen dann auf der Niveaufläche um die Spitzen als Centren zwei fortschreitende Kreiswellensysteme und zwischen den Spitzen ein System stehender, hyperbelförmiger, in der Axe äquidistanter Interferenzwellen, deren Knoten und Bäuche sich durch die Spiegelwirkung der gekrümmten Flüssigkeitsoberfläche als scharfe dunkle und helle Linien abheben.

Die Genauigkeit der Bestimmung der Capillarconstante hängt, da in der Gleichung für dieselbe die Grössen n und λ in der zweiten, bez. in der dritten Potenz auftreten, vorzugsweise von der Genauigkeit ab, mit welcher n und besonders λ gemessen werden können. In einer früheren Arbeit[2]) habe ich gezeigt, in welcher Weise ich bemüht gewesen bin, die Methode zu einer Präcisionsmessmethode auszugestalten, insbesondere durch Construction und Anwendung eines geeigneten Mikrometermikroskops eine genaue Wellenlängebestimmung zu ermöglichen.

Nachdem ich dann eine grössere Reihe von Flüssigkeiten und von geschmolzenen und schmelzenden Metallen nach dieser Methode untersucht[3]), schien es mir wünschenswert und wichtig, zu versuchen, ob sie mit Erfolg auch zur Bestimmung der *Capillarconstanten condensirter Gase* angewandt werden könne.

Ueber diesen, für die Untersuchungen der Continuität des flüssigen und gasförmigen Zustandes wichtigen Gegenstand liegen in der physikalischen Literatur nur spärliche Angaben vor, und doch ist die Kenntnis gerade der Capillarconstanten condensirter Gase für die nähere Erforschung des kritischen Zustandes derselben von grosser Bedeutung. Erst in den

1) L. Matthiessen, Wied. Ann. **38**. p. 118. 1889.

2) L. Grunmach, Verhandl. d. Deutsch. Physikal. Gesellsch. **1**. p. 13. 1899; Ann. d. Phys. **3**. p. 660. 1900.

3) l. c. p. 18, bez. p. 665.

letzten Jahren sind im Verfolg der Untersuchungen des Hrn. van der Waals auf dessen Anregung Messungen der Variationen capillarer Steighöhen von flüssiger Kohlensäure und von flüssigem Stickstoffoxydul innerhalb eines gewissen Temperaturintervalles (von -25^0 bis etwa $+30^0$ C.) ausgeführt worden von Hrn. Verschaffelt[1]), um festzustellen, ob auch für diese Substanzen das Aenderungsverhältnis der molecularen Oberflächenenergie mit der Temperatur denselben constanten Wert besitzt, welchen zuerst Hr. R. von Eötvös[2]) sowohl aus theoretischen Betrachtungen gefolgert, wie auch auf experimentellem Wege nach der von ihm ersonnenen „Reflexionsmethode" für eine grössere Reihe einfach zusammengesetzter Flüssigkeiten abgeleitet hat. Diese Methode besteht darin, dass die von zwei Lichtpunkten herrührenden und vom Flüssigkeitsmeniscus in horizontaler Richtung reflectirten Strahlen im Fernrohr eines Kathetometers aufgefangen werden, dass ihr verticaler Abstand kathetometrisch gemessen, ihre Neigung gegen die Oberflächennormale aus der Richtung der einfallenden Strahlen nach dem Reflexionsgesetze bestimmt und aus diesen Daten die Capillarconstante berechnet wird. Als besonderen Vorzug dieser Methode hebt Hr. von Eötvös hervor, dass es mittels derselben möglich sei, Capillarconstanten von Flüssigkeiten, die beliebig lange in zugeschmolzenen Glasröhren aufbewahrt waren, zu bestimmen, und dass es ihm auch gelungen sei, die Capillarconstanten condensirter Gase zu bestimmen, ohne indessen irgend welche hierauf bezüglichen Beobachtungen mitzuteilen. Von anderen Forschern sind meines Wissens Messungen auf diesem Gebiete bisher nicht ausgeführt worden. Durch die vorliegende Arbeit glaube ich nun nachweisen zu können, dass die Anwendung der Capillarwellenmethode es ermöglicht, Capillarconstanten condensirter Gase mit derselben Genauigkeit zu bestimmen wie die gewöhnlicher Flüssigkeiten.

Der Untersuchung sind von mir zunächst vier condensirte Gase unterworfen worden: verflüssigte schweflige Säure, die sogenannte Pictet'sche Flüssigkeit (nach den Angaben von

1) J. Verschaffelt, Zittingsversl. Kon. Akad. v. Wetensch. Amsterdam p. 74. 1895/96; l. c. p. 94. u. 175. 1896/97; Commun. from the Phys. Labor. Leiden Nr. 18. 1895; Nr. 28 und 32. 1896.

2) R. von Eötvös, Wied. Ann. 27. p. 448. 1886.

Hrn. Raoul Pictet ein Gemisch von 64 Gewichtsteilen schwefliger Säure auf 44 Gewichtsteile Kohlensäure), verflüssigtes Ammoniak und verflüssigtes Chlor.

Die Versuche mit verflüssigter schwefliger Säure und mit der Pictet'schen Flüssigkeit, welche in Siphonflaschen mit regulirbarem Schraubenventil von der „Gesellschaft für flüssige Gase" (Raoul Pictet) als chemisch rein bezogen wurden, habe ich im Physikalischen Institut der Technischen Hochschule, diejenigen mit verflüssigtem Ammoniak und mit verflüssigtem Chlor im Chemischen Laboratorium der Kunheim'schen Fabrik in Niederschönweide bei Berlin ausgeführt.[1])

Die Versuchsanordnung und die Beobachtungsart war dieselbe wie bei meinen früheren Versuchen.[2]) Die condensirten Gase, welche unmittelbar vor dem Beginn der Versuche durch mehrere Filter filtrirt worden waren, befanden sich in geeigneten, genügend weiten und tiefen Porzellanschalen, die ihrerseits wieder in Kältemischungen aus fester Kohlensäure und abgekühltem Alkohol, bez. bei den Versuchen mit verflüssigtem Ammoniak (um die Bildung von kohlensaurem Ammoniak zu verhindern) in einer Chlorcalciummischung standen, die durch ein Kohlensäuregemisch bis auf -70^{0} C. abgekühlt werden konnte. Es ist notwendig, die Schalen bis zum Rande mit den condensirten Gasen zu füllen, weil sonst infolge der starken Abkühlung der in der Luft enthaltene Wasserdampf zu Schnee condensirt und die Flüssigkeitsoberfläche leicht durch Hereinfallen des Schnees gestört werden kann.

Durch solche hereinfallende Schneepartikelchen würde übrigens im allgemeinen nicht die Oberflächenspannung der untersuchten verflüssigten Gase verändert, sondern nur, wenn sie in die Nähe der schwingenden Stimmgabelspitzen geraten, die Ausbildung der Wellensysteme gestört werden. Während nämlich in dem verflüssigten, specifisch sehr leichten Ammoniak

---

1) Ich benutze diese Gelegenheit, den Besitzern der Fabrik für das liebenswürdige Entgegenkommen, mit welchem sie mir nicht nur die verflüssigten Gase in beliebiger Menge, sondern auch den Hauptsaal des Laboratoriums für die Zeit meiner Versuche zur Verfügung gestellt haben, ebenso Hrn. Oberingenieur Dr. Lange für seine freundliche Unterstützung auch an dieser Stelle meinen verbindlichsten Dank auszusprechen.

2) L. Grunmach, l. c. p. 17, bez. p. 664.

das sich etwa auf der Oberfläche condensirende und gefrierende Wasser sofort niedersinken würde, würden sich sowohl bei der verflüssigten schwefligen Säure wie beim verflüssigten Chlor Hydrate bilden, welche in den verflüssigten Gasen unlöslich sind und sich als krystallinische Massen abscheiden, und welche zur Verzerrung der Interferenzcurven Veranlassung geben, wofern sie nicht aus dem sichtbaren Bereich des Wellensystems fortgefegt werden.

Bei der verflüssigten, auf etwa -60° C. abgekühlten schwefligen Säure ist folgender Versuch wiederholentlich ausgeführt worden, um festzustellen, ob ihre Oberflächenspannung durch Wasser, welches auf der Oberfläche sich hätte condensiren können, geändert würde: Nach Erregung der Stimmgabel, scharfer Ausbildung des Wellensystems und genauer Einstellung auf zwei beliebige, symmetrisch zur Axe gelegene Interferenzcurven wurde Wasser aus einer Pipette auf die Niveaufläche getröpfelt. Beim Auffallen der Tropfen tritt eine Gleichgewichtsstörung ein; noch bevor dieselbe aber abgelaufen, ist der Tropfen erstarrt, das Wellensystem tritt wieder deutlich hervor, ohne dass die Stimmgabel von Neuem erregt zu werden braucht, Lage und Abstand der Interferenzcurven erscheinen nahezu unverändert. Allen verflüssigten Gasen eigentümlich ist, wohl infolge ihrer grossen Beweglichkeit, das lange Andauern der einmal auf ihnen erregten Schwingungen.

Vor und nach jeder Beobachtungsreihe der Wellenlängen wurde mit dem Mikrometermikroskop die Entfernung der Stimmgabelspitzen ausgemessen und diese andererseits mittels des Horizontalcomparators auf das Genaueste bestimmt. Die Temperaturen wurden mittels eines von der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt untersuchten und beglaubigten Alkoholthermometers von Fuess vor und nach jeder Beobachtungsreihe bestimmt. Die Differenz der Temperaturen beim Beginn und Schluss einer Versuchsreihe schwankte in der Regel um etwa 2° C.; nur bei den Versuchen mit Chlor erreichte sie einmal den Maximalwert 6° C.

Ich gehe nunmehr zur Mitteilung der Beobachtungen und deren Ergebnisse über; die hier folgenden Werte der halben Wellenlänge λ sind die Mittelwerte aus je 10 Beobachtungsreihen, von denen jede Einzelbeobachtung 10 Intervalle umfasst.

1. Verflüssigte schweflige Säure.

Spitzenentfernung = 2515,7 p (Mikrometerpartes) = 2,0419 cm; halbe Wellenlänge ($\lambda/2$) = 79,772 p $\pm$ 0,138 p; mittlere Temperatur der verflüssigten schwefligen Säure = -25^0 C.; mittlere Temperatur der Stimmgabel = $+14,26^0$ C.

Aus der von der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt für die Schwingungsanzahl der Stimmgabel ermittelten Gleichung

$$n_t = 253,13 - 0,025\,(t - 19,1^0)$$

ergiebt sich

$$n_{14,26} = 253,25.$$

Aus diesen Daten berechnet sich die specifische Cohäsion a^2_{-25} der schwefligen Säure zu 44,3325. Zur Bestimmung der Oberflächenspannung

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\, a^2\, \sigma$$

ist die Kenntnis der Dichte σ der schwefligen Säure bei -25^0 C. erforderlich. Dichtebestimmungen für schweflige Säure sind ausgeführt worden von J. Pierre[1]), indessen nur bis zur Temperatur $-20,5^0$ C., für welche $\sigma = 1,4911$ beobachtet worden ist. Durch Extrapolation mit Hülfe des in der Nähe von -20^0 C. von Pierre bestimmten Ausdehnungscoefficienten 0,001496 erhält man für die Dichte bei -25^0 C.

$$\sigma_{-25} = 1,5012.$$

In neuerer Zeit haben die Herren Cailletet und Mathias[2]) die Dichte der schwefligen Säure bis zu -12^0 C. untersucht. Extrapolirt man unter Zugrundelegung der von ihnen mitgeteilten Curve, welche den Zusammenhang zwischen Dichte und Temperatur darstellt, und welche von -5^0 bis -12^0 C. nahezu geradlinig verläuft, so erhält man als Dichte bei -25^0 C. fast übereinstimmend mit dem aus den Beobachtungen von Pierre extrapolirten Werte

$$\sigma_{-25} = 1,502.$$

Nimmt man deshalb für σ_{-25} den Mittelwert 1,5016 an, so ergiebt sich für die *Capillarconstante der schwefligen Säure* bei -25^0 C. der Wert

$$\alpha_{-25} = \tfrac{1}{2}\, a^2\, \sigma_{-25} = 33,285 \text{ Dynen/cm}.$$

1) J. J. Pierre, Ann. de chim. et phys. (3) **21.** p. 336. 1847.
2) L. Cailletet u. E. Mathias, Compt. rend. **104.** p. 1563. 1887.

2. Pictet'sche Flüssigkeit.

a) Als chemisch rein bezogen von der Gesellschaft für flüssige Gase (Raoul Pictet).

Spitzenentfernung = 2349,6 p = 2,0419 cm; halbe Wellenlänge ($\lambda/2$) = 75,776 p $\pm$ 0,131 p; mittlere Temperatur der Flüssigkeit = $-$ 33° C., mittlere Temperatur der Stimmgabel = + 13° C.

$$n_{13} = 253,28.$$

Hieraus ergiebt sich die specifische Cohäsion der Pictet'schen Flüssigkeit

$$a^2_{-33} = 46,628.$$

Da Dichtebestimmungen der Pictet'schen Flüssigkeit nicht bekannt gegeben sind — solche sollen zwar in umfangreicher Weise im Pictet'schen Laboratorium ausgeführt worden sein, das Beobachtungsmaterial ist aber leider bei einem Brande verloren gegangen —, so habe ich sie selbst mit einer guten Mohr'schen Waage ausgeführt und $\sigma_{-33} = 1,504$ gefunden. Bei Annahme dieses Wertes berechnet sich die *Capillarconstante der Pictet'schen Flüssigkeit bei* $-$ 33° C. zu

$$\alpha_{-33} = 35,065 \text{ Dynen/cm}.$$

b) Eine zweite Bestimmungsreihe wurde ausgeführt mit vor etwa 15 Jahren von Hrn. Pictet selbst dargestellter Pictet'scher Flüssigkeit, welche mir Hr. Pictet damals für andere Untersuchungen freundlichst überlassen hatte, und welche seitdem in einer zugeschmolzenen Glasröhre aufbewahrt worden war. Für diese ergab sich die specifische Cohäsion bei $-$ 60° C.

$$a^2_{-60} = 48,964,$$

die Dichte bei $-$ 60° C.

$$\sigma_{-60} = 1,564$$

und demgemäss die *Capillarconstante bei* $-$ 60° C.

$$\alpha_{-60} = 38,209 \text{ Dynen/cm}.$$

3. Verflüssigtes Ammoniak

(welches höchstens 0,1 Proc. Verunreinigung enthält, aber nicht durch Wasser, sondern vielleicht durch Pyridin).

Spitzenentfernung = 2271,1 p = 2,0419 cm; halbe Wellenlänge ($\lambda/2$) = 101,685 p $\pm$ 0,481 p; mittlere Temperatur des ver-

flüssigten Ammoniaks = − 29° C., mittlere Temperatur der Stimmgabel = + 22,35° C.

$$n_{22,35} = 253,05.$$

Hieraus berechnet sich die specifische Cohäsion

$$a^2_{-29} = 124,638;$$

die Dichte des verflüssigten Ammoniaks beträgt bei − 29° C.

$$\sigma_{-29} = 0,6703.^{1)}$$

Demgemäss ergiebt sich die *Capillarconstante des verflüssigten Ammoniaks* bei − 29° C.

$$\alpha_{-29} = 41,778 \text{ Dynen/cm.}$$

4. Verflüssigtes Chlor.

Spitzenentfernung = 2199 p = 2,0419 cm; halbe Wellenlänge $(\lambda/2) = 67,94 \text{ p} \pm 0,497 \text{ p}$; mittlere Temperatur des verflüssigten Chlors = − 72° C., mittlere Temperatur der Stimmgabel = + 18,44° C.

$$n_{18,44} = 253,15.$$

Hieraus berechnet sich die specifische Cohäsion bei − 72° C.

$$a^2_{-72} = 40,973;$$

die Dichte des verflüssigten Chlors bei − 72° C. beträgt nach den Beobachtungen von Hrn. Knietsch[2])

$$\sigma_{-72} = 1,6452.$$

Demnach ergiebt sich die *Capillarconstante des verflüssigten Chlors* bei − 72° C.

$$\alpha_{-72} = 33,649 \text{ Dynen/cm.}$$

Die Bestimmungen der Capillarconstanten haben eine erhöhte wissenschaftliche Bedeutung gewonnen, seitdem Hr. R. v. Eötvös[3]), wie bereits oben angedeutet wurde, angeregt durch die van der Waals'schen Untersuchungen eine rationelle Begründung des Zusammenhanges zwischen Oberflächenspannung und Molecularvolumen gegeben und aus seinen Beobachtungen, wie aus denjenigen R. Schiff's, für eine grosse Reihe einfach zusammengesetzter Flüssigkeiten die Beziehung

1) A. Lange, Zeitschr. f. d. gesamte Kälteindustrie **5.** p. 20. 1898.
2) R. Knietsch, Liebig's Ann. **259.** p. 100. 1890.
3) R. v. Eötvös, l. c.

abgeleitet hat, dass der Differentialquotient der molecularen Oberflächenenergie nach der Temperatur, $\partial (\alpha v^{2/3}) / \partial t$, innerhalb weiter Grenzen von der Temperatur unabhängig ist und den constanten Wert 2,27 hat, und dass die moleculare Oberflächenenergie selbst

$$\alpha v^{2/3} = 2{,}27 (\theta - t)$$

ist, wo θ die kritische und t die Beobachtungstemperatur bedeutet. Diese Gleichung, welche durch die umfangreichen Untersuchungen der Herren Ramsay und Shields[1]) im wesentlichen bestätigt und nur wenig modificirt worden ist, und welche eine vollkommene Analogie für die Zustandsgleichung idealer Gase bildet, gewährt die Möglichkeit, die Moleculargrösse unvermischter Flüssigkeiten zu bestimmen, wenn deren Oberflächenspannung bekannt ist. Es ergiebt sich nämlich aus ihr für das Moleculargewicht M die Gleichung

$$M = \sigma \sqrt{\left(\frac{2{,}27 (\theta - t)}{\alpha}\right)^3}.$$

Die Richtigkeit dieser Gleichung wird durch meine Beobachtungen an verflüssigter schwefliger Säure und an verflüssigtem Ammoniak bestätigt. Denn setzt man in dieselbe als kritische Temperaturen für schweflige Säure, bez. für Ammoniak die Werte 157° C.[2]), bez. 130,5° C.[3]), als Oberflächenspannungen bei den Beobachtungstemperaturen −25° C., bez. −29° C. die oben gefundenen Werte 33,285, bez. 41,778 und endlich für die Dichten bei diesen Temperaturen die Werte 1,5016, bez. 0,6703 ein, so erhält man als Werte für das Moleculargewicht der verflüssigten schwefligen Säure

$$M_{SO_2} = 1{,}5016 \sqrt{\left(\frac{2{,}27 (157 + 25)}{33{,}285}\right)^3} = 65{,}66$$

---

1) W. Ramsay u. J. Shields, Zeitschr. f. physik. Chem. **12.** p. 433. 1893.

2) Als Mittelwert aus den Beobachtungen der Herren Sajotschewski (Beibl. **3.** p. 741. 1879), Ladenburg (Ber. d. deutsch. chem. Gesellsch. **11.** p. 818. 1878), Drion (Ann. chim. phys. (3) **56.** p. 221. 1859), Clark Phil. Mag. (5) **10.** p. 149. 1880), Schuck (Beibl. **6.** p. 86. 1882), Cailletet und Mathias (Compt. rend. **104.** p. 1563. 1887).

3) Als Mittelwert aus den Beobachtungen der Herren Dewar (Phil. Mag. (5) **18.** p. 210. 1884) und Vincent u. Chappuis (Journ. de phys. (2) **5.** p. 58. 1886).

und des verflüssigten Ammoniaks

$$M_{H_3N} = 0,6703 \sqrt{\left(\frac{2,27\,(130,5 + 29)}{41,778}\right)^3} = 17,10,$$

in guter Uebereinstimmung mit ihren Werten für den gasförmigen Zustand, nämlich 64,06, bez. 17,07.

Dagegen wird die Gleichung durch meine Beobachtungen am verflüssigten Chlor nicht erfüllt. Denn setzt man in dieselbe für die kritische Temperatur als Mittelwert aus den Beobachtungen der Herren Dewar[1]), Ladenburg[2]), Knietsch[3]) den Wert 145° C., für die Oberflächenspannung den bei —72° C. gefundenen Wert 33,649 und für die Dichte den Wert 1,6452 ein, so erhält man als Moleculargewicht für das verflüssigte Chlor den Wert

$$M_{Cl} = 1,6452 \sqrt{\left(\frac{2,27\,(145 + 72)}{33,649}\right)^3} = 92,14,$$

während er für das gasförmige 70,9 ist. Das verflüssigte Chlor scheint sich also nicht wie eine normale, sondern wie eine associirende Flüssigkeit zu verhalten, die in flüssigem Zustand ein höheres Moleculargewicht hat wie in gasförmigem.

Der Einwand, dass diese Abweichung vielleicht eine Folge der Condensation des in der Luft enthaltenen Wasserdampfes sei, ist nicht stichhaltig, denn es ist bereits (p. 371) hervorgehoben worden, dass die Folge der Condensation die Bildung eines im verflüssigten Chlor unlöslichen Chlorhydrates sein würde, welches sich in krystallinischen Massen ausscheidet. Gesetzt aber auch, das verflüssigte Chlor werde an seiner Oberfläche durch daselbst sich condensirendes Wasser verunreinigt, dann würde seine Oberflächenspannung α offenbar dadurch vergrössert werden, und sein Moleculargewicht müsste, da in der Formel α unter dem Wurzelzeichen im Nenner steht, kleiner ausfallen als das Moleculargewicht im gasförmigen Zustande, während das Gegenteil beobachtet wird. Des weiteren müsste das Moleculargewicht des verflüssigten Chlors mit steigender Temperatur zunehmen, was gleichfalls der Beobachtung nicht entspricht. Ich habe nämlich am verflüssigten

1) J. Dewar, Phil. Mag. (5) **18.** p. 210. 1884.
2) A. Ladenburg, Ber. d. deutsch. chem. Gesellsch. **11.** p. 818. 1878.
3) R. Knietsch, l. c.

Chlor auch bei höheren Temperaturen, nämlich in der Nähe von -60^{0} und sogar von -50^{0} C., Capillaritätsbestimmungen ausgeführt, aus denen hervorzugehen scheint, dass sein Moleculargewicht mit steigender Temperatur abnimmt und sich dem des gasförmigen immer mehr nähert. Indessen waren die Beobachtungen infolge der starken Chlorgasentwickelung für Augen und Atmungsorgane und auch für die Stimmgabel zu angreifend (vom verflüssigten Chlor wurden die Stimmgabelspitzen gar nicht angegriffen), als dass ich sie genügend lange hintereinander hätte fortsetzen können, um sichere Beobachtungswerte zu erlangen. Die Versuche werden bei Anwendung geeigneter Schutzvorrichtungen innerhalb weiterer Temperaturgrenzen fortgeführt und auf andere condensirbare Gase ausgedehnt werden.

(Eingegangen 18. December 1900.)

11. *Bewegung eines elektrischen Teilchens in einem Felde elektrostatischer und elektromagnetischer Kraft;* von *Eduard Riecke.*

(Im Auszuge mitgeteilt in der Physikalischen Zeitschrift.)

Im Jahre 1881 habe ich in den „Göttinger Nachrichten“ und in „Wiedemann's Annalen“ eine Untersuchung über die Bewegung eines elektrischen Teilchens in einem homogenen magnetischen Felde veröffentlicht.[1] Die gefundenen Gesetze haben später durch die an die Erscheinung der Kathodenstrahlen sich knüpfenden Maassbestimmungen erhöhte Bedeutung gewonnen. Mit Rücksicht auf verschiedene Erscheinungen, bei denen elektrische und magnetische Wirkungen im Spiele sind, schien es mir nützlich, die frühere Untersuchung auf den Fall auszudehnen, dass ein homogenes elektrisches Feld mit einem homogenen magnetischen sich überlagert.

1. Die ponderable Masse des betrachteten elektrischen Teilchens sei μ, seine elektrische Ladung ε; seine Coordinaten in einem rechtwinkligen System x, y, z. Das elektrostatische Potential sei gegeben durch $V = -\mathsf{A}x - \mathsf{B}y - \Gamma z$; die ganze Intensität des elektrischen Feldes sei F; das magnetische Potential sei $P = -Ax - By - Cz$; die ganze Intensität des magnetischen Feldes sei $\mathfrak{H}$, v sei die Lichtgeschwindigkeit. Die Bewegungsgleichungen sind:

$$(1)\quad \begin{cases} \mu \dfrac{d^2 x}{d t^2} = -\varepsilon \dfrac{\partial V}{\partial x} + \dfrac{\varepsilon}{v}\left\{\dfrac{\partial P}{\partial y}\cdot\dfrac{d z}{d t} - \dfrac{\partial P}{\partial z}\cdot\dfrac{d y}{d t}\right\}, \\ \mu \dfrac{d^2 y}{d t^2} = -\varepsilon \dfrac{\partial V}{\partial y} + \dfrac{\varepsilon}{v}\left\{\dfrac{\partial P}{\partial z}\cdot\dfrac{d x}{d t} - \dfrac{\partial P}{\partial x}\cdot\dfrac{d z}{d t}\right\}, \\ \mu \dfrac{d^2 z}{d t^2} = -\varepsilon \dfrac{\partial V}{\partial z} + \dfrac{\varepsilon}{v}\left\{\dfrac{\partial P}{\partial x}\cdot\dfrac{d y}{d t} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\cdot\dfrac{d x}{d t}\right\}. \end{cases}$$

---

1) E. Riecke, Göttinger Nachr., 2. Febr. 1881; Wied. Ann. 13. p. 192. 1881.

2. Das Integral der lebendigen Kraft ist gegeben durch:

$$\frac{\mu}{2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\} = -\varepsilon V + \text{const.}$$

Wir bezeichnen mit ds das Element der von dem Teilchen ε durchlaufenen Bahn, dann ist

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2.$$

Setzen wir ferner die Bahngeschwindigkeit des Teilchens

$$\frac{ds}{dt}=\sigma,$$

so lässt sich das Integral der Gleichung (1) in der Form schreiben:

$$\sigma^2=\sigma_0^2+\frac{2\varepsilon}{\mu}(V_0-V), \tag{2}$$

wo σ_0 der Wert der Bahngeschwindigkeit, welcher dem Potential V_0 entspricht. So oft die Bahn des Teilchens dieselbe Potentialfläche schneidet, ist auch seine Geschwindigkeit wieder dieselbe.

3. Führen wir an Stelle der Potentiale V und P die Componenten der elektrostatischen und der magnetischen Kräfte ein, so ergeben sich die Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned}
\mu\frac{d^2x}{dt^2}&=\varepsilon\mathsf{A}-\frac{\varepsilon}{v}\left\{B\frac{dz}{dt}-C\frac{dy}{dt}\right\},\\
\mu\frac{d^2y}{dt^2}&=\varepsilon\mathsf{B}-\frac{\varepsilon}{v}\left\{C\frac{dx}{dt}-A\frac{dz}{dt}\right\},\\
\mu\frac{d^2z}{dt^2}&=\varepsilon\Gamma-\frac{\varepsilon}{v}\left\{A\frac{dy}{dt}-B\frac{dx}{dt}\right\}.
\end{aligned}\right. \tag{3}$$

4. Multipliciren wir diese Gleichungen der Reihe nach mit A, B, C, so ergiebt sich durch Addition:

$$\mu\left\{A\frac{d^2x}{dt^2}+B\frac{d^2y}{dt^2}+C\frac{d^2z}{dt^2}\right\}=\varepsilon(A\mathsf{A}+B\mathsf{B}+C\Gamma)$$

oder

$$\mu\frac{d^2}{dt^2}\{Ax+By+Cz\}=\varepsilon(A\mathsf{A}+B\mathsf{B}+C\Gamma). \tag{4}$$

Durch den Anfangspunkt des Coordinatensystems ziehen wir die Richtung der magnetischen Kraftlinien $\mathfrak{H}$, und den Radiusvector r nach dem Teilchen ε; *wir legen durch dieses Teilchen eine Ebene senkrecht zu der Richtung* $\mathfrak{H}$. Sie schneidet

diese in einem *Punkt h*, dessen Abstand vom Anfangspunkt des Coordinatensystems durch denselben Buchstaben h bezeichnet werden soll. Dann ist

$$h = r\left\{\frac{A}{\mathfrak{H}}\cdot\frac{x}{r} + \frac{B}{\mathfrak{H}}\cdot\frac{y}{r} + \frac{C}{\mathfrak{H}}\cdot\frac{z}{r}\right\},$$

$$h\,.\,\mathfrak{H} = Ax + By + Cz. \tag{5}$$

Substituiren wir diesen Wert in Gleichung (4), so ergiebt sich:

$$\frac{d^2 h}{d t^2} = \frac{\varepsilon}{\mu}\,\mathfrak{F}\cos(\mathfrak{H},\mathfrak{F}). \tag{6}$$

Der Punkt h rückt somit auf der den magnetischen Kraftlinien parallelen Axe $\mathfrak{H}$ *mit gleichförmiger Beschleunigung fort.*

5. Multipliciren wir die Gleichungen (3) der Reihe nach mit A, B, Γ, so ergiebt sich durch Addition:

$$\mu\left\{\mathsf{A}\frac{d^2 x}{d t^2} + \mathsf{B}\frac{d^2 y}{d t^2} + \Gamma\frac{d^2 z}{d t^2}\right\} = \varepsilon\,\mathfrak{F}^2 + \frac{\varepsilon}{v}\begin{vmatrix} A & B & C \\ \mathsf{A} & \mathsf{B} & \Gamma \\ \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} & \frac{dz}{dt}\end{vmatrix},$$

oder:

$$\mu\frac{d^2}{d t^2}\{\mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \Gamma z\} = \varepsilon\,\mathfrak{F}^2 + \frac{\varepsilon}{v}\cdot\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} x & y & z \\ A & B & C \\ \mathsf{A} & \mathsf{B} & \Gamma\end{vmatrix}. \tag{7}$$

Die auf der linken Seite dieser Gleichung stehende Summe unterliegt einer ganz ähnlichen Interpretation, wie der analoge Term des vorhergehenden Paragraphen. Durch den Anfangspunkt des Coordinatensystems ziehen wir die Richtung $\mathfrak{F}$ der elektrostatischen Kraftlinien. *Durch die augenblickliche Lage des Teilchens* ε *legen wir eine Ebene senkrecht zu der Richtung* $\mathfrak{F}$; sie schneide diese letztere in einem *Punkt f*, dessen Abstand von dem Anfangspunkt des Coordinatensystems gleich f sei. Dann ist:

$$f\,\mathfrak{F} = \mathsf{A}x + \mathsf{B}y + \Gamma z. \tag{8}$$

Wir erhalten daher die Gleichung:

$$\mu\,\mathfrak{F}\frac{d^2 f}{d t^2} = \varepsilon\,\mathfrak{F}^2 + \frac{\varepsilon}{v}\cdot\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} x & y & z \\ A & B & C \\ \mathsf{A} & \mathsf{B} & \Gamma\end{vmatrix}. \tag{8'}$$

6. Von dem Anfangspunkt des Coordinatensystems aus ziehen wir eine *Linie N so, dass sie senkrecht steht auf $\mathfrak{H}$ und auf $\mathfrak{F}$*, und so, dass die Reihenfolge N, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{F}$ gleichsinnig ist mit der Reihenfolge der Axen x, y, z. Die Richtungscosinusse von N seien ν_1, ν_2, ν_3; dann ist:

$$(9)\qquad \begin{cases} \varrho\,\nu_1 = B\,\Gamma - C\,\mathrm{B}, \\ \varrho\,\nu_2 = C\,\mathrm{A} = A\,\Gamma, \\ \varrho\,\nu_3 = A\,\mathrm{B} = B\,\mathrm{A}, \end{cases}$$

wo:

$$(9')\qquad \varrho = \mathfrak{H}\,\mathfrak{F}\sin(\mathfrak{H}, \mathfrak{F}).$$

Multipliciren wir die Gleichungen (3) der Reihe nach mit $\varrho\,\nu_1$, $\varrho\,\nu_2$, $\varrho\,\nu_3$, so ergiebt sich durch Addition:

$$\frac{v}{\varepsilon}\cdot\mu\,\varrho\,\frac{d^2}{d\,t^2}(\nu_1\,x + \nu_2\,y + \nu_3\,z) = -\left(B\frac{d\,z}{d\,t} - C\frac{d\,y}{d\,t}\right)(B\,\Gamma - C\,\mathrm{B}),$$
$$-\left(C\frac{d\,x}{d\,t} - A\frac{d\,z}{d\,t}\right)(C\,\mathrm{A} - A\,\Gamma),$$
$$-\left(A\frac{d\,y}{d\,t} - B\frac{d\,x}{d\,t}\right)(A\,\mathrm{B} - B\,\mathrm{A}).$$

Wir legen durch die jeweilige Lage des Teilchens ε eine Ebene senkrecht zu der Linie N; ihr Schnittpunkt mit N sei n, der Abstand des Punktes n vom Anfangspunkt des Coordinatensystems sei n; dann ist:

$$(10)\qquad n = \nu_1\,x + \nu_2\,y + \nu_3\,z$$

und wir erhalten die Gleichung:

$$(10')\qquad \mu\sin(\mathfrak{H}, \mathfrak{F})\frac{d^2 n}{d\,t^2} = -\frac{\varepsilon\,\mathfrak{H}}{v}\frac{d\,f}{d\,t} + \frac{\varepsilon\,\mathfrak{H}}{v}\cos(\mathfrak{H}, \mathfrak{F})\frac{d\,h}{d\,t}.$$

7. Setzen wir in Gleichung (10) für ν_1, ν_2, ν_3 ihre Werte aus Gleichung (9) und (9'), so ergiebt sich:

$$\mathfrak{H}\,\mathfrak{F}\sin(\mathfrak{H}, \mathfrak{F})\,.\,n = \begin{vmatrix} x & y & z \\ A & B & C \\ \mathrm{A} & \mathrm{B} & \Gamma \end{vmatrix}.$$

Substituiren wir diesen Wert der Determinante in Gleichung (8'), so ergiebt sich:

$$(11)\qquad \mu\frac{d^2 f}{d\,t^2} = \varepsilon\,\mathfrak{F} + \frac{\varepsilon}{v}\cdot\mathfrak{H}\sin(\mathfrak{H}, \mathfrak{F})\frac{d\,n}{d\,t}.$$

D[...]entiiren wir die Gleichung (10') nach (2), so erhalten [...]r:

$$\mu \sin(\mathfrak{H}, \mathfrak{F}) \frac{d^3 n}{d t^3} = - \frac{\varepsilon \mathfrak{H}}{v} \frac{d^2 f}{d t^2} + \frac{\varepsilon \mathfrak{H}}{v} \cos(\mathfrak{H}, \mathfrak{F}) \frac{d^2 h}{d t^2}.$$

Benutzen wir hier den Wert von $d^2 h / d t^2$ aus Gleichung (6), so wird:

$$\mu \sin(\mathfrak{H}, \mathfrak{F}) \frac{d^3 n}{d t^3} = \frac{\varepsilon^2}{v \mu} \mathfrak{H} \mathfrak{F} \cos^2(\mathfrak{H}, \mathfrak{F}) - \frac{\varepsilon}{v} \mathfrak{H} \frac{d^2 f}{d t^2}.$$

Setzen wir für $d^2 f / d t^2$ den aus Gleichung (11) folgenden Wert, so ergiebt sich die folgende Differentialgleichung zur Bestimmung von n:

$$(12) \qquad \frac{d^3 n}{d t^3} + \frac{\varepsilon^2}{v^2 \mu^2} \cdot \mathfrak{H}^2 \frac{d n}{d t} = - \frac{\varepsilon^2}{v \mu^2} \mathfrak{H} \mathfrak{F} \sin(\mathfrak{H}, \mathfrak{F}).$$

8. Aus Gleichung (6) ergiebt sich:

$$\frac{d h}{d t} = \frac{\varepsilon}{\mu} \mathfrak{F} \cos(\mathfrak{H}, \mathfrak{F}) t + c_h^0,$$

wo c_h^0 den Anfangswert der Geschwindigkeit $d h / d t$ bezeichnet. Substituiren wir diesen Wert in Gleichung (10'), so wird:

$$\mu \sin(\mathfrak{H}, \mathfrak{F}) \frac{d^2 n}{d t^2} = - \frac{\varepsilon \mathfrak{H}}{v} \cdot \frac{d f}{d t} + \frac{\varepsilon^2}{v \mu} \mathfrak{H} \mathfrak{F} \cos^2(\mathfrak{H}, \mathfrak{F}) t$$
$$+ \frac{\varepsilon c_h^0}{v} \mathfrak{H} \cos(\mathfrak{H}, \mathfrak{F}).$$

Differentiiren wir nun die Gleichung (11) nach (7), so wird:

$$\mu \frac{d^3 f}{d t^3} = \frac{\varepsilon}{v} \mathfrak{H} \sin(\mathfrak{H}, \mathfrak{F}) \frac{d^2 n}{d t^2},$$

und mit Rücksicht auf die vorhergehende Gleichung:

$$(13) \quad \frac{d^3 f}{d t^3} + \frac{\varepsilon^2}{v^2 \mu^2} \mathfrak{H}^2 \frac{d f}{d t} = \frac{\varepsilon^2}{v^2 \mu^2} \mathfrak{H}^2 \cos(\mathfrak{H}, \mathfrak{F}) \left\{ \frac{\varepsilon}{\mu} \mathfrak{F} \cos(\mathfrak{H}, \mathfrak{F}) t + c_h^0 \right\}$$

die Differentialgleichung zur Bestimmung von f.

9. Die Integration von Gleichung (12) giebt:

$$(14) \quad n = - \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{H}} \sin(\mathfrak{H}, \mathfrak{F}) v t + a_1 \sin \frac{\varepsilon \mathfrak{H}}{v \mu} t + b_1 \cos \frac{\varepsilon \mathfrak{H}}{v \mu} t + \gamma_1.$$

wo a_1, b_1 und γ Integrationsconstanten sind.

Gleichung (13) giebt:

$$(15)\quad \begin{cases} f = \dfrac{\varepsilon\,\mathfrak{F}\cos^2(\mathfrak{H},\mathfrak{F})}{2\,\mu}\left\{t^2 - \dfrac{2\,v^2\,\mu^2}{\varepsilon^2\,\mathfrak{H}^2}\right\} + c_h^0\cos(\mathfrak{H},\mathfrak{F})\,t \\ \quad + a_2\sin\dfrac{\varepsilon\,\mathfrak{H}}{v\,\mu}\,t + b_2\cos\dfrac{\varepsilon\,\mathfrak{H}}{v\,\mu}\,t + \gamma_2\,. \end{cases}$$

Damit Gleichung (11) erfüllt wird, muss

$$a_2 = b_1\sin(\mathfrak{H},\mathfrak{F}) \quad \text{und} \quad b_2 = -\,a_1\sin(\mathfrak{H},\mathfrak{F})$$

sein.

Setzt man nun

$$a_1 = d\sin\delta\,, \qquad b_1 = d\cos\delta\,,$$

so wird

$$(16)\quad \begin{cases} n = -\,\dfrac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{H}}\sin(\mathfrak{F},\mathfrak{H})\,v\,t + d\cos\left(\dfrac{\varepsilon\,\mathfrak{H}}{v\,\mu}\,t - \delta\right) + \gamma_1\,, \\ f = \dfrac{\varepsilon\,\mathfrak{F}\cos^2(\mathfrak{H},\mathfrak{F})}{2\,\mu}\left\{t^2 - \dfrac{2\,v^2\,\mu^2}{\varepsilon^2\,\mathfrak{H}^2}\right\} + c_h^0\cos(\mathfrak{H},\mathfrak{F})\,t \\ \quad + d\sin(\mathfrak{H},\mathfrak{F})\sin\left(\dfrac{\varepsilon\,\mathfrak{H}}{v\,\mu}\,t - \delta\right) + \gamma_2\,. \end{cases}$$

Die Richtungen $\mathfrak{F}$ und N stehen aufeinander senkrecht; wir können also n und f als rechtwinklige Coordinaten behandeln in einem ebenen System, dessen Axen durch $\mathfrak{F}$ und N gegeben sind. Nun ist für $t = 0$:

$$f_0 = -\,\frac{v^2\,\mu}{\varepsilon}\,\frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{H}^2}\cos^2(\mathfrak{H},\mathfrak{F}) - d\sin(\mathfrak{H},\mathfrak{F})\sin\delta + \gamma_2\,,$$

$$n_0 = d\cos\delta + \gamma_1\,.$$

Machen wir durch Parallelverschiebung des Systems:

$$f_0 = -\,d\sin(\mathfrak{H},\mathfrak{F})\sin\delta\,,$$

$$n_0 = -\,d\cos\delta\,,$$

so wird:

$$\gamma_2 = \frac{v^2\,\mu}{\varepsilon}\,\frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{H}^2}\cos^2(\mathfrak{H},\mathfrak{F})\,, \quad \gamma_1 = 0,$$

und damit:

$$(16')\quad \begin{cases} f = \dfrac{\varepsilon\,\mathfrak{F}\cos^2(\mathfrak{H},\mathfrak{F})}{2\,\mu}\,t^2 + c_h^0\cos(\mathfrak{H},\mathfrak{F})\,t \\ \qquad\qquad + d\sin(\mathfrak{H},\mathfrak{F})\sin\left(\dfrac{\varepsilon\,\mathfrak{H}}{v\,\mu}\,t - \delta\right), \\ n = -\,\dfrac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{H}}\sin(\mathfrak{F},\mathfrak{H})\,v\,t + d\cos\left(\dfrac{\varepsilon\,\mathfrak{H}}{v\,\mu}\,t - \delta\right). \end{cases}$$

10. Ueber den *Charakter der durch die vorhergehenden Gleichungen bestimmten Curve* wird man sich am einfachsten

orientiren, wenn man f und n in je zwei Teile zerlegt. Wir setzen:

$$(17)\quad \begin{cases} f_1 = \dfrac{\varepsilon\,\mathfrak{F}\cos^2(\mathfrak{H},\mathfrak{F})}{2\mu}\,t^2 + c_h^0\cos(\mathfrak{H},\mathfrak{F})\,t, \\ n_1 = -\dfrac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{H}}\cdot\sin(\mathfrak{F},\mathfrak{H})\,v\,t; \end{cases}$$

$$(18)\quad \begin{cases} f_2 = d\sin(\mathfrak{H},\mathfrak{F})\sin\left(\dfrac{\varepsilon\,\mathfrak{H}}{v\,\mu}\,t-\delta\right), \\ n_2 = d\cos\left(\dfrac{\varepsilon\,\mathfrak{H}}{v\,\mu}\,t-\delta\right), \end{cases}$$

sodass:

$$f = f_1 + f_2, \qquad n = n_1 + n_2.$$

Bezeichnen wir den Punkt der $\mathfrak{F}N$-Ebene, welcher durch die Coordinaten f und n bestimmt ist, mit Π, so kann Π in folgender Weise construirt werden. Wir setzen erst die Coordinaten f_1 und n_1 zusammen und erhalten so den *Punkt P*; dann ziehen wir von P aus die Coordinaten f_2 und n_2, der aus ihrer Zusammensetzung sich ergebende Punkt ist Π.

Aus den Gleichungen (17) folgt für die von dem Punkt P beschriebene Curve die Gleichung:

$$f_1 = \frac{\varepsilon}{2\mu v^2}\,\frac{\mathfrak{H}^2}{\mathfrak{F}}\cot g^2(\mathfrak{H},\mathfrak{F})\,n_1^2 - \frac{c_h^0}{v}\,\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{F}}\cot g(\mathfrak{H},\mathfrak{F})\,n_1.$$

Die Curve ist eine *Parabel.* Die Coordinaten ihres *Scheitelpunktes* sind:

$$f_1^0 = -\frac{c_h^{0\,2}}{2}\,\frac{\mu}{\varepsilon\,\mathfrak{F}}, \qquad n_1^0 = \frac{c_h^0\,v\,\mu}{\varepsilon\,\mathfrak{H}}\,\mathrm{tg}(\mathfrak{H},\mathfrak{F}).$$

Die *Scheiteltangente* der Parabel ist parallel der Axe N. Die Parabel geht durch den Anfangspunkt des Coordinatensystems $\mathfrak{F}$, N, und zwar liegt der in Betracht kommende Zweig derselben in dem Winkel zwischen der positiven $\mathfrak{F}$-Axe und der negativen N-Axe.

Wenn der Winkel $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{F}$ gleich Null ist, d. h., wenn die magnetischen Kraftlinien mit den elektrostatischen zusammenfallen, so degenerirt die Parabel in die Axe $\mathfrak{F}$ oder $\mathfrak{H}$. Wenn der Winkel $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{F}$ gleich einem rechten ist, d. h., wenn die magnetischen Kraftlinien auf den elektrostatischen senkrecht stehen, so fällt die Parabel zusammen mit der Axe N. Von dem Nullpunkt des Systems $\mathfrak{F}$, N an gerechnet bewegt sich der Punkt P auf der negativen N-Axe.

11. Aus den Gleichungen (18) folgt:

$$\frac{f_1^2}{d^2 \sin^2(\mathfrak{H},\mathfrak{F})} + \frac{n_1^2}{d^2} = 1. \tag{20}$$

Haben wir für irgend eine Zeit die Lage von P auf der von ihm beschriebenen Parabel bestimmt, *so liegt Π auf einer Ellipse, deren Centrum P ist*, deren grosse Axe d parallel ist mit N, deren kleine Axe $d \sin(\mathfrak{H},\mathfrak{F})$ parallel ist mit $\mathfrak{F}$.

Man kann diese Ellipse in bekannter Weise construiren mit Hülfe zweier Kreise, die um P mit den Halbmessern d und $d \sin(\mathfrak{H},\mathfrak{F})$ beschrieben werden. Lässt man den bei der Construction benutzten Radiusvector in der Secunde $s\,\mathfrak{H}/2\pi v \mu$ Umläufe machen, so erhält man ein vollständiges Bild von der elliptischen Bewegung des Punktes Π. Bezeichnen wir die *Umlaufszeit* mit T, so ist:

$$T = \frac{2\pi v \mu}{s\,\mathfrak{H}}.$$

Um die wirkliche Bewegung von Π in der Ebene $\mathfrak{F}N$ zu finden, muss man den Mittelpunkt P der Ellipse in einer der Umlaufsbewegung entsprechenden Weise auf seiner Parabel weiterrücken lassen. Die Curve, welche auf diese Weise entsteht, hat einen cykloidenartigen Charakter.

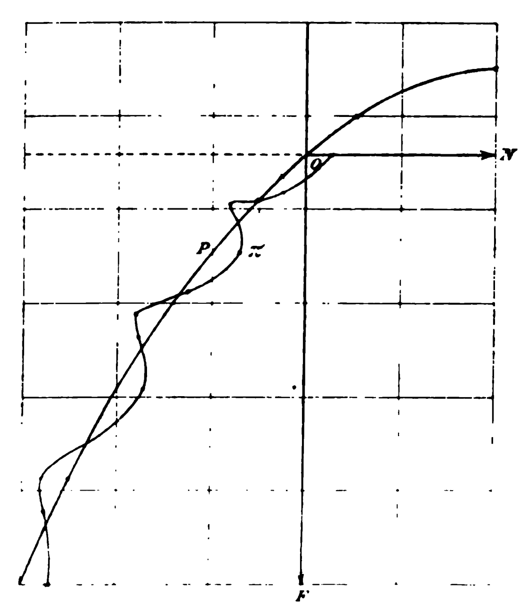
So oft der Punkt Π in seiner Ellipse einen Umlauf vollzieht, verschiebt sich der Punkt n, die Projection von Π auf die Axe N um die Strecke

$$-\frac{2\pi v^2 \mu}{s\,\mathfrak{H}} \cdot \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{H}} \sin(\mathfrak{H},\mathfrak{F}).$$

Auf Grund dieser Bemerkung kann man von der durch den Punkt Π beschriebenen Curve das folgende Bild (vgl. Figur, p. 386) entwerfen.

Um die *räumliche Bewegung des elektrischen Teilchens* s zu erhalten, muss man gleichzeitig mit dem Punkte Π der Ebene $\mathfrak{F}N$ den früher eingeführten Punkt h in der Axe $\mathfrak{H}$ sich bewegen lassen. Mit Π verbindet man ein auf der Ebene $\mathfrak{F}N$ senkrecht stehendes Lot, mit h eine zu der Axe $\mathfrak{H}$ senkrechte Ebene; die jeweilige Lage des Teilchens s wird dann durch den Schnitt der Ebene mit dem Lote bestimmt. Die so erzeugte Curve hat einen schraubenartigen Verlauf.

12. *Specielle Fälle.* Wenn *der Winkel* $\mathfrak{F}, \mathfrak{H}$ *ein rechter* ist, so geht die Parabel über in die Axe N. Zugleich werden die Axen der von dem Punkt Π beschriebenen Ellipse einander gleich, die Ellipse verwandelt sich in einen Kreis. Der Punkt Π beschreibt in diesem Falle eine gewöhnliche Cykloide, deren Axe durch den negativen Ast der Axe N gegeben ist. Die Beschleunigung in der Richtung der Axe $\mathfrak{H}$ ist Null. Wenn also auch die Anfangsgeschwindigkeit des Teilchens c_h^0 Null



ist, so beschränkt sich die ganze Bewegung auf die Ebene $\mathfrak{F} N$: man kommt dann zu dem folgenden eigentümlichen Resultat. Wenn die elektrischen und die magnetischen Kraftlinien zu einander senkrecht stehen, und das Teilchen ε keine Anfangsgeschwindigkeit in der Richtung der Axe $\mathfrak{H}$ besitzt, so bewegt es sich in einer *Cykloide, deren Axe senkrecht steht zu den magnetischen und zu den elektrischen Kraftlinien*, also im wesentlichen in einer zu den beiden Kräften *transversalen* Richtung.

Wenn die Richtungen der magnetischen und der elektrostatischen Kraftlinien zusammenfallen, so ist es zweckmässiger, auf die ursprünglichen Gleichungen zurückzugehen. Wenn

man die Richtung der Kraftlinien mit der Richtung der x-Axe zusammenfallen lässt, so ergeben sich die Gleichungen:

$$\mu \frac{d^2 x}{d t^2} = \varepsilon \mathfrak{F}, \quad \mu \frac{d^2 y}{d t^2} = \frac{\varepsilon}{v} \mathfrak{H} \frac{d z}{d t}, \quad \mu \frac{d^2 z}{d t^2} = -\frac{\varepsilon}{v} \mathfrak{H} \frac{d y}{d t}.$$

Die Bewegung setzt sich zusammen aus einer gleichförmig beschleunigten Bewegung in der Richtung der x-Axe und aus einer Kreisbewegung in der Ebene $y z$ mit der Umlaufszeit $2 \pi v \mu / \varepsilon \mathfrak{H}$. Die Bahn ist eine Schraube mit wachsender Höhe der Gänge.

13. Die Ergebnisse der vorstehenden Untersuchung dürften Anwendung finden auf die Erscheinungen in der Nähe der Kathode, auf die Veränderung, insbesondere die Neubildung der Schichten unter magnetischer Wirkung, sowie auf die Erscheinung des Nordlichtes.

(Eingegangen 23. December 1900.)

12. *Ueber Schichtung in einem Strome elektrischer Teilchen;*
von Eduard Riecke.

(Im Auszuge mitgeteilt in der Physikalischen Zeitschrift.)

Als eine besonders merkwürdige und rätselvolle Erscheinung hat man von jeher die Schichtenbildung in Geissler'schen Röhren betrachtet. Sie zeigt, dass die Verschiebungsgeschwindigkeiten der Ionen der Länge der Röhre nach in periodischer Weise wechseln, hier ansteigen, dort sinken können. Mit einer Wellenbewegung im gewöhnlichen Sinne hat die Erscheinung nichts zu thun, denn die Elemente der Strömung zeigen an einer und derselben Stelle der Röhre keinen periodischen Wechsel. Viel wahrscheinlicher ist es, dass die Schichtenbildung eine Begleiterscheinung der Strömung ist; ihr Analogon sind nicht die Kundt'schen Staubfiguren, sondern die Anschwellungen und Einschnürungen eines unter hohem Druck austretenden Gasstrahles, und der periodische Wechsel der Dichtigkeit, welcher damit verbunden ist. Es ist nicht unmöglich, dass zwischen dieser Ausströmungserscheinung und der Schichtung eines elektrischen Funkens ein unmittelbarer Zusammenhang besteht. Für die Strömung elektrischer Teilchen in einem homogenen elektrischen Felde bot sich zunächst eine andere Möglichkeit der Schichtung, welche im Folgenden entwickelt ist.[1])

1. Es sei ein homogenes elektrisches Feld von der Intensität $\mathfrak{F}$ gegeben; in diesem bewegen sich in der Richtung der Kraftlinien gleichartige elektrische Teilchen so, dass in einer zu den Kraftlinien senkrechten Ebene die Geschwindigkeit aller Teilchen die gleiche ist. Die elektrischen Teilchen be-

---

1) Erst nach dem Abschluss der vorliegenden Arbeit wurde ich mit einer auf denselben Gegenstand gerichteten Arbeit des Hrn. G. W. Walker im Phil. Mag. vom Juni 1900 bekannt. Hr. Walker geht aus von den Gleichungen der kinetischen Gastheorie und findet eine Differentialgleichung für das elektrostatische Potential, deren Lösung ein periodisches Glied enthält.

wegen sich unter den Wirkungen der äusseren Kraft $\mathfrak{F}$ und der zwischen den Teilchen selbst vorhandenen inneren elektrodynamischen Kräfte. Ausserdem aber sei das elektrische Feld von einem neutralen Mittel erfüllt, dessen Einfluss auf die Bewegung sich in einer der Geschwindigkeit der Teilchen proportionalen Reibungskraft geltend macht.

Da die Bewegung aller in parallelen Linien sich bewegenden Teilchen dieselbe ist, so beschränken wir uns zunächst auf die Betrachtung eines einzigen. Die positive Richtung der Kraftlinien, in welcher sich dieses Teilchen bewegt, machen wir zur x-Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems. Es sei nun an irgend einer Stelle der x-Axe die Geschwindigkeit des Teilchens gleich Null. Vermöge der Beschleunigung, welche dem Teilchen von der Kraft $\mathfrak{F}$ erteilt wird, bewegt es sich in der Richtung der x-Axe mit wachsender Geschwindigkeit. Der Bewegung wirkt aber die der Geschwindigkeit proportionale Reibung entgegen. Man wird also annehmen dürfen, dass von einem bestimmten Punkt der x-Axe mit der Abscisse x_0 die Geschwindigkeit keine sehr grosse Veränderung mehr erleidet. Die folgenden Betrachtungen beziehen sich auf dieses Gebiet einer wenig veränderlichen Geschwindigkeit.

2. *Die elektrodynamischen Wechselwirkungen.* Bei der Berechnung der elektrodynamischen Wechselwirkungen werden wir das *Gesetz von Clausius* zu Grunde legen, welches von J. J. Thomson auch aus der Maxwell'schen Theorie abgeleitet worden ist.

Die Kraft, welche ein im Punkte x, y, z befindliches Teilchen von der Ladung ε von einem zweiten Teilchen ε_1 an der Stelle x_1, y_1, z_1 erleidet, habe in der Richtung der x-Axe die Componente Ξ. Die Geschwindigkeitscomponenten der Teilchen seien u, v, w und u_1, v_1, w_1. Nach dem Gesetze von Clausius ist dann:

$$\frac{1}{\varepsilon\,\varepsilon_1}\,\Xi = -\frac{d\psi}{dx} + k\,\frac{d\psi}{dx}\left\{u\,u_1 + v\,v_1 + w\,w_1\right\} - k\,\frac{d}{dt}\{\psi\,u_1\}.$$

ψ ist bei Clausius gleich der reciproken Entfernung der beiden Teilchen; wir setzen voraus, dass ψ nur in grösserer Entfernung übergeht in $1/r$, dass aber in kleiner Entfernung die Werte von ψ selbst und von seinen Differentialquotienten

sehr viel grösser seien, als die Werte von $1/r$ und von den Differentialquotienten von $1/r$. Die Constante k ist gleich dem Quadrat der reciproken Lichtgeschwindigkeit.

In unserem Falle sind die Geschwindigkeiten v, w, v_1, w_1 gleich Null und daher:

$$(1)\quad \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_1}\,\Xi = -\frac{d\psi}{dx} + k\frac{d\psi}{dx}\,u\,u_1 - k\frac{d}{dt}(\psi\,u_1), \\ \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_1}\,\Xi = -\frac{d\psi}{dx} + k\frac{d\psi}{dx}\,u_1^2 - k\,\psi\,\frac{d u_1}{dt}. \end{cases}$$

Um nun die Wirkung zu berechnen, welche das Teilchen ε von allen umgebenden Teilchen erleidet, beschreiben wir um ε eine Kugel, deren Radius so genommen werde, dass die Wirkungen der ausserhalb liegenden Teilchen vernachlässigt werden können. Die Rechnung gestaltet sich übersichtlicher, wenn wir die elektrischen Ladungen ε_1 der einzelnen wirkenden Teilchen gleichmässig über den umgebenden Raum ausbreiten, sodass das ganze Innere der Kugel stetig mit elektrischer Masse erfüllt ist. Die räumliche Dichte η_1 der Ladung betrachten wir dann als eine Function der Coordinaten x_1, y_1, z_1. Die von allen in unserer Kugel befindlichen Teilchen ε_1 auf ε ausgeübte Wirkung können wir dann so berechnen, dass wir einmal die Dichte η_1 als constant, dagegen die Geschwindigkeit u_1 als veränderlich betrachten, während wir das andere Mal umgekehrt die Geschwindigkeit constant, die Dichte veränderlich setzen.

Ein Volumenelement der Kugel sei $d w_1$, dann ergiebt sich für die von ihm herrührende X-Componente:

$$\frac{\Xi}{\varepsilon} = -\frac{d\psi}{dx}\,\eta_1\,d w_1 + k\,u_1^2\,\frac{d\psi}{dx}\,\eta_1\,d w_1 - k\,\psi\,\frac{d u_1}{dt}\,\eta_1\,d w_1.$$

Hier ist:

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{d\psi}{dr}\cdot\frac{x - x_1}{r} = -\chi\,(x - x_1).$$

Nehmen wir zuerst an, dass u_1 *constant gleich* u sei, so ist in der Kugel auch $d u_1/dt$ gleich Null, und es wird:

$$\frac{\Xi'}{\varepsilon} = +(1 - k u^2)\,\chi\,(x - x_1)\,\eta_1\,d w_1.$$

Nun ist nach dem Taylor'schen Satze:

$$\eta_1 = \eta + \frac{d\eta}{dx}(x_1 - x).$$

Somit:

$$\frac{\Xi'}{\varepsilon} = +(1 - k u^2)\chi(x - x_1)\left\{\eta + \frac{d\eta}{dx}(x_1 - x)\right\} d w_1 .$$

Für die Gesamtwirkung aller in unserer Kugel befindlichen Teilchen ergiebt sich mit Rücksicht auf die Symmetrieverhältnisse:

$$\sum \frac{\Xi'}{\varepsilon} = -(1 - k u^2)\frac{d\eta}{dx}\sum \chi(x - x_1)^2 d w_1 .$$

Solange $k u^2$ kleiner als 1, ist die Kraft negativ, wenn $d\eta/dx$ einen positiven Wert hat.

Wir setzen nun zweitens *die Dichte* η_1 *constant gleich* η und betrachten die Geschwindigkeit u_1 als veränderlich. Dann erhalten wir:

$$\frac{\Xi''}{\varepsilon} = \eta\chi(x - x_1) d w_1 - k\eta\chi(x - x_1) u_1^2 d w_1 - k\eta\psi\frac{d u_1}{dt} d w_1 .$$

Nun ist nach dem Taylor'schen Satze:

$$u_1^2 = u^2 + \frac{d u^2}{dx}(x_1 - x),$$

$$\frac{d u_1}{dt} = \frac{du}{dt} + \frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dt}\right)(x_1 - x) + \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{du}{dt}\right)(x_1 - x)^2 .$$

Setzen wir diese Werte ein, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned}\frac{\Xi''}{\varepsilon} &= \eta\chi(x - x_1) d w_1 - \eta k u^2\chi(x - x_1) d w_1 \\ &+ \eta k \frac{d u^2}{dx}\chi(x - x_1)^2 d w_1 \\ &- \eta k \frac{du}{dt}\psi d w_1 - \eta k \frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dt}\right)\psi(x_1 - x) d w_1 \\ &- \eta k \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{du}{dt}\right)\cdot\frac{\psi}{2}(x - x_1)^2 d w_1 .\end{aligned}$$

Für die von allen Teilchen der Kugel auf ε ausgeübte Wirkung erhält man mit Rücksicht auf die Symmetrieverhältnisse:

$$\begin{aligned}\sum\frac{\Xi''}{\varepsilon} &= k\eta\frac{d u^2}{dx}\sum\chi(x - x_1)^2 d w_1 - k\eta\frac{du}{dt}\sum\psi d w_1 \\ &- k\eta\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{du}{dt}\right)\cdot\frac{1}{2}\sum\psi(x - x_1)^2 d w_1 .\end{aligned}$$

Nun ist:

$$u\,dt = dx,$$

somit:

$$\frac{du}{dt} = u\frac{du}{dx} = \tfrac{1}{2}\frac{du^2}{dx}.$$

Mit Hülfe dieser Beziehung findet man:

$$\sum \frac{\Xi''}{\varepsilon} = k\,\eta\,\frac{d u^2}{d x}\cdot\sum\{\chi(x-x_1)^2 - \tfrac{1}{2}\psi\}\,d w_1$$
$$- k\,\eta\,\frac{d^3 u^2}{d x^3}\cdot\tfrac{1}{6}\sum\psi(x-x_1)^3\,d w_1.$$

Wir führen nun für die im vorhergehenden gefundenen Summen die Bezeichnungen ein:

$$(2)\quad \begin{cases} P = \sum\chi(x-x_1)^2\,d w_1, \quad Q = \sum\left\{\chi(x-x_1)^2 - \frac{\psi}{2}\right\}d w_1, \\ R = \tfrac{1}{6}\sum\psi(x-x_1)^3\,d w_1. \end{cases}$$

Dann wird *die ganze elektrische Kraft, welche das Teilchen* ε *von den Nachbarteilchen erleidet*, gegeben durch:

$$(2')\quad \begin{cases} X = -P\varepsilon(1-k u^2)\frac{d\eta}{dx} + Q k \varepsilon \eta \frac{d u^2}{d x} \\ \quad - R k \varepsilon \eta \frac{d^3 u^2}{d x^3}. \end{cases}$$

3. Im stationären Zustande muss die Zahl der Teilchen, welche in 1 sec durch eine zu den Strömungslinien senkrechte Fläche von 1 qcm hindurchgehen, allenthalben dieselbe sein. Dasselbe gilt dann auch von der Menge der in einer Secunde durch jene Fläche gehenden Elektricität, von der elektrischen Strömung i. Auf der anderen Seite ist die Menge der Elektricität, welche in einer Secunde durch die Flächeneinheit hindurchgeht, gleich ηu; wir haben also die Beziehung:

$$(3)\qquad \eta u = i,$$

wo i die constante Stärke der elektrischen Strömung ist.

4. Die *Differentialgleichung für die Bewegung des Teilchens* ε werden wir jetzt in der folgenden Form aufstellen:

$$(4)\quad \begin{cases} \mu\frac{du}{dt} = \varepsilon\mathfrak{F} - P\varepsilon(1-k u^2)\frac{d\eta}{dx} + Q k \varepsilon \eta \frac{d u^2}{d x} \\ \quad - R k \varepsilon \eta \frac{d^3 u^2}{d x^3} - \varrho u. \end{cases}$$

Der letzte Term der rechten Seite entspricht der Reibung des elektrischen Teilchens an den in dem Felde vorhandenen neutralen Molecülen. Setzen wir in dieser Gleichung:

$$\eta = \frac{i}{u} \quad \text{und} \quad \frac{d u}{d t} = \tfrac{1}{2}\frac{d u^2}{d x},$$

so ergiebt sich:

$$R k \varepsilon i \frac{1}{u}\frac{d^2 u^2}{d x^2} + \left(\frac{\mu}{2} - \frac{Q k \varepsilon i}{u}\right)\frac{d u^2}{d x} - P \varepsilon i \frac{1 - k u^2}{u^2}\frac{d u}{d x}$$
$$+ \varrho u = \varepsilon \mathfrak{F}.$$

Wir machen nun den Ansatz:

$$u = u_0 + \mathrm{u},$$

wo u gegen u_0 sehr klein sein soll. Vernachlässigen wir die Quadrate von u/u_0 gegen 1, so ergiebt sich die Gleichung:

$$2 R k \varepsilon i\left(1 - \frac{\mathrm{u}}{u_0}\right)\frac{d^2 \mathrm{u}}{d x^2} + \left\{\mu u_0 - 2 Q k \varepsilon i\left(1 - \frac{\mathrm{u}}{u_0}\right)\right.$$
$$\left. - P \varepsilon i \frac{1 - k u_0^2 - 2 \mathrm{u}/u_0}{u_0^2}\right\}\frac{d \mathrm{u}}{d x}$$
$$+ \varrho\left(\mathrm{u} + u_0 - \frac{\varepsilon \mathfrak{F}}{\varrho}\right) = 0.$$

Vernachlässigen wir hier auch noch u/u_0 gegen 1, so erhalten wir:

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} & 2 R k \varepsilon i \frac{d^2 \mathrm{u}}{d x^2} + \left\{\mu u_0 - (2 Q - P) k \varepsilon i - \frac{P \varepsilon i}{u_0^2}\right\}\frac{d \mathrm{u}}{d x} \\ & \qquad + \varrho\left(\mathrm{u} + u_0 - \frac{\varepsilon \mathfrak{F}}{\varrho}\right) = 0, \end{aligned} \right.$$

oder:

$$(5') \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{d^2 \mathrm{u}}{d x^2} + \left\{\frac{\mu u_0}{2 R k \varepsilon i} - \frac{2 Q - P}{2 R} - \frac{P}{2 R k u_0^2}\right\}\frac{d \mathrm{u}}{d x} \\ & \qquad + \frac{\varrho}{2 R k \varepsilon i}\left(\mathrm{u} + u_0 - \frac{\varepsilon \mathfrak{F}}{\varrho}\right) = 0. \end{aligned} \right.$$

Wir führen die weiteren Abkürzungen ein:

$$p = \frac{\mu u_0}{2 R k \varepsilon i} - \frac{2 Q - P}{2 R} - \frac{P}{2 R k u_0^2},$$

$$q = \frac{\varrho}{2 R k \varepsilon i},$$

dann wird die Gleichung (5'):

$$(6) \qquad \frac{d^2 \mathrm{u}}{d x^2} + p\frac{d \mathrm{u}}{d x} + q\left(\mathrm{u} + u_0 - \frac{\varepsilon \mathfrak{F}}{\varrho}\right) = 0.$$

Wir machen den Ansatz:

$$\mathrm{u} + u_0 = \frac{\varepsilon \mathfrak{F}}{\varrho} + C e^{\gamma x},$$

dann ergiebt sich zur Bestimmung von γ die Gleichung

$$\gamma^3 + p\gamma + q = 0. \tag{7}$$

Setzen wir weiter:

$$\left\{\begin{aligned} M^3 &= -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}, \\ N^3 &= -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}, \end{aligned}\right. \tag{8}$$

so sind die drei Werte von γ:

$$\left\{\begin{aligned} \gamma_1 &= M + N, \\ \gamma_2 &= -\frac{M+N}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}(M - N), \\ \gamma_3 &= -\frac{M+N}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}(M - N). \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Wir nehmen an, dass **$(q/2)^2 + (p/3)^3$ *einen positiven Wert besitzt*; dann sind M und N reell; N ist sicher negativ, der absolute Wert von M ist jedenfalls kleiner als der absolute Wert von N, somit ist $M + N$ negativ, $M - N$ dagegen positiv.**
Wir setzen:

$$M + N = -\alpha, \quad \frac{\sqrt{3}}{2}(M - N) = \beta\pi. \tag{10}$$

Dann sind die drei Wurzeln:

$$\gamma_1 = -\alpha, \quad \gamma_2 = \frac{\alpha}{2} + i\beta\pi, \quad \gamma_3 = \frac{\alpha}{2} - i\beta\pi. \tag{11}$$

Das Integral der Gleichung (6) wird:

$$\mathrm{u} + u_0 = \frac{\varepsilon \mathfrak{F}}{\varrho} + C_1 e^{-\alpha x} + (C_2 e^{i\beta\pi x} + C_3 e^{-i\beta\pi x}) e^{\frac{\alpha}{2}x}.$$

Bezeichnen wir die ganze Geschwindigkeit des Teilchens ε wie früher durch u, so kann das gefundene Integral auf die Form gebracht werden:

$$\left\{\begin{aligned} u &= \frac{\varepsilon \mathfrak{F}}{\varrho}\{1 - e^{-\alpha(x - x_0)}\} + u_0 e^{-\alpha(x - x_0)} \\ &\quad + a\, e^{\frac{\alpha}{2}(x - x_0)} \sin \pi\beta(x - x_0). \end{aligned}\right. \tag{12}$$

Es ist dann für $x = x_0$: $u = u_0$; das periodische Glied verschwindet für:

$$x = x_0, \quad x = x_0 + \frac{1}{\beta}, \quad x = x_0 + \frac{2}{\beta}, \ldots,$$

es ist also $1/\beta$ *die halbe Wellenlänge des periodischen Gliedes.*

Für grosse Werte von $x - x_0$ ist in den Punkten, für welche das periodische Glied verschwindet:

$$u = \frac{\varepsilon \mathfrak{F}}{\varrho}.$$

Unserer Voraussetzung nach darf u_0 nicht sehr verschieden sein von $\varepsilon \mathfrak{F}/\varrho$.

Setzen wir

$$x - x_0 = \frac{n}{2\beta},$$

wo n eine beliebige ganze Zahl sein soll, so wird:

$$u = \frac{\varepsilon \mathfrak{F}}{\varrho} \left\{ 1 - e^{-\frac{a n}{2\beta}} \right\} + u_0 e^{-\frac{a n}{2\beta}} \pm a e^{\frac{a n}{4\beta}}.$$

Die Gleichung (12) gilt nur innerhalb eines Gebietes, in welchem auch diese Geschwindigkeit nur wenig abweicht von u_0, in dem also $a e^{a n/4\beta}$ klein bleibt gegen u_0.

An Stelle von x führen wir endlich noch eine andere Veränderliche ξ ein, durch die Gleichung:

$$\xi = \beta(x - x_0), \tag{13}$$

d. h. wir benutzen *die halbe Wellenlänge des periodischen Gliedes als neue Längeneinheit.* Dann wird die Gleichung für die Geschwindigkeit, wenn wir gleichzeitig mit u_0 dividiren:

$$\frac{u}{u_0} = \frac{\varepsilon \mathfrak{F}}{\varrho u_0} \left\{ 1 - e^{-\frac{a}{\beta}\xi} \right\} + e^{-\frac{a}{\beta}\xi} + \frac{u}{u_0} e^{\frac{a}{2\beta}\xi} \sin \pi \xi. \tag{13'}$$

Die Geschwindigkeiten sind in dieser Formel ausgedrückt als Vielfache der Anfangsgeschwindigkeit u_0, von welcher sie der Voraussetzung nach immer nur wenig abweichen.

5. Wir benutzen die Werte von ξ als Abscissen und repräsentiren die Werte von u/u_0 durch eine Curve, indem wir sie

als Ordinaten senkrecht zu den entsprechenden Werten von ε auftragen. Die Curve u/u_0 stellt sich dann als eine Superposition zweier Curven dar. Die erste ist eine Exponentialcurve, welche zwischen dem Anfangswert 1 und dem davon nur wenig verschiedenen Endwert $\varepsilon\mathfrak{F}/\varrho\, u_0$ verläuft; die zweite Curve ist eine Sinuslinie mit stetig wachsender Amplitude; die halbe Wellenlänge dieser Sinuslinie ist gleich $1/\beta$.

Die elektrische Dichte ist nach Gleichung (3) gegeben durch:

$$\eta = \frac{i}{u} = \frac{i}{u_0} \cdot \frac{u_0}{u} = \eta_0 \frac{u_0}{u},$$

wenn wir mit η_0 die anfängliche Dichte bezeichnen.

Zeichnet man also eine Curve, welche die reciproken Werte von u/u_0 darstellt, so giebt diese Curve zugleich ein Bild von der Verteilung der elektrischen Dichte in dem durchströmten Felde. Die Curve der elektrischen Dichte entsteht hiernach gleichfalls aus der Superposition einer Exponentialcurve und einer Wellenlinie; die halbe Wellenlänge der letzteren ist wieder gegeben durch $1/\beta$.

Nun war β gegeben durch:

$$\beta = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}(M - N).$$

Es war ferner:

$$M^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}, \quad N^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3},$$

$$q = \frac{\varrho}{2Rk\varepsilon i}, \quad p = \frac{\mu u_0}{2Rk\varepsilon i} - \frac{2Q - P}{2R} - \frac{P}{2Rku_0^2}.$$

Hiernach wächst β, wenn μ und ϱ zunehmen; es nimmt ab, wenn der Quotient i/u_0, d. h. die anfängliche elektrische Dichte η_0 zunimmt. *Umgekehrt nimmt die Wellenlänge des periodischen Gliedes ab, wenn μ und ϱ wachsen; sie nimmt zu, wenn die anfängliche Dichte η_0 wächst.*

6. *Strömung im reibungslosen Felde.* Haben wir keine Reibung in dem elektrischen Felde, so wird die allgemeine Gleichung der Bewegung:

$$(14) \quad Rk\varepsilon i \frac{1}{u}\frac{d^2u^2}{dx^2} + \left(\frac{\mu}{2} - \frac{Qk\varepsilon i}{u}\right)\frac{du^2}{dx} - P\varepsilon i \frac{1 - ku^2}{u^2}\frac{du}{dx} = \varepsilon\mathfrak{F}.$$

Wenn die Geschwindigkeit u auch in diesem Falle nur wenig von einem anfänglichen Wert u_0 abweicht, so gilt die speciellere Gleichung:

$$(14') \quad \frac{d^2 \mathfrak{u}}{d x^2} + \left\{ \frac{\mu u_0}{2 R k \varepsilon i} - \frac{2 Q - P}{2 R} - \frac{P}{2 R k u_0^2} \right\} \frac{d \mathfrak{u}}{d x} = \frac{\varepsilon \mathfrak{F}}{2 R k \varepsilon i}.$$

Setzen wir wie früher:

$$p = \frac{\mu u_0}{2 R k \varepsilon i} - \frac{2 Q - P}{2 R} - \frac{P}{2 R k u_0^2}$$

und

$$r = \frac{\varepsilon \mathfrak{F}}{2 R k \varepsilon i},$$

so wird die Gleichung:

$$(14'') \quad \frac{d^2 \mathfrak{u}}{d x^2} + p \frac{d \mathfrak{u}}{d x} = r.$$

Machen wir den Ansatz:

$$\mathfrak{u} = \frac{r}{p} x + a e^{\varkappa x} + \text{const.},$$

so ergiebt sich zur Bestimmung von $\varkappa$:

$$(15) \quad \varkappa^2 + p = 0.$$

Ist p positiv, was bei grossen Werten von u_0 im allgemeinen zutreffen wird, so sind die beiden Wurzeln der Gleichung imaginär. Erinnern wir uns, dass die ganze Geschwindigkeit des betrachteten Teilchens gegeben ist durch $u = u_0 + \mathfrak{u}$, so kann die Lösung auf die Form gebracht werden:

$$(16) \quad u = u_0 + \frac{r}{p}(x - x_0) + a \sin \sqrt{p}\,(x - x_0),$$

oder, wenn wir $\sqrt{p}\,(x - x_0) = \pi \xi$ setzen:

$$(16') \quad u = u_0 + \frac{r \pi}{p \sqrt{p}} \cdot \xi + a \sin \pi \xi.$$

Die Geschwindigkeit u setzt sich aus drei Termen zusammen; der erste ist gleich der constanten Anfangsgeschwindigkeit; dazu kommt ein mit der Veränderlichen ξ wachsender

Term und endlich ein periodisches Glied, dessen halbe Wellenlänge gegeben ist durch $\xi = 1$ oder durch:

$$x - x_0 = \frac{\pi}{\sqrt{p}}.$$

Die Wellenlänge nimmt ab, wenn die Masse μ zunimmt.

Bei kleinen Anfangsgeschwindigkeiten u_0 wird p negativ; $p = -p'$. Die Differentialgleichung ist dann:

$$\frac{d^2 \mathfrak{u}}{d x^2} - p' \frac{d \mathfrak{u}}{d x} = r \tag{17}$$

und ihre Lösung:

$$\left\{ \begin{aligned} u = u_0 + \mathfrak{u} = u_0 - \frac{r(x - x_0)}{p'} \\ + a \left\{ e^{\sqrt{p'}(x - x_0)} - e^{-\sqrt{p'}(x - x_0)} \right\}. \end{aligned} \right. \tag{18}$$

Der Verlauf der Geschwindigkeit ist in diesem Falle ein aperiodischer.

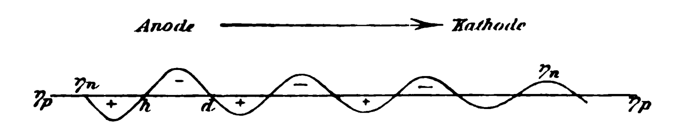
Hierin scheint ein charakteristischer *Unterschied der Bewegungen mit Reibung und ohne Reibung* zu liegen. Im letzteren Falle verschwinden die periodischen Anwandlungen der Bewegung, sobald p negativ wird. Wenn Reibung vorhanden ist, so ist das nicht der Fall, die Periodicität erhält sich, solange nur $(p/2)^2 + (p/3)^3$ positiv bleibt. Erst wenn diese Grösse negativ wird, fallen die periodischen Anwandlungen weg.

Uebrigens muss hervorgehoben werden, dass die Gleichungen (16) und (18) immer nur innerhalb sehr beschränkter Gebiete anwendbar sind; denn das mit $x - x_0$ proportionale Glied bedingt eine stetige Vergrösserung der Differenz, welche zwischen der jeweils vorhandenen Geschwindigkeit und der Anfangsgeschwindigkeit u_0 besteht. Diese Differenz sollte aber nach unserer Voraussetzung nur klein sein.

7. *Elektrische Doppelströmung in Geissler'schen Röhren.* In einer Geissler'schen Röhre kann man das elektrische Feld zwischen der Anode und dem dunkeln Zwischenraume als ein im wesentlichen constantes betrachten. In diesem Felde findet eine doppelte Strömung von Elektricität statt; negative elektrische Teilchen bewegen sich von der Kathode zur Anode, positive von der Anode zur Kathode. Auf Grund der Untersuchungen über Canalstrahlen *identificiren wir die positiven Teilchen mit gewöhnlichen Ionen;* von den *negativen*

nehmen wir an, dass sie *identisch* seien *mit den Teilchen der Kathodenstrahlen*, den Elektronen. Unter dieser Voraussetzung ist die Masse μ der positiven Teilchen um vieles grösser als die der negativen; es liegt ausserdem die Annahme nahe, dass die Reibung bei den positiven Teilchen grösser sei, als bei den negativen. Wir betrachten zunächst die Bewegungen der beiden Arten von Ionen als voneinander unabhängig. In dem Ausdruck für die Geschwindigkeit der Teilchen ist dann die Wellenlänge des periodischen Gliedes viel kleiner bei den positiven, als bei den negativen Teilchen. Nehmen wir an, dass innerhalb des betrachteten Gebietes der nicht periodische Teil der Geschwindigkeit weder bei den positiven, noch bei den negativen Teilchen eine merkliche Aenderung erleide, so wird *die Geschwindigkeitscurve der negativen Teilchen* durch *eine Wellenlinie* dargestellt sein, deren Niveaulinie der x-Axe parallel ist. *Die Geschwindigkeitscurve der positiven Teilchen* dagegen ist *eine der x-Axe parallele gerade Linie.* Dasselbe gilt dann auch von den die Dichtigkeiten der negativen und der positiven Teilchen repräsentirenden Linien η_n und η_p.

Wir führen endlich noch die Annahme ein, dass *die freie Elektricität* in dem betrachteten Abschnitt der Röhre *im Ganzen gleich Null* sei. Die gerade Linie, welche die Dichte η_p repräsentirt, fällt dann mit der Niveaulinie der Curve η_n zusammen. Daraus ergiebt sich dann ein wellenförmiger Verlauf der freien Ladung, wie er in der nachstehenden Figur gezeichnet ist.



8. Wir haben im Vorhergehenden die Strömungen der positiven und der negativen Teilchen als voneinander unabhängig betrachtet. Es fragt sich, inwieweit dies gestattet ist. Wenn die Geschwindigkeit der positiven Teilchen constant ist, so verschwindet ihre elektrodynamische Wirkung auf die negativen; die Bewegung der letzteren kann also ebenso berechnet werden, wie früher.

Umgekehrt kann natürlich die elektrodynamische Wirkung

der negativen Teilchen auf die positiven nicht vernachlässigt werden. Nun kann man aber die Bewegung der negativen Teilchen als gegeben betrachten; die von ihnen ausgehende Wirkung hat den Charakter einer äusseren Kraft, unter deren Zwang die Bewegung der positiven Teilchen sich vollzieht. Diese äussere Kraft besitzt ein periodisches Glied, dessen Wellenlänge gleich sein muss der Wellenlänge der negativen Teilchen, gleich $2/\beta$. Ein periodisches Glied von derselben Art muss dann auch in der gezwungenen Bewegung der positiven Teilchen sich geltend machen. Aus der Analogie mit den entsprechenden Problemen der Akustik kann man schliessen, dass die Amplitude dieses Gliedes abnimmt mit der Masse der positiven Teilchen und mit dem Coefficienten ϱ ihrer Reibung. Die Amplitude der Wellen dürfte klein sein, im Vergleich mit der Amplitude der Wellen, welche in der Geschwindigkeitscurve der negativen Teilchen auftreten. Die Einwirkung der negativen Teilchen auf die positiven würde hiernach die folgende Aenderung bedingen. An Stelle der geraden Linie η_p, durch welche in unserer Figur die Dichte der positiven Elektricität angegeben wird, tritt eine flache Wellenlinie; die Wellenlänge ist dieselbe, wie bei der Curve η_n der Dichte der negativen Elektricität; die Phase kann irgendwie verändert sein. Der wellenförmige Wechsel positiver und negativer Ladungen im Innern der Röhre wird dadurch nicht wesentlich verändert.

Durch die abwechselnden positiven und negativen Ladungen im Innern der Röhre wird aber die Voraussetzung, dass die Bewegungen sich in einem homogenen elektrischen Felde vollziehen, aufgehoben. Zu der constanten Feldintensität $\mathfrak{F}$ wird noch ein periodisches Glied hinzukommen, dessen Wellenlänge abermals gleich $2/\beta$ sein wird. Auch die Berücksichtigung eines solchen Gliedes wird an den wesentlichen Resultaten unserer Untersuchung nichts ändern.

9. Wir kommen nun zu einer Bemerkung, welche zeigt, dass unsere Theorie der Doppelströmung in einer Geissler'schen Röhre eine wesentliche Lücke enthält. Wenn in der Röhre positive und negative elektrische Teilchen in entgegengesetzten Richtungen sich bewegen, so werden dadurch *Zusammenstösse der verschiedenartigen Teilchen, Verbindungen derselben zu neutralen Molecülen* herbeigeführt werden.

Man kann das zunächst in Verbindung bringen mit dem *Leuchten der Schichten*; aus dem Anblick unserer Figur ergiebt sich, dass an den Stellen h die innere elektrostatische Wirkung, welche der Schichtung entspricht, mit der Wirkung des Feldes gleichsinnig ist. An den Stellen d wirkt die innere Kraft der äusseren entgegen. Es ist daher wahrscheinlich, dass an den Stellen h mehr positive und negative Teilchen und mit grösserer Geschwindigkeit zusammenstossen als an den Stellen d. Nun entsprechen die Stellen h der Mitte der leuchtenden Schichten; das Leuchten müsste darnach durch die Verbindung entgegengesetzter Teilchen, welche mit einer gewissen Geschwindigkeit zusammenstossen, hervorgebracht werden.

Wenn aber auf dem Wege der Strömung bewegte elektrische Teilchen verschwinden, indem sie sich zu neutralen Molecülen vereinigen, so müssen sie auch wieder ersetzt werden durch *Spaltung neutraler* Molecüle. Diese Vorgänge, welche in der Theorie von J. J. Thomson eine fundamentale Bedeutung besitzen, sind in der unserigen ganz vernachlässigt. Ihre Berücksichtigung erscheint noch aus dem folgenden Grunde sehr wesentlich zu sein. Unsere Theorie führt zu einer stetig wachsenden Amplitude der negativen und der positiven Teile der Wellen. Es muss notwendig eine Wirkung existiren, welche das Anwachsen über eine gewisse Grenze hinaus verhindert; eine solche Gegenwirkung würde eben durch die Wiedervereinigung der entgegengesetzten elektrischen Teilchen zu neutralen Molecülen gegeben sein.

Man könnte hoffen, zu einer vollständigeren Theorie der Schichtenbildung zu gelangen, durch eine Verbindung der Thomson'schen Theorie, welche für sich genommen, keine Schichtung giebt, mit den in diesem Aufsatze niedergelegten Betrachtungen. Dem steht aber vorläufig entgegen, dass die Thomson'sche Theorie, wenigstens in ihrer weiteren Durchführung, gleiche Geschwindigkeiten der Ionen voraussetzt, während unsere Betrachtung notwendig auf verschiedene Geschwindigkeiten führt.

(Eingegangen 23. December 1900.)

---

13. *Ueber Ionisirung durchströmter Gase und die unipolare Entladung an glühenden Körpern*[1]; von *J. Stark.*

1. *Selbstständige Strömung.* — Es können in einem Körper positive und negative frei bewegliche Ionen vorhanden sein; die freie Beweglichkeit eines Ions besteht darin, dass es von einer beliebig kleinen Kraft beliebig verschoben werden kann, ohne dass gleichzeitig mit ihm ein mit ihm fest verbundenes entgegengesetzt geladenes Ion sich verschiebt. Der Zustand eines Körpers, der durch das Vorhandensein freier Ionen dargestellt wird, sei im Folgenden mit *Ionisation* bezeichnet. Der Vorgang, in dem aus neutralen Teilchen freie positive und negative Ionen geschaffen werden, sei *Ionisirung* genannt.

Ein elektrischer Leitungsstrom in einem Körper hat das Vorhandensein freier Ionen oder Ionisation zur Voraussetzung. Ist die Ionisation unabhängig von einer elektromotorischen Kraft durch gewisse Wirkungen gegeben, so erzeugt eine beliebige kleine elektromotorische Kraft in dem Körper eine Verschiebung der Ionen oder einen elektrischen Strom. In diesem Falle sei die Strömung *unselbstständig* genannt.

Muss in einem Körper erst durch eine elektromotorische Kraft direkt oder indirekt Ionisation geschaffen und aufrecht erhalten werden und ist auf eine solche Jonisation eine elektrische Strömung gegründet, so heisse diese *selbstständig.*

Sowohl die selbstständige wie die unselbstständige elektrische Strömung bestehen in einer Gegenbewegung positiver und negativer Ionen (W. Weber). Auf folgenden Unterschied sei indes hier gleich im voraus hingewiesen. Die unselbstständige Strömung ist bei jeder beliebig kleinen elektromotorischen Kraft möglich; die selbstständige dagegen nur dann, wenn die elektromotorische Kraft oberhalb eines gewissen Grenzwertes liegt, dessen Grösse abhängt von den gegebenen Umständen.

---

1) Vgl. die vorläufige Mitteilung in Physik. Zeitschr. 2. p. 17. 1900.

Beide Strömungsarten können gleichzeitig in demselben Körper vorhanden sein; das Eintreten der selbstständigen Strömung offenbart sich in einem starken Ansteigen der Stromstärke.

In Gasen ist eine unselbstständige Strömung möglich, wenn Ionisation durch nicht elektrische Wirkungen, nämlich durch Röntgen-[1], Becquerel-[2], ultraviolette Strahlung[3]) oder durch hohe Temperatur gegeben ist. Indem wir in ihnen eine starke elektromotorische Kraft wirken lassen, können wir in ihnen auch eine selbstständige Strömung hervorrufen. Diese soll uns hier speciell beschäftigen.

2. *Ursachen der Ionisirung in der selbstständigen Strömung.* — In elektrisch neutralen Teilchen sind die positiven und negativen Ionen durch die Kraft der elektrischen Anziehung aneinander gebunden. Sollen sie frei werden, so müssen sie entgegen dieser Kraft soweit voneinander entfernt werden, dass sie ihre gegenseitige Anziehung nicht mehr zu hindern vermag, einem beliebigen Antrieb in irgend einer Richtung zu folgen. Dies kann einmal dadurch erreicht werden, dass man an den entgegengesetzt geladenen Ionen eines neutralen Teilchens eine (elektromotorische) Kraft wirken lässt, welche die Ionen in entgegengesetzter Richtung auseinandertreibt.

Als solche elektromotorische Kraft kommt in erster Linie die Kraft des elektrischen Feldes in Betracht. Diese bringt für sich allein und unmittelbar wirkend dann Ionisirung hervor, wenn sie grösser ist als die Kraft, mit welcher die Ionen in einem neutralen Teilchen sich anziehen. Nehmen wir an, dass in einem Körper lediglich durch diese direkte Wirkung der elektrischen Feldstärke Ionisation geschaffen wird, so ist verständlich, dass in einem Dielektricum die elektrische Kraft nicht über einen gewissen Grenzwert steigen kann, ohne Ionisation hervorzubringen und dann eben dadurch zu sinken.

Eine andere elektromotorische Kraft ist folgende. Besitzt ein neutrales Teilchen senkrecht zu magnetischen Kraftlinien eine relative translatorische oder rotatorische Geschwindigkeit,

---

1) W. C. Röntgen, Ber. d. Würzb. Soc. 1895; Wied. Ann. 64. p. 12. 1898.

2) F. H. Becquerel, Compt. Rend. 122. p. 559. 1896.

3) Ph. Lenard, Ann. d. Phys. 1. p. 486. 1900.

so tritt an seinen Ionen eine Kraft auf, welche proportional der magnetischen Feldstärke, der Ladung und der Geschwindigkeit ist. Aber diese Kraft nimmt erst bei sehr grossen Geschwindigkeiten (hohen Temperaturen) eine Grösse an, welche bezüglich einer ionisirenden Wirkung in Betracht zu kommen hätte.

Als weitere Ursache einer Jonisirung sei hypothetisch mit A. Schuster[1]) und J. J. Thomson[2]) der Stoss bewegter Teilchen eingeführt. Es sei also angenommen, dass ein neutrales Teilchen dadurch in Ionen zerlegt werden könne, dass es mit einem anderen elektrischen oder neutralen Teilchen mit grosser Geschwindigkeit zusammentrifft. Die Geschwindigkeit kann herrühren entweder von der gegebenen absoluten Temperatur oder bei einem freien Ion von der kinetischen Energie, welche es unter der Wirkung einer elektromotorischen Kraft[3]) annimmt. Bei den gewöhnlichen Temperaturen ist die Wirkung der thermischen kinetischen Energie wenigstens bei Gasen klein. Dagegen können die Geschwindigkeiten der elektrisch bewegten Ionen gross sein und eine starke ionisirende Wirkung hervorbringen. Doch wirkt dann gleichzeitig auch direct ionisirend die Feldstärke (locale elektromotorische Kraft) oder genauer sie hilft direct wirkend mit bei der Ionisirung; indem sie den Ionen Geschwindigkeiten erteilt, wirkt sie indirect ionisirend.

Die Einführung der ionisirenden Wirkung bewegter Ionen stützt sich auf die Thatsache, dass Kathoden- und Canalstrahlen[4]) ein von ihnen durchsetztes Gas leitend machen; und da man diese Strahlen als schnell bewegte negative und positive Teilchen (A. Schuster, W. Wien) anzusehen hat, so liegt der Schluss nahe, dass überhaupt bewegte elektrische Teilchen ionisirend wirken.

Das Maass der ionisirenden Wirkung der genannten Ursachen hängt für einen Körper von dessen gegebenem Zustand

---

1) A. Schuster, Proc. Roy. Soc. **37.** p. 336. 1884.

2) J. J. Thomson, Phil. Mag. (5) **50.** p. 279. 1900.

3) Elektromotorische Kraft ist hier und im Folgenden als Kraft gedacht, welche entgegengesetzt geladene Ionen in entgegengesetzter Richtung treibt.

4) Th. Des Coudres, Wied. Ann. **62.** p. 143. 1897; Ph. Lenard, Wied. Ann. **63.** p. 253. 1897; W. Arnold, Wied. Ann. **61.** p. 327. 1897; E. Wiedemann u. G. C. Schmidt, Wied. Ann. **62.** p. 468. 1897.

ab. Für das folgende sei zunächst angenommen, dass die Grössen, welche den Zustand eines Körpers, speciell eines Gases, bestimmen, constant seien und dass lediglich die Feldstärke variirt werde.

Die elektrische Strömung in einem Gase kann auf ihrer Bahn ultraviolette oder Röntgenstrahlung erregen. Da indes solche Strahlungen nur durch den Stoss bewegter Teilchen ausgelöst werden, so sei ihre ionisirende Wirkung eingeschlossen gedacht in den Ausdruck Ionisirung durch den Stoss bewegter Teilchen. Ausgeschlossen ist im Folgenden dauernde Ionisirung durch secundäre Ursachen, die nicht in der Feldstärke ihren Ursprung haben.

3. *Ionisirungsgrenzwert der Feldstärke, „elektromotorische Gegenkraft“ im Lichtbogen.* — Von verschiedenen Seiten[1]) ist bereits darauf hingewiesen worden, dass eine elektrische Strömung in einem Gas durch Strahlungen, die sie in ihm auslöst, das Gas auf ihrer Bahn leitend mache und so eine Erniedrigung des Spannungsgefälles herbeiführe. Für denjenigen, der in den Kathoden- und Canalstrahlen schnell bewegte Ionen sieht[2]), ist es selbstverständlich, dass die ionisirende Wirkung der bewegten Ionen nicht bloss an der Kathode, sondern in allen Teilen der Strombahn sich zeigen müsse. Es sei wiederholt, dass wir A. Schuster (l. c.) die Ansicht verdanken, dass durch den Stoss bewegter elektrischer Teilchen neutrale Teilchen in leitfähige Partikeln oder Ionen zerlegt werden.

J. J. Thomson[3]) ist in einer jüngst veröffentlichten Arbeit soweit gegangen, die Ionisirung eines Gases ausschliesslich auf Rechnung der bewegten Ionen zu setzen, und hat die wichtige Meinung ausgesprochen, dass die Ionisirung nur dann erfolgen könne, wenn die Geschwindigkeit der Ionen und darum die elektrische Feldstärke oberhalb eines gewissen kritischen Wertes liege. Einen Grund für diese Vorbedingung hat er indes nicht angegeben.

Nun muss man wohl ebenfalls der Ansicht sein, dass in den Fällen der Entladung, die wir beobachten, die elektrische Feldstärke für sich allein nicht ausreiche, die Ionen eines neutralen

1) E. Wiedemann u. G. C. Schmidt, Wied. Ann. **66.** p. 330. 1898.
2) W. Wien, Wied. Ann. **66.** p. 446. 1889.
3) J. J. Thomson, Phil. Mag. (5) **50.** p. 279. 1900.

Teilchens entgegen ihrer wechselseitigen Anziehung zu trennen. Aber andererseits erscheint es doch zu weit gegangen, jede directe Mitwirkung der Feldstärke zu vernachlässigen. Man hat sich den Vorgang der Ionisirung wohl folgendermaassen vorzustellen.

Die Feldstärke richtet die Ionen eines neutralen Teilchens und sucht sie zu trennen. Wenn durch die Wirkung eines heranfliegenden Teilchens, insbesondere eines Ions, die Ionen eines neutralen Teilchens auseinandergetrieben werden, so hülft bei dieser Trennung die Kraft des Feldes mit und leistet entgegen der Ionenanziehung eine Arbeit, deren Wert eine Function ihrer Grösse und der Entfernung ist, in welcher die Ionen in Bezug aufeinander frei sind. Gleichzeitig leistet auch die kinetische Energie des stossenden Teilchens eine Arbeit, indem sie sich ganz oder teilweise in potentielle Energie verwandelt.

Die gesamte Arbeit, Ionisirungsarbeit, die zur Trennung der Ionen eines neutralen Teilchens entgegen ihrer wechselseitigen Anziehung geleistet werden muss, ist gleich der Differenz der potentiellen Energien, welche die Ionen in Bezug aufeinander im freien und im gebundenen Zustand unter den gegebenen Verhältnissen besitzen. Ionisirung eines neutralen Teilchens kann darum nur dann eintreten, wenn die Summe aus der kinetischen Energie eines stossenden Teilchens und der möglichen Ionisirungsarbeit der localen Feldstärke mindestens gleich ist der potentiellen Energie der freien Ionen in Bezug aufeinander (potentielle Energie der gebundenen Ionen als Nullpunkt der Messung genommen). Ist jene Summe kleiner als die potentielle Ionenenergie, so ist eine Ionisirung durch die Feldstärke nicht möglich. Statt jener Summe lässt sich die Feldstärke als Grenzwert der Ionisirung einführen. Nehmen wir nämlich an, dass die kinetische Energie eines Ions auf Grund der gegebenen Temperatur klein ist im Vergleich zu der kinetischen Energie, die es unter der Wirkung der Feldstärke annimmt, so wird sie durch die Grösse der Feldstärke bestimmt, die in der Nähe des zu ionisirenden Teilchens herrscht. Jene Summe erscheint darum als eine Function der Feldstärke, und man kann sagen: Die elektrische Feldstärke vermag unterhalb eines gewissen Grenzwertes keine Ionisirung hervorzubringen. Eine selbstständige Strömung in einem Gas ist aus diesem Grund

für eine bestimmte Stromstärke nur oberhalb eines gewissen Wertes der Spannungsdifferenz der Elektroden möglich.

Insofern die potentielle Ionenenergie eine Function der absoluten Temperatur T und einer für den betreffenden Körper charakteristischen Constante k ist, insofern die kinetische Energie, die ein Ion unter der Wirkung der Feldstärke K annimmt, von einer Constante $\varkappa_p$ bez. $\varkappa_n$ und der mittleren Weglänge l_p bez. l_n des positiven bez. negativen Ions abhängt, lässt sich die Bedingung für das Eintreten der Ionisirung dahin definiren, dass eine Funktion $F(K, T, k, \varkappa, l)$ verschwinden muss. Aus $F(K, T, k, \varkappa_p, l_p) = 0$ bez. $F(K, T, k, \varkappa_n, l_n) = 0$ lassen sich für die verschiedenen Werte von T, k, $\varkappa$ und l die Ionisirungsgrenzwerte $(K_0)_p$ bez. $(K_0)_n$ für das bewegte positive bez. negative Ion berechnen.

Es ist schwierig, die Grenzspannung (Spannungsdifferenz der Elektroden beim Erlöschen der Strömung) einer selbstständigen Strömung in Gasen durch eine Function darzustellen, da sie auch von den Dimensionen der Entladebahn abhängt. Aber soviel lässt sich auf Grund des Vorstehenden sagen, dass für jede selbstständige Strömung in einem Gas bei gegebenen Umständen, vor allem für eine bestimmte Stromstärke ein Wert der Spannungsdifferenz der Elektroden besteht, unterhalb dessen die Strömung nicht möglich ist.

Die elektrische Strömung in einem Dampf haben wir in eine Reihe zu stellen mit der Strömung in einem Gas. Von diesem Gesichtspunkt aus erscheint die sogenannte elektromotorische Gegenkraft des Lichtbogens als die zur Aufrechterhaltung der Ionisirung notwendige Grenzspannung einer selbstständigen Strömung.

4. *Entladungsverzug.* — Die vorstehenden Ueberlegungen haben stillschweigend die nach neueren Versuchen[1]) zutreffende Voraussetzung, dass schon vor dem Eintreten der Wirkung der Feldstärke einige freie Ionen aus irgend welchen Gründen vorhanden sind; diese werden dann von der Feldstärke in Bewegung gesetzt und bringen mit dieser zusammen durch ihren Stoss Ionisirung hervor.[2]) Sind keine freien Ionen vorhanden,

---

1) W. Linss, Elektrotechn. Zeitschr. **11.** p. 506. 1898; J. Elster und H. Geitel, Ann. d. Phys. **2.** p. 425. 1900.

2) J. J. Thomson, Phil. Mag. (5) **50.** p. 279. 1900.

so muss die Feldstärke so weit anwachsen, bis sie schliesslich gleich der Anziehungskraft der Ionen im neutralen Teilchen geworden ist. Dann aber sinkt sie beim Eintritt der Ionisirung und Entladung wieder und kann ohne Erlöschen der Ionisation soweit erniedrigt werden, bis der aus den Gleichungen $F = 0$ sich ergebende Grenzwert erreicht ist.

Je mehr secundär erzeugte Ionen die Feldstärke vorfindet, desto schneller kann sie die Ionisirung herbeiführen. Findet sie nur wenige vor, so kann sie den Ionisirungsgrenzwert beträchtlich übersteigen, ohne dass Ionisirung und damit Entladung eintritt. Darin liegt die Erscheinung des Entladungsverzuges begründet. Liegt ein solcher vor, so kann die Entladung, wie bekannt ist, erleichtert oder ausgelöst werden, indem vorübergehend eine höhere elektrische Spannung, eine zweite Entladung, höhere Temperatur, oder eine ionisirende Strahlung (Röntgen-, Becquerelstrahlen, ultraviolettes Licht) zur Wirkung auf die Entladebahn gebracht wird.

Ferner ist folgendes klar. Mit Rücksicht auf den Entladungsverzug thut man nicht gut, Grenzwerte der Feldstärke für Ionisirung oder Grenzwerte der Spannung selbstständiger Strömungen von bestimmter Stärke bei allmählicher Erhöhung der Spannung zu bestimmen; sondern man hat die Entladung erst einzuleiten und dann die Spannung unter Constanthaltung der Stromstärke langsam zu erniedrigen, bis die Entladung oder Strömung erlischt. Der Wert der Spannung im Moment des Erlöschens ist der gesuchte Grenzwert.

5. *Stationäre Ionisirung und stationäre Strömung.* — Es ist selbstverständlich, dass die directe und indirecte Ionisirung durch die Feldstärke nicht bloss zur Einleitung einer Entladung, sondern auch innerhalb und während einer selbstständigen Strömung wirksam sein muss, damit diese überhaupt bestehen kann.

Die Ionisation kann bei gegebener elektromotorischer Kraft nicht unbegrenzt zunehmen; es werden nämlich Ionen aus neutralen Teilchen nicht bloss neu gebildet, sondern es verschwinden auch beständig Ionen, indem sie sich wieder zu elektrisch neutralen Teilchen vereinigen. Stationäre Ionisation ist dann vorhanden, wenn in der Zeiteinheit ebensoviele freie Ionen in der Volumeneinheit neu auftreten als verschwinden.

Bezeichnen wir den Vorgang der Wiedervereinigung mit

Molisirung und nehmen zunächst an, dass die Zahl der freien Ionen in der Volumeneinheit lediglich durch Ionisirung und Molisirung geändert werde; auch soll nur eine Art positiver und negativer Ionen auftreten, wie ja bereits im Vorausgehenden stillschweigend angenommen wurde.

Die Zahl der freien Ionen, welche durch Ionisirung neu entstehen, ist eine Function der Anzahl n_p bez. n_n der vorhandenen freien positiven bez. negativen Ionen, der Feldstärke K, der absoluten Temperatur T, einer für den Körper charakteristischen Constante k, der freien Weglängen l_p bez. l_n, zweier für die zwei Ionenarten charakteristischen Constante $\varkappa_p$ bez. $\varkappa_n$ und endlich der Zeit t. Die Zahl der durch Ionisirung in der Volumeneinheit neu entstehenden Ionen lässt sich also darstellen als eine Function $f = f_p(K, T, k, \varkappa_p, l_p, t) + f_n(K, T, k, \varkappa_n, l_n, t)$. Hierzu ist die Bedingung zu nehmen $f_p = 0$ für $K < (K_0)_p$ und $f_n = 0$ für $K < (K_0)_n$; $(K_0)_p$ und $(K_0)_n$ sind die aus den Gleichungen $F = 0$ sich ergebenden Grenzwerte. Die Zahl der durch Molisirung verschwindenden Ionen lässt sich geben durch eine Function $\varphi(K, T, k, \varkappa_p, \varkappa_n, l_p, l_n, t)$.

Im stationären Zustand der Ionisation muss gelten

$$\frac{df}{dt} - \frac{d\varphi}{dt} = 0.$$

Diese Gleichung ist z. B. auf eine längere ungeschichtete positive Lichtsäule anzuwenden.

In einem stationär durchströmten und darum stationär ionisirten Gas wird nun die Zahl der Ionen ausser durch Ionisirung und Molisirung im allgemeinen auch noch durch die Diffusion und die elektrische Concentrationsänderung[1]) beeinflusst. Die Zahl der durch Diffusion bez. die elektrische Concentrationsänderung verschwindenden und neu auftretenden Ionen sei durch die Function χ bez. ψ dargestellt. Die Bedingungsgleichung für stationäre Ionisation ist dann im allgemeinen Fall

$$\frac{df}{dt} - \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\chi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} = 0.$$

Es ist die Frage aufgeworfen worden, ob eine stationäre elektrische Strömung in Gasen möglich sei, und von der einen

1) J. Stark, Physik. Zeitschr. 2. p. 4 u. 133. 1900; Ann. d. Phys. 3. p. 510. 1900.

Seite ebenso entschieden verneint, als von der anderen bejaht worden. Hierzu ist folgendes zu bemerken.

Eine stationäre unselbstständige Strömung in einem Gase ist möglich und dann vorhanden, wenn die durch secundäre Hülfsmittel herbeigeführte Ionisation und die elektromotorische Kraft des Stromkreises zeitlich constant sind.

Eine stationäre selbstständige Strömung in einem Gase ist ebenfalls möglich; sie tritt dann ein, wenn die obigen Gleichungen für stationäre Ionisation erfüllt, die elektromotorischen Kräfte und die gegebenen Verhältnisse zeitlich constant sind. Jene Gleichungen lassen sich aber erfüllen, wenn die Feldstärke genügend hoch gewählt wird.

6. *Unipolare Ionisirung.* — Sehen wir eine Ursache der Ionisirung in dem Stoss bewegter Teilchen, so müssen wir die Fähigkeit zu ionisiren sowohl bewegten positiven wie negativen Ionen zuschreiben. Dieser Forderung ist bereits Rechnung getragen worden durch Aufstellung zweier Gleichungen $F = 0$. Hier soll nun der Unterschied zwischen den positiven und negativen Ionen hinsichtlich ihrer ionisirenden Wirkung näher besprochen werden.

Es ist möglich, dass die kinetische Energie der negativen Ionen in verdünnten Gasen unter gleichen gegebenen Umständen und gleicher elektromotorischer Kraft im Mittel grösser werden kann als diejenige der positiven. Dies ist sicherlich dann der Fall, wenn die mittlere freie Weglänge des negativen Ions unter gleichen Umständen grösser ist als die des positiven; die mittlere kinetische Energie unter der Wirkung der Feldstärke K des positiven bez. negativen Ions ist nämlich $K . l_p$ bez. $K . l_n$. Ein Unterschied der mittleren freien Weglängen ist jedenfalls theoretisch wahrscheinlich, wahrscheinlicher als, dass die freien Weglängen gleich sind. Doch darüber hat die Erfahrung zu entscheiden.

Wir nehmen an, dass die Gleichungen für den Eintritt der Ionisirung $F(K, T, k, \varkappa_p, l_p) = 0$ und $F(K, T, k, \varkappa_n, l_n) = 0$ nicht identisch seien, dass vielmehr $l_n > l_p$ sei. Die Folge davon ist, dass der Ionisirungsgrenzwert $(K_0)_n$ der Feldstärke für das negative Ion kleiner ist als derjenige $(K_0)_p$ für das positive. Es ist also dann $(K_0)_p > (K_0)_n$.

Bezeichnet K die wirklich vorhandene elektromotorische

Kraft und ist $(K_0)_n < K < (K_0)_p$, so erfolgt an der betrachteten Stelle Ionisirung nur durch die negativen Ionen.

Ist $K > (K_0)_p > (K_0)_n$, so bewirken die positiven wie negativen Ionen Ionisirung, aber diese in grösserem Maasse als jene.

Hat zwischen zwei Elektroden in einem verdünnten Gas eine selbstständige Strömung statt und ist $(K_0)_p$ bedeutend grösser als $(K_0)_n$, so wird die Form der Strömung abhängig von der Bewegung der negativen Ionen. Da diese von der Kathode herkommen, so werden die einzelnen Abschnitte (Schichten) der Strömung in ihrer Lage bestimmt durch diejenige der Kathode; sie müssen mit dieser fest verbunden[1]), aus ihr hervorzuquellen erscheinen. Auch hängt dann die Stärke des elektrischen Stromes in erster Linie von den Verhältnissen an und in der Nähe der Kathode ab.[2])

Eine andere Folge der unipolaren Ionisirung, die unipolare Entladung, wird weiter unten besprochen werden.

7. *Gangunterschied zwischen Ionisirung und Feldstärke.* — In den vorausgehenden Abschnitten wurde stillschweigend immer angenommen, dass das Maass der kinetischen Energie und damit der Ionisirung abhänge von der Feldstärke an dem Orte der Ionisirung. Dies ist nicht allgemein richtig. Gemäss der an anderen Stellen entwickelten Anschauungen über die Eigenart der elektrischen Strömung in Gasen[3]) ist nämlich die kinetische Energie der Ionen in Gasen im allgemeinen nicht mehr proportional der an Ort und Stelle herrschenden Kraft.

Indem ein Ion unter der Wirkung der Feldstärke wachsende kinetische Energie annimmt, legt es eine Strecke Weges zurück; sinkt längs desselben die Feldstärke, ohne dass es Energie durch Zusammenstoss einbüsst, so besitzt es an dem Ort mit kleinerer Feldstärke grössere kinetische Energie als an den vorausgehenden Orten mit grösserer Feldstärke. Dort kann es darum trotz der kleineren Feldstärke eine grössere ionisirende Wirkung haben als hier. Allgemein kann man sagen: Der Ort der ionisirenden Wirkung eines Ions ist gegen den Ort, wo ihm die Feldstärke kinetische Energie erteilt hat, ver-

1) E. Goldstein, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin 1876. p. 292.

2) Vgl. J. Stark, Ann. d. Phys. 1. p. 435. 1900.

3) J. Stark, Physikal. Zeitschr. 1. p. 441. 1900; 2. p. 132. 1900.

schoben und zwar in der Bewegungsrichtung des Ions. Die mittlere Grösse des Gangunterschiedes zwischen der Ionisirung und der Feldstärke hängt ab von der mittleren freien Weglänge des Ions.

Da wo die Feldstärke räumlich constant ist, wie in der ungeschichteten positiven Lichtsäule, offenbart sich die Verschiebung zwischen Kraft und Ionisirung nicht; hier kann darum die mittlere kinetische Energie der Ionen und darum ihre ionisirende Wirkung durch die örtliche Feldstärke dargestellt werden. Wo dagegen die Kraft räumlich variirt, ist dies nicht mehr möglich. Die relativen Maxima der Ionisirung sind gegen die relativen Kraftmaxima in der Bewegungsrichtung der Ionen verschoben. So rührt beispielsweise die Ionisation in der negativen Glimmschicht zum grösseren Teil von den negativen Ionen her, welche unmittelbar an der Kathode eine grosse kinetische Energie angenommen haben.

Der Gangunterschied zwischen Ionisirung und Feldstärke spielt bei der Schichtung eine wichtige Rolle. Wie die elektrische Concentrationsänderung bewirkt er nämlich, dass an den Stellen der Kraftminima, den leuchtenden Schichten, die Ionisation auf einem gewissen Wert bleibt. Er ist also einer der Factoren, welche die eigentümliche Verteilung der Ionisation in einer geschichteten Entladung aufrecht erhalten und diese selbst bedingen.

8. *Einfluss der Temperatur auf die Ionisirung.*[1]) — In den Gleichungen, welche den Ionisirungsgrenzwert der Feldstärke liefern, ist die absolute Temperatur enthalten. Deren Einfluss auf jenen Grenzwert kann erst dann exact und quantitativ festgestellt werden, wenn jene Gleichungen bekannt sind. Doch kann auch ohne deren Kenntnis wenigstens die Richtung jenes Einflusses angegeben werden.

Es ist möglich, ja wahrscheinlich, dass mit steigender Temperatur die potentielle Energie der gebundenen Ionen eines neutralen Teilchens zunimmt. Die Differenz der potentiellen Energien der freien und gebundenen Ionen ist dann kleiner und darum ebenfalls die Ionisirungsarbeit. Dies würde be-

1) Dieser und der folgende Abschnitt sollen eine Ergänzung einer früheren Abhandlung (Wied. Ann. 68. p. 919. 1899) sein, insbesondere eine dort gemachte Andeutung (p. 930) näher ausführen.

reits eine Erniedrigung der Grenzfeldstärke mit steigender Temperatur zur Folge haben. Aber da hierüber nichts genaueres bekannt ist, so sei nicht weiter davon gesprochen.

Eine andere Ueberlegung sei hingegen angestellt. Es wurde oben angenommen, dass durch den Stoss bewegter Teilchen Ionisirung auf Kosten der kinetischen Energie der Teilchen erfolge. Es wurde bis jetzt angenommen, dass die stossenden Teilchen elektrisch oder Ionen seien und dass sie ihre kinetische Energie wesentlich der Wirkung der Feldstärke verdanken. Wenn aber die kinetische Energie des stossenden Teilchens überhaupt das Ausschlaggebende ist, so müssen wir einerseits auch bewegten neutralen Teilchen die Fähigkeit zu ionisiren zusprechen und andererseits von der Abkunft der kinetischen Energie des stossenden Teilchens absehen. Diese Verallgemeinerung verlangt eine Modification der oben angedeuteten Gleichungen. Es seien indes hier nur die leitenden Gesichtspunkte angegeben.

Ist die Feldstärke Null, so kann durch blosse Erhöhung der Temperatur Ionisirung bewirkt werden[1]; dies tritt offenbar dann ein, wenn die kinetische Energie eines stossenden Teilchens grösser ist als die potentielle Ionenenergie bei der erhöhten Temperatur.

Ist die Feldstärke nicht Null, so ist die kinetische Energie der zufällig vorhandenen freien Ionen eine Summe aus zwei Teilen, einer Grösse, welche proportional ist der gegebenen absoluten Temperatur des Körpers, und der mittleren kinetischen Energie, welche das Ion der Wirkung der Feldstärke verdankt. Die mittlere kinetische Gesamtenergie eines Ions ist darum grösser als die eines neutralen Teilchens und darum wird Ionisirung durch die Feldstärke immer früher eintreten als die rein thermische Ionisirung. Und was den Einfluss der Temperatur auf den Ionisirungsgrenzwert der Feldstärke betrifft, so ist folgendes verständlich. Bei constanter Feldstärke bedeutet Erhöhung der Temperatur Vergrösserung der kinetischen Energie der freien Ionen. Die kinetische Gesamtenergie eines Ions hat zum Ende der Ionisirung oberhalb eines gewissen Wertes zu liegen; nimmt darum der eine Summand, der thermo-

---

1) Vgl. Literatur, J. Stark, Wied. Ann. **68.** p. 942. 1899.

kinetische Teil, zu, so kann der andere, der elektrokinetische Teil, und damit der Ionisirungsgrenzwert der Feldstärke abnehmen. Wir können darum sagen, dass mit steigender Temperatur eines Körpers der Grenzwert der Feldstärke, bei welchem Ionisirung und damit Entladung eintritt (Entladespannung), kleiner und schliesslich Null wird. Dies bestätigt der Versuch.[1])

9. *Unipolare Entladung an glühenden Körpern.* — Glühende Körper elektrisiren sich in einem Gas je nach Umständen positiv oder negativ, während im Gase Ionen von entgegengesetzter Ladung auftreten. Diese Elektrisirung bewirkt, dass ein dem glühenden Körper genäherter Leiter oder der glühende Körper selbst eine elektrische Ladung allmählich verliert; dabei treten je nach dem Vorzeichen der Elektrisirung gewisse Unipolaritäten[2]) auf. Nicht diese Erscheinung sei hier unter unipolarer Entladung verstanden, sondern folgende.

Wird auf einem von Gas umgebenen Leiter die Spannung (absolut genommen) erhöht, so tritt schliesslich Ionisirung durch die Feldstärke ein und damit eine selbstständige (disruptive) Entladung durch das Gas.

Die Erfahrung zeigt nun, dass der Ionisirungsgrenzwert der Feldstärke oder die Entladespannung an einem glühenden Körper kleiner ist als an einem kalten, dass sie mit steigender Temperatur allmählich bis auf sehr kleine Werte sinkt. Dies steht im Einklange mit dem, was oben über den Einfluss der Temperatur auf den Ionisirungsgrenzwert der Feldstärke gesagt wurde.

Auffallend bleibt indes die Thatsache, dass an glühenden Körpern die Entladespannung für die negative Elektricität beträchtlich kleiner ist als für die positive. Sie scheint sich indes auf Grund der obigen Ausführungen über unipolare Ionisirung ungezwungen in folgender Weise erklären zu lassen.

An der Oberfläche eines glühenden Körpers werden im Gase durch die Wirkung der hohen Temperatur und bei Hellglut auch durch die ultraviolette Strahlung secundär unabhängig von der Feldstärke freie Ionen geschaffen. Ein glühender

---

1) A. Overbeck, Wied. Ann. **60.** p. 193. 1897; J. Stark, Wied. Ann. **68.** p. 922. 1899.

2) Vgl. Literatur, J. Stark, Wied. Ann. **68.** p. 919. 1899.

Körper ist also von einer dünnen unmittelbar an ihm liegenden Atmosphäre ionisirten Gases umgeben. Die freien positiven und negativen Ionen in dieser werden bei vorhandener Ladung des Körpers durch die Feldstärke in entgegengesetzter Richtung in Bewegung gesetzt und wirken dann ionisirend auf neutrale Gasteilchen, sowie die Feldstärke den Ionisirungsgrenzwert erreicht hat. Zu beachten ist jedoch dabei, dass diese ionisirende Wirkung hauptsächlich nur diejenigen Ionen hervorbringen können, welche sich von dem glühenden Körper weg in das Gas hineinbewegen. Da nämlich die ionisirte Gasschicht dünn ist, so kommen die auf den Körper zuwandernden Ionen an diesem bald zum Stillstand; es kann darum nur eine kleine Zahl von ihnen im Gas vorhanden sein. Demgemäss gelangen in der Umgebung eines glühenden Körpers vorzugsweise nur Ionen eines Zeichens zur ionisirenden Wirkung, nämlich diejenigen, welche gleiches Zeichen mit der Ladung des Körpers haben und darum von diesem weg in das Gas wandern.

Da nun die negativen Ionen in Gasen nach den obigen Darlegungen stärker ionisirend wirken als die positiven, so ist gemäss den Auseinandersetzungen über unipolare Ionisirung verständlich, dass der Ionisirungsgrenzwert der Feldstärke oder der absolute Wert der Entladespannung für eine negative Ladung eines glühenden Körpers kleiner ist als für eine positive.

Göttingen, 5. December 1900.

(Eingegangen 14. December 1900.)

---

14. *Ueber das thermoelektrische Verhalten einiger Oxyde und Metallsulfide;* *von Edmund van Aubel.*

Hr. Anton Abt hat kürzlich eine Arbeit über die thermoelektromotorische Kraft einiger Oxyde und Metallsulfide veröffentlicht.[1] Dieser Physiker hat genannte Kraft nach der von Kirchhoff modificirten Poggendorff'schen Compensationsmethode studirt.

Wenn e und e' die elektromotorischen Kräfte zweier zu vergleichender Thermoelemente sind, so bekommt man

$$\frac{e}{e'} = \frac{a}{a'},$$

wobei a und a' die entsprechenden Längen eines gespannten Platindrahtes sind, für welche die Compensation erreicht wird.

Demnach ergeben sich für die Länge a, welche zur thermoelektrischen Kraft des zu beobachtenden Thermoelementes verhältnismässig ist, folgende Werte, welche wir verwenden müssen:

Thermoelemente			Wert des a
Wismut	und	Zink	134,6
"	"	Antimon	199,7
Pyrolusit	"	Wismut	210,6
"	"	Nickel	285,1
"	"	Kohle	315,2
"	"	Zink	331,1
"	"	Eisen	353,9
"	"	Pyrrhotit	370,1
"	"	Antimon	396,9
Pyrrhotit	"	Eisen	11,0
"	"	Antimon	21,7
"	"	Zink	29,7
"	"	Nickel	59,8
"	"	Wismut	178,0
"	"	Chalkopyrit	649,5
Chalkopyrit	und	Wismut	542,2
"	"	Zink	602,6
"	"	Nickel	618,8
"	"	Eisen	667,1
"	"	Antimon	669,3
Pyrit	und	Pyrrhotit	563,2
"	"	Antimon	576,3
"	"	Zink	600,5
"	"	Kohle	615,6
"	"	Eisen	635,9
"	"	Nickel	642,9
"	"	Wismut	731,9
"	"	Pyrolusit	933,2

---

1) A. Abt, Ann. d. Phys. 2. p. 266. 1900.

Der Verfasser der Arbeit, von welcher wir sprechen, hat aus den verschiedenen Werten für a folgende Schlussfolgerungen (l. c. p. 278) gezogen:

„Vergleicht man die mitgeteilten Resultate miteinander, so erhält man für die von mir untersuchten Metallsulfide und Metalloxyde folgende Spannungsreihe:

—

Chalkopyrit	Kupfer	Eisen
Pyrolusit	Cadmium	Pyrrhotit
Wismut	Nickelerz	Antimon
Zink	Kohle	Pyrit
Nickel	(für Bogenlicht)	+

Die Glieder dieser Reihe folgen dem Gesetze der thermoelektrischen Spannungsreihe der Metalle mit hinreichender Annäherung." So ist z. B.

Pyrolusit / Kohle	+	Kohle / Pyrit	=	Pyrolusit / Pyrit
315,2	+	615,6	=	930,8 (beob. 933,2),

ferner

Wismut / Zink	+	Zink / Pyrit	=	Wismut / Pyrit
134,6	+	600,5	=	735,1 (beob. 731,9).

Mein Zweck war, *diese letztere Folgerung* von A. Abt mit Hülfe anderer aus den Ergebnissen dieser Messungen herausgegriffener Beispiele zu *prüfen.*

Stellen wir zunächst fest, dass der genannte Physiker findet:

für Pyrit / Zink $a = 600{,}5$
„ Pyrit / Eisen $a = 635{,}9$

Das Eisen müsste also in der thermoelektrischen Spannungsreihe vom Pyrit weiter entfernt sein als das Zink. Aber man hat andererseits:

für Chalkopyrit / Eisen $a = 667{,}1$
„ Chalkopyrit / Zink $a = 602{,}6$
„ Pyrrhotit / Zink $a = 29{,}7$
„ Pyrrhotit / Eisen $a = 11{,}0$
„ Pyrolusit / Eisen $a = 353{,}9$
„ Pyrolusit / Zink $a = 333{,}1$

Die Ergebnisse der drei letzten Reihen zeigen dagegen, dass Zink und Eisen in der thermoelektrischen Spannungs-

reihe die Stellen einnehmen, welche ihnen A. Abt eingeräumt hat. Analoge Fälle bieten sich weiter. So ergeben die für die Thermoelemente Pyrrhotit / Nickel und Pyrrhotit / Zink einerseits, Pyrit / Eisen und Pyrit / Zink andererseits erhaltenen Werte für Nickel, Zink und Eisen *andere Plätze in der thermoelektrischen Spannungsreihe* als die, welche ihnen angewiesen sind.

Berechnen wir nunmehr *die Werte der elektromotorischen Kraft der Thermoelementen* Nickel / Eisen, Zink / Eisen, Wismut / Antimon und Wismut / Pyrrhotit durch Aufstellung der Summe oder der Differenz der elektromotorischen Kräfte geeignet zusammengestellter Verbindungen, so erhalten wir für die verschiedenen Werte der Länge a folgende Ergebnisse:

Thermoelement Nickel / Eisen.

1.	Pyrit / Nickel	–	Pyrit / Eisen	=	Nickel / Eisen
	642,9	–	635,9	=	7,0
2.	Chalkopyrit / Eisen	–	Chalkopyrit / Nickel	=	Nickel / Eisen
	667,1	–	618,8	=	48,3
3.	Pyrrhotit / Nickel	–	Pyrrhotit / Eisen	=	Nickel / Eisen
	59,8	–	11,0	=	48,8
4.	Pyrolusit / Eisen	–	Pyrolusit / Nickel	=	Nickel / Eisen
	353,9	–	285,1	=	68,8

Die Länge a ist also, bez. je nach dem Falle,

7,0 48,3 48,8 68,8.

Thermoelement Zink / Eisen.

1.	Chalkopyrit / Eisen	–	Chalkopyrit / Zink	=	Zink / Eisen
	667,1	–	602,6	=	64,5
2.	Pyrrhotit / Zink	–	Pyrrhotit / Eisen	=	Zink / Eisen
	29,7	–	11,0	=	18,7
3.	Pyrolusit / Eisen	–	Pyrolusit / Zink	=	Zink / Eisen
	353,9	–	331,1	=	22,8

Die Länge a wechselt also zwischen 18,7 22,8 und 64,5.

Thermoelement Wismut / Antimon.

1.	Chalkopyrit / Antimon	–	Chalkopyrit / Wismut	=	Wismut / Antimon
	669,3	–	542,2	=	127,1
2.	Pyrit / Wismut	–	Pyrit / Antimon	=	Wismut / Antimon
	731,9	–	576,3	=	155,6
3.	Pyrrhotit / Wismut	+	Pyrrhotit / Antimon	=	Wismut / Antimon
	178,0	+	21,7	=	199,7
4.	Pyrolusit / Antimon	–	Pyrolusit / Wismut	=	Wismut / Antimon
	396,9	–	210,6	=	186,3

Die Länge a ist also je nachdem 127,1 155,6 186,3 199,7. Die directe Prüfung der Thermoelemente Wismut/Antimon hat, nach A. Abt, ergeben: $a = 199,7$.

Thermoelement Pyrrhotit/Wismut.

1. Pyrit/Wismut	–	Pyrit/Pyrrhotit	=	Pyrrhotit/Wismut
731,9	–	563,2	=	168,7
2. Chalkopyrit/Pyrrhotit	–	Chalkopyrit/Wismut	=	Pyrrhotit/Wismut
649,5	–	542,2	=	107,3
3. Pyrolusit/Pyrrhotit	–	Pyrolusit/Wismut	=	Pyrrhotit/Wismut
370,1	–	210,6	=	159,5

Die Länge a ist hier 107,3 159,5 oder 168,7; die directe Messung hatte $a = 178,0$ ergeben.

Diese Beispiele beweisen, dass die Schlussfolgerung der Arbeit von A. Abt sich keineswegs bestätigt, sowie um klarzustellen, dass *die von ihm geprüften Körper nicht dem Gesetze unterworfen sind, welchem die thermoelektrische Spannungsreihe der Metalle gehorcht.*

(Eingegangen 27. November 1900.)

15. *Ueber die Molecularwärmen zusammengesetzter Körper und das Gesetz Neumann-Joule-Kopp;* *von Edmund van Aubel.*

Stefan Meyer[1]) hat eine Arbeit über das Gesetz Neumann-Joule-Kopp, betreffend die Additivität der Atomwärmen, veröffentlicht, deren Schlussfolgerung er in folgendes Gesetz zusammenfasst:

Die Molecularwärme eines zusammengesetzten Körpers ist gleich der Summe der Atomwärmen seiner Bestandteile, wenn das Molecularvolumen gleich der Summe der Atomvolumina ist. Im Falle einer starken Volumencontraction ist die Molecularwärme niedriger als die Summe der Atomwärmen, während eine beträchtliche Volumendilatation einer Molecularwärme entspricht, welche grösser ist als die Summe der Atomwärmen.

Ich halte es für nützlich, in nachfolgender Tabelle, einige Ergänzungen dieses Gesetzes aufzustellen, wobei bemerkt sei, dass die Columnen 2 und 3 nach den Ergebnissen von G. A. Hagemann[2]) angeführt werden. Die Molecularwärmen sind der Arbeit Regnault's[3]) entnommen. Die letzte Columne erlangte ich unter Zuhülfenahme der von W. Ostwald[4]) gegebenen Atomwärmen.

Substanzen und chemische Formeln	Molecular-volumen	Summe der Atom-volumina	Molecular-wärmen	Summe der Atom-wärmen
Bromsilber AgBr	29,6 $<$	35,6	13,88 $>$	12,78
Jodkalium KJ	53,9 $<$	70,5	13,60 $>$	13,33
Quecksilberjodür Hg_2J_2	84,8 $>$	80,4	25,85 $<$	26,48
Quecksilberjodid HgJ_2	74,2 $>$	65,7	19,06 $<$	20,10

1) St. Meyer, Ann. d. Phys. **2.** p. 135. 1900.

2) G. A. Hagemann, Ueber Volumänderungen bei chemischen Processen der festen und flüssigen Elemente, p. 7. Friedländer, Berlin 1900.

3) V. Regnault, Ann. de chim. et de phys. (3) **1.** p. 177 u. 178. 1841.

4) Vgl. W. Ostwald, Lehrb. d. allgem. Chem. **1.** p. 983—984. 1891.

Bromsilber und Jodkalium zeigen also eine Contraction des Volumens und ihre Molecularwärmen sind grössere als die Summe der Atomwärmen.

Die Jodquecksilberverbindungen Hg_2J_2 und HgJ_2 dagegen zeigen eine Dilatation des Volumens, aber ihre Molecularwärmen sind geringere als die Summe der entsprechenden Atomwärmen. Uebrigens sind die beobachteten Differenzen zu bedeutend, als dass man dieselben Irrtümern bei den Versuchen zuschreiben müsste.

Andererseits kann die specifische Wärme der Legirungen meist mit Hülfe der sogenannten Mischungsregel bestimmt werden, wie Regnault bewiesen hat, oder, was auf dasselbe herauskommt, durch das Gesetz Neumann-Joule-Kopp. Ausnahme davon machen die Eisen-Antimonlegirungen, wie J. Laborde dargelegt hat.[1] Uebrigens bilden sich diese Legirungen unter beträchtlicher Volumenverminderung[2]) und doch sind die beobachteten specifischen Wärmen höher als die durch Berechnung erhaltenen.

1) Vgl. E. van Aubel, Physik. Zeitschr. 1. p. 452. 1900.
2) J. Laborde, Journal de physique (3) 5. p. 547. 1896.

(Eingegangen 27. November 1900.)

16. *Zur Theorie der Strahlung; Bemerkungen zur Kritik des Hrn. Planck;* *von W. Wien.*

Hr. Planck[1]) hat zwei von mir über die Strahlung schwarzer Körper hingestellte Sätze einer Kritik unterzogen. Einer dieser Sätze bezog sich auf die Umkehrbarkeit der Strahlung bei freier Ausbreitung und behauptete die Nichtumkehrbarkeit, wenn keine gleichzeitige Arbeitsleistung erfolgt, während Hr. Planck diesen Vorgang für umkehrbar hält. Bei einer mündlichen Besprechung hat sich feststellen lassen, dass diese Meinungsverschiedenheit im wesentlichen fortfällt, wenn eine präcise Definition eines nichtumkehrbaren Processes gegeben wird. Die Meinungsverschiedenheit war in ihren wesentlichen Punkten dadurch hervorgerufen, dass wir nicht dasselbe unter einem nichtumkehrbaren Processe verstanden.

Wenn wir ein strahlendes Flächenelement in den Mittelpunkt einer spiegelnden Hohlkugel legen, sodass alle Strahlen wieder zurückreflectirt werden und wir lassen die Strahlung unter Ausschluss weiterer Emission sich in einen grösseren Raum hinein ausbreiten und von einer Kugel mit grösserem Radius reflectiren, so ist dieser Vorgang sicher umkehrbar, wenn das Element so klein ist, dass alle Strahlen als radial betrachtet werden können. Wenn dagegen die Ausdehnung des Elementes nicht ganz vernachlässigt wird, sodass Strahlen unter verschiedenem Winkel auf die Hohlkugel fallen, so werden die verschieden gerichteten Strahlenbündel verschieden lange Wege bis zur zweiten Kugel zurückzulegen haben und infolge dessen nicht alle gleichzeitig in die erste Kugel wieder zurückkehren. Betrachten wir zwei Strahlenbündel, die auf

---

1) M. Planck, Ann. d. Phys. 3. p. 764. 1900.

verschieden langen Wegen in ihre ursprüngliche Lage zurückkehren, so werden sie diese jemals gleichzeitig nur dann erreichen, wenn das Verhältnis der Weglängen durch eine rationale Zahl ausgedrückt wird. Bei einer ausgedehnten Strahlungsquelle wird sich daher der ursprüngliche Zustand niemals genau wieder herstellen. Es lässt sich aber auch dieser Vorgang als umkehrbar ansehen, indem nach endlicher Zeit sich von selbst der ursprüngliche Zustand angenähert herstellt. Ist die Zeit unbeschränkt, so ist keine Grenze für die erreichbare Annäherung gegeben. Wenn man die Auffassung hat, dass durch conservative Vorgänge, wenn sie auch in der grössten Unordnung vor sich gehen, Irreversibilität nicht hervorgerufen werden kann, so wird man freie Ausbreitung in dem erwähnten Sinne für umkehrbar ansehen müssen.

Der zweite Satz bezog sich auf die Ausnahmestellung der magnetischen Drehung der Polarisationsebene und behauptete, dass hierbei eine uncompensirte Verwandlung im Clausius'schen Sinne möglich sei. In meiner ursprünglichen Darstellung ist eine Lücke enthalten, indem die Betrachtung des Strahlenganges nicht vollständig angegeben war. Hierdurch ist durchaus gerechtfertigt, was die Herren Brillouin und Planck gegen die gegebene Darstellung angeführt haben. Es war vergessen worden zu sagen, dass die magnetische Drehung erst dann von Einfluss ist, wenn man die von jedem Element ausgehenden Kegel betrachtet. Ich habe nun in Ergänzung meiner ersten Darstellung gezeigt, dass zwei Elemente, die durch ein magnetisches Medium hindurchstrahlen, einander nicht gleich viel Strahlung zusenden.

Hr. Planck hält nun für möglich, dass Strahlen, die gar nicht von dem einen Element in der Richtung zum anderen zugestrahlt werden, die Compensation liefern können. Schliesst man die ganze Strahlung in einen Raum mit adiabatischen Wänden ein, so muss aber das eine Element jedenfalls Ersatz für den Ausfall an Strahlung bekommen und zwar müssen die Strahlen, die den Ersatz leisten, nach dem Kirchhoff'schen Satze in derselben Richtung auffallen, wie es die Strahlen thun würden, die von dem anderen Element zugestrahlt würden, wenn die magnetische Drehung nicht vorhanden wäre. Es ist mir nicht möglich gewesen zu sehen, woher diese Strahlen

kommen sollen. Ich gebe indessen gern zu, dass eine geschärfte Kritik namentlich einer so fundamentalen Frage gegenüber durchaus geboten ist und eine erneute Untersuchung der Frage, wo in diesem Falle die Compensation steckt, erscheint dringend wünschenswert, doch bin ich selbst noch nicht zu einem befriedigenden Ergebnis gelangt.

(Eingegangen 29. December 1900.)

Anmerkung bei der Correctur. Von den Herren Jahnke, Lummer und Pringsheim[1]) ist soeben eine Entgegnung auf meine letzten Ausführungen[2]) erschienen, in der im wesentlichen die früheren Behauptungen wiederholt werden. Ich halte es daher für unnötig, noch einmal darauf einzugehen. Die hinzugefügte Bemerkung, die sich gegen die von mir ausgesprochene Vermutung richtet, dass man vielleicht eine Teilung des Strahlungsgesetzes vornehmen könnte, beruht auf einem Missverständnis. Ich habe ausdrücklich hinzugefügt, dass Abweichungen von dem aus molecularen Hypothesen entwickelten Gesetz mit zunehmender Temperatur zu kleineren Wellenlängen vorrücken müssen und damit ausgesprochen, dass bei einer festgehaltenen Wellenlänge in diesem Falle bei weiter steigender Temperatur zu den molecularen Wirkungen andere hinzukommen müssen, die sich bei tieferer Temperatur nur bei den langen Wellen zeigen.

1) E. Jahnke, O. Lummer und E. Pringsheim, Ann. d. Phys. 4. p. 225. 1901.
2) W. Wien, Ann. d. Phys. 3. p. 530. 1900.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1901. № 3.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 4.

1. *Ueber die Erzeugung und Messung von Sinusströmen; von Max Wien.*

Bei elektrischen Schwingungen, die durch Condensatorentladungen erregt werden, kann man den Bereich der Schwingungsdauer in ausserordentlich weiten Grenzen variiren. Jedoch bildet die starke Dämpfung, welche eine voll ausgebildete Resonanz nicht zu stande kommen lässt, für viele Versuche ein Hindernis. So würde z. B. die Telegraphie ohne Draht nur in dem Falle für allgemeine Zwecke brauchbar sein, wenn die von dem Oscillator ausgesandten elektrischen Wellen nur einen einzigen bestimmten Empfänger erregen würden, alle anderen hingegen dafür unempfindlich wären. Der Gedanke Marconi's, zu diesem Zwecke die Resonanz zu benutzen und Geber und Empfänger aufeinander einzustimmen, kann, wie sich von vornherein übersehen lässt, wegen der starken Dämpfung der Erregerschwingungen nur eine unvollkommene Lösung des Problems ermöglichen.

V. Bjerknes[1]) berechnet das logarithmische Decrement des von Hertz in seiner Arbeit „Ueber sehr schnelle elektrische Schwingungen" benutzten Oscillators zu 0,8. Nehmen wir an, dass etwa 10 mal in der Secunde eine die Schwingungen hervorrufende Entladung erfolgte, so würden also 10 mal in der Secunde elektrische Oscillationen entstehen mit einer Schwingungsdauer, die nach Hundertmillionstel Secunden rechnet, und deren Amplitude nach fünf Schwingungen schon auf weniger als $^1/_{50}$ ihres Anfangswertes gefallen ist.

Ein akustisches Analogon würde etwa in dem stark gedämpften Tone, der beim Oeffnen eines Thermometerfutterales entsteht, zu finden sein, und dieser Ton müsste alle 24 Stunden einmal erregt werden: wenn man mit einer solchen Tonquelle

1) V. Bjerknes, Wied. Ann. 55. p. 167. 1895.

Versuche über akustische Resonanz und Schwebungen machen wollte, würde man wohl nicht allzu weit kommen.

Das Ideal elektrischer Schwingungen wären continuirliche, reine Sinusströme von beliebiger Stärke, deren Schwingungszahl in beliebigen Grenzen von ganz langsamen bis über die des sichtbaren Lichtes hinaus variirt werden könnte.

Der F. Kohlrausch'sche Sinusinductor liefert zwar annähernd reine Sinusströme, jedoch lässt sich die Frequenz nicht über 150 steigern. Bei einem Inductorium, dessen primärer Kreis akustisch unterbrochen wird, kann man bis zu etwa 1000 Unterbrechungen pro Secunde kommen, der Inductionsstrom ist aber auch nicht annähernd sinusförmig. Die technischen Wechselstromerzeuger gehen kaum über 100 Schwingungen in der Secunde hinaus; in letzter Zeit hat Ebert[1]) mit einem Hummel'schen Gleichstrom-Wechselstromumformer eine Frequenz von 4—500 erzielt, jedoch ist auch diese Schwingungszahl noch nicht hoch genug, um ausgesprochene Resonanzerscheinungen hervorzurufen.

Im Folgenden soll eine Methode angegeben werden, um Wechselströme mit einer *Schwingungszahl bis zu 8500 in der Secunde* zu erzeugen. Keine der höheren Componenten übersteigt den Wert von 1 Proc. der Amplitude des Grundstromes, sodass die Ströme *mit grosser Annäherung sinusförmig sind.* Die *Amplitude erreicht bei 100 Ohm Widerstand im Schliessungskreis 0,2 Ampère,* was für die meisten Messungen genügt. Für Versuche, bei denen nicht so vollkommen reine und so starke Sinusströme erforderlich sind, lässt sich mit demselben Apparat auch die doppelte Frequenz, also 17000 Schwingungen pro Secunde erreichen.

A. Beschreibung der Wechselstromsirene.

Das *Princip* ist kurz folgendes: eine runde Scheibe aus Holz oder Messing besitzt eine Reihe von im Kreise, wie die Löcher einer Sirene, angeordneter Eisenanker. Die Scheibe dreht sich zwischen den Polen eines Elektromagneten. Jedesmal, wenn ein Eisenanker an den Polen vorbeikommt, ändert sich in dem Elektromagneten die Zahl der magnetischen Kraftlinien, und es entsteht in einer um den Pol gewickelten Spule

1) H. Ebert, Wied. Ann. **69**. p. 372. 1899.

ein Wechselstrom, dessen Schwingungszahl gleich der Umdrehungszahl der Scheibe mal der Anzahl der Eisenanker ist.

Bis hierher ist die Art der Stromerzeugung durchaus ähnlich derjenigen, wie sie v. Kriess[1]) in seinem Inductionsapparat, und Grützner[2]) in seiner Reizsirene angewandt haben. Abgesehen von der geringen Frequenz, die mit diesen Apparaten zu erreichen ist, sind die Ströme sehr schwach und durchaus nicht sinusförmig, sodass sie sich wohl für physiologische Versuche, nicht aber für physikalische Messungen eignen. Dafür werden sie erst brauchbar, nachdem durch *elektrische Resonanz* die Intensität, wie sogleich gezeigt werden soll, ausserordentlich erhöht und der

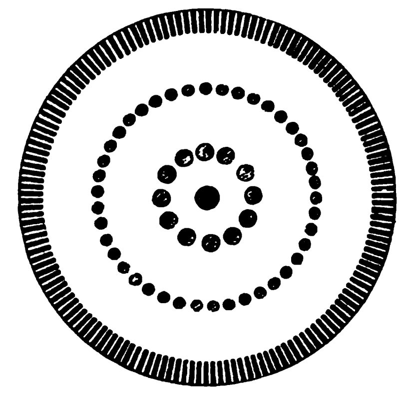


Fig. 1.

Strom von den Oberströmen gereinigt ist, sodass man einen verhältnismässig starken, *annähernd reinen Sinusstrom* zur Verfügung hat.

Mit der in einer früheren Arbeit[3]) angegebenen ersten Form der Wechselstromsirene konnten nur Frequenzen bis zu ca. 1000 erzielt werden. Der im Folgenden beschriebene Apparat soll zur Erzeugung schnellerer Sinusströme dienen.

Die Messingscheibe (Fig. 1) besass einen Durchmesser von 40 cm und war 1 cm dick. Am Rande wurden ringsherum 250 2 cm lange Zähne ausgefräst und die Zwischenräume mit 0,3 mm dicken Stücken Transformatorenblech ausgefüllt, die

1) J. v. Kriess, Verhandl. d. Naturf. Ges. Freiburg **8.** p. 2. 1882.

2) P. Grützner, Tagebl. d. 59. Vers. deutsch. Naturforscher etc. p. 202. Berlin 1886.

3) M. Wien, Wied. Ann. **66.** p. 871. 1898.

mit Schellack zusammengekittet waren. Um die Scheibe herum wurde ein Reifen aus Neusilberdrähten gelegt, um das Ganze zusammen zu halten. Die Scheibe wurde auf beiden Seiten sorgfältig abgedreht.

Damit man mit den Polen des Elektromagneten möglichst nahe an die Scheibe herankommen konnte, durfte die Axe des Motors, der die Scheibe drehte, auch bei hoher Rotationsgeschwindigkeit nicht merklich schleudern. Diese Aufgabe war bei dem von der Firma Schuckert & Co.-Nürnberg gelieferten

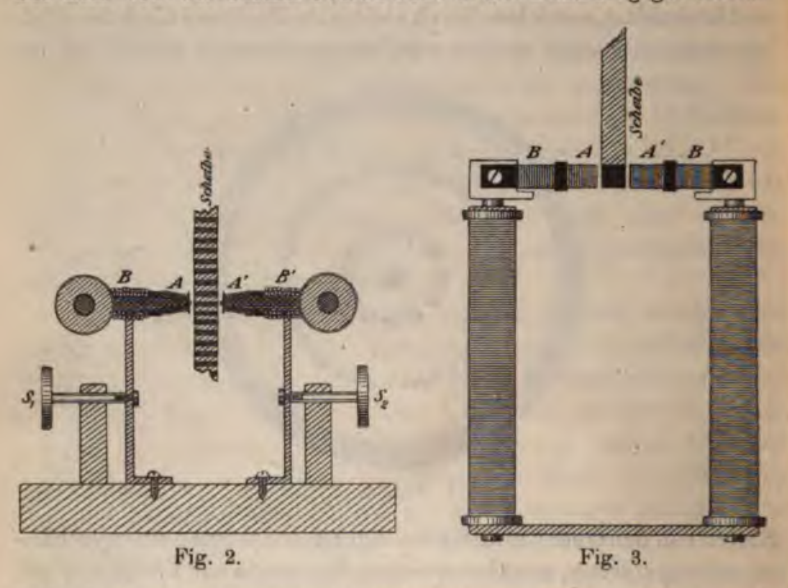


Fig. 2. Fig. 3.

0,57 pferdigen Motor in so vollkommener Weise gelöst, dass ich auch bei der maximalen Tourenzahl von 34 pro Secunde bis auf 0,25 mm mit den Polen an die Scheibe herangehen konnte.

Die Pole des Elektromagneten waren keilförmig zugespitzt (Figg. 2 und 3), sodass eine ca. 2 cm lange, 0,5 mm dicke Eisenkante den ebenfalls 2 cm langen Eisenteilchen der Scheibe gegenüberstand. Der ganze Eisenkern der Pole bestand aus 0,3 mm dickem Transformatorenblech. Der Raum AA' trägt die Wickelung, in der der Wechselstrom erzeugt wird. Dieselbe besteht aus je 200 Windungen 0,2 mm dicken Kupferdrahtes. Der weiter von der Scheibe entfernte Raum BB' trägt noch eine weitere Wickelung, die bei grossem äusseren

Widerstande zu der Wickelung AA' hinzu genommen werden kann, um die Spannung zu erhöhen.

Die *Stromstärke* des Wechselstromes kann am bequemsten dadurch verändert werden, dass man mittels zweier Schrauben (S_1 und S_2, Fig. 2) die Pole des Elektromagneten von der rotirenden Scheibe entfernt. Ausserdem natürlich auch durch Einschaltung von Widerstand in den Stromkreis.

Zur Aenderung der *Umdrehungszahl* dienten 2 Kurbelrheostaten, von denen einer im Hauptstromkreis, der andere im Nebenschluss des Motors lagen. Dadurch konnte die Tourenzahl pro Secunde zwischen 4 und 34 variirt werden, mithin die Frequenz des Wechselstromes zwischen 1000 und 8500 (34×250). Ueber die Frequenz 17 000 vgl. unten p. 433.

Um die Schwingungszahl genau feststellen zu können, besass die Messingscheibe noch zwei weitere Ankerreihen mit 16 und 64 Eisenstücken (Fig. 1). Diesen gegenüber wurde der stabförmige Magnet eines Bell'schen Telephons angebracht, dessen Platte vorher entfernt war. In einem mit der Telephonspule verbundenen zweiten Telephon entstand ein Ton, dessen Schwingungszahl gleich der Anzahl der Anker mal der Umdrehungszahl des Motors war. Stand der Telephonmagnet z. B. der Ankerreihe mit 64 Eisenstücken gegenüber und war die Tourenzahl des Motors gleich 8, so erhielt man den Ton 512 und man konnte die Schwebungen des Telephontones mit dem einer König'schen Stimmgabel UT_4 genau verfolgen. Mittels zweier Gabeln 256 und 512 konnten so die Tourenzahlen 4, 8, 16, 32 und die entsprechenden gewöhnlich verwandten Schwingungszahlen des Wechselstromes 1000, 2000, 4000, 8000 genau controlirt werden. Dazwischen liegende Frequenzen wurden mittels eines Monochords bestimmt.

Um längere Zeit eine bestimmte Schwingungszahl festzuhalten, kann man auch mit Vorteil die Lebedew'sche Methode[1]) benutzen, wobei der Gang des Motors durch eine elektromagnetisch getriebene Stimmgabel regulirt wird.

---

1) P. Lebedew, Wied. Ann. 59. p. 116. 1896. In einer früheren Arbeit, wo ich noch mit einem kleineren Motor und einer Scheibe von geringerem Trägheitsmoment arbeitete, kam ich mit der Methode nicht zum Ziel (vgl. Wied. Ann. 66. p. 872. 1898), weil der Gang des Motors in hohem Maasse von der Axenreibung abhängig war, und kleine Aende-

Wenn man den Wechselstromkreis einfach durch Widerstand schliesst, so ist der entstehende Strom sehr schwach und durchaus nicht sinusförmig. Brauchbar wird er erst durch Anwendung *elektrischer Resonanz*, indem man die Eigenperiode des elektrischen Systems durch Einschaltung eines passenden Condensators[1] und Aenderung der Selbstinduction mit der Schwingungszahl des Wechselstromes in Uebereinstimmung bringt $(n^2 = (1/L.C))$. Dadurch wird der Strom besonders für hohe Frequenzen sehr verstärkt, aber nur der der Grundperiode, die höheren Componenten bleiben annähernd so schwach, wie sie waren. Ein Beispiel wird dies erläutern. In einem elektrischen System sei die elektromotorische Kraft $E \sin nt$, der Widerstand W und das Selbstpotential L. Dann ist die Stromamplitude

$$A_1 = \frac{E}{\sqrt{W^2 + n^2 L^2}}.$$

Compensirt man die Selbstinduction durch einen Condensator mit der Capacität $C = (1/n^2 L)$, so wird $A'_1 = (E/W)$ also

$$\frac{A'_1}{A_1} = \frac{\sqrt{W^2 + n^2 L^2}}{W}.$$

Ist $n = 2\pi N = 2\pi . 4008$, $L = 3{,}09 . 10^7$, $W = 32{,}0$ Ohm, $C = 0{,}051$ Mikrof., so ist $(A'_1/A_1) = 24{,}2$. Der Versuch ergab dementsprechend eine Verminderung des — dem Quadrat der Stromamplitude proportionalen — Dynamometerausschlages bei Kurzschluss des Condensators von 421,2 auf 0,8 Scalenteile. Zur Messung diente hier wie im Folgenden ein Kohlrausch'-sches Dynamometer, dessen Metallteile zur Vermeidung von Wirbelströmen durch Holz und Elfenbein ersetzt waren.[2])

---

rungen der Reibung Aenderungen der Tourenzahl bewirkten, die erst allmählich durch die Stimmgabel unter „Pendeln" der Schwingungszahl wieder regulirt wurden. Bei dem grösseren Motor und dem sehr hohen Trägheitsmoment der Scheibe, die zu den vorliegenden Versuchen benutzt wurde, machte sich diese Schwierigkeit sehr viel weniger bemerkbar.

1) Als Capacitäten wurde von 1,0—0,05 Mikrof. ein Glimmercondensator von Elliott Brothers-London benutzt. Für 0,05—0,001 Mikrof. stellte ich mir kleine Condensatoren aus Glimmerplatten und Stanniol her, die durch Abkratzen der Stanniolbelegung abgeglichen wurden. Für kleinere Capacitäten dienten Luftcondensatoren. (Ueber eine bequeme Form derselben vgl. J. Hanauer, Wied. Ann. **65.** p. 789. 1898.)

2) M. Wien, Wied. Ann. **63.** p. 390. 1897.

Die auf diese Weise durch Resonanz erzielten maximalen Stromstärken A'_1 sollten nun eigentlich mit der Schwingungszahl zunehmen, weil die inducirte elektromotorische Kraft mit der Schwingungszahl wächst. Dies ist jedoch nur in gewissen Grenzen der Fall: einerseits nimmt die magnetische Induction wegen der Schirmwirkung der Wirbelströme nicht proportional der Schwingungszahl zu, sondern langsamer, andererseits bewirkt der steigende Energieverlust im Eisen eine Zunahme des wirksamen Widerstandes[1]) mit der Frequenz. Ich erhielt folgende Werte der maximalen Stromamplituden in Ampère für verschiedene Schwingungszahlen N bei hintereinander geschalteten Elektromagnetspulen:

$N =$	1000	2000	4000	6000	8000
$A'_1 =$	0,10	0,16	0,25	0,26	0,22

Dabei steigt der gesamte wirksame Widerstand des Stromkreises von ca. 50 Ohm auf ca. 200, während der wahre Widerstand 30,3 Ohm betrug.

Bei parallel geschalteten Elektromagnetrollen erhielt ich für $N = 4000$ und 22 Ohm im Schliessungskreis eine Stromamplitude von 0,5 Amp.

Es fragt sich nun, in wie weit der Wechselstrom durch die Resonanzerhaltung *rein sinusförmig* geworden ist. Die höheren Componenten werden durch die Einschaltung des Condensators nur wenig verändert, z. B. die Octave

$$\frac{A'_2}{A_2} = \sqrt{\frac{W^2 + 4 n^2 L^2}{W^2 + \left(2 n L - \frac{1}{2 n C}\right)^2}} = 1,32$$

für den obigen Fall, während die Amplitude des Grundstromes auf den 24,2 fachen Wert stieg.

Die Gesamtstärke aller Neben- und Oberströme $A_0^2 + A_2^2 + A_3^2 + \ldots$, in dem Stromkreis *ohne Condensator* wurde in folgender Weise bestimmt: Das Dynamometer wurde einmal (Schaltung 1) von einem einfachen Widerstand abgezweigt und die Selbstinduction des Dynamometers durch Capacität für die Schwingungszahl des Grundstromes compensirt, dann erhielt man wegen der Resonanzwirkung merklich einen Ausschlag proportional A_1^2. Das andere Mal (Schaltung 2) bestand die

1) Vgl. Anm. p. 450 des folgenden Artikels.

Abzweigung aus einem Widerstand W_1 und einer Inductionsrolle L_1, die so gewählt waren, dass sie mit dem Widerstand W_2 und dem Selbstpotential L_2 des Dynamometers die Proportion $W_1 : W_2 = L_1 : L_2$ bildeten. Dann werden die Ströme sämtlicher Schwingungszahlen gleichmässig von dem Dynamometer angegeben und der Ausschlag ist proportional $A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 + \ldots$[1]) Es muss natürlich, damit die ganze Verzweigung in beiden

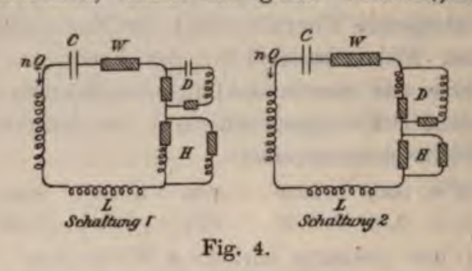


Fig. 4.

Fällen genau gleich zusammengesetzt ist, noch je eine Hülfsabzweigung (H) hinzugefügt werden, die bei Schaltung 2 (vgl. Fig. 4) aus einfachen Widerständen besteht, entsprechend dem Dynamometerzweig (D) bei compensirter Selbstinduction, das andere Mal bei Schaltung 1 aus Widerständen und Inductionsrollen, entsprechend dem Dynamometerzweig bei Schaltung 2.

Bei den Versuchen ergab sich $\alpha_2 = C(A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 + \ldots)$ merklich grösser als $\alpha_1 = C A_1^2$, z. B. $\alpha_1 = 227{,}5$, $\alpha_2 = 236{,}8$. Hieraus

$$\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_1} = \frac{A_0^2 + A_2^2 + \ldots}{A_1^2} = \frac{9{,}3}{227{,}5}$$

und

$$\frac{\sqrt{A_0^2 + A_2^2 + A_3^2 + \ldots}}{A_1} = \sqrt{\frac{9{,}3}{227{,}5}} = 20{,}2 \text{ Proc.}$$

Weitere Versuche ergaben ganz ähnliche Resultate. Die relative Stärke der Oberströme nahm etwas beim Nähern der Pole des Elektromagneten zu bis ca. 22 Proc. Die weitere Untersuchung ergab, dass eigentlich nur die Octave eine erhebliche Bedeutung hat. Ihre Amplitude wurde gemessen, indem zunächst im Hauptstromkreis auf Resonanz geschaltet wurde $(1/\sqrt{CL} = n^2)$. Dann wurde eine Capacität von $(C/4)$ statt C gestöpselt. Dabei zeigte sich, dass beim Variiren der Schwin-

1) Vgl. M. Wien, Wied. Ann. **63.** p. 390. 1897.

gungszahl der Ausschlag des Dynamometers wieder ein Maximum hatte und zwar für die Octave des Grundstromes

$$\left(\frac{1}{\sqrt{L\,C/4}} = 2\,n\right).$$

Es ergab sich z. B. für den Grundstrom ein Maximalausschlag von 340,5, für $2\,n$ ein solcher von 11,1, also das Verhältnis der Amplituden

$$\frac{A'_2}{A'_1} = \sqrt{\frac{11,1}{340,5}} = 18 \text{ Proc.}$$

Die höheren Componenten ($3\,n$, $4\,n$ . . .) waren sehr schwach, was man auch daraus entnehmen kann, dass die 18 Proc. des Grundstromes betragende Octave einen sehr erheblichen Teil des Gesamtwertes aller Oberströme von 20,2 Proc. darstellt.

Wir erhalten also als Resultat der Stromanalyse, dass der Gesamtstrom ohne Resonanz aus dem Grundstrom und einer etwa 18 Proc. starken Octave besteht, und sonst nur noch ganz schwache höhere Oberströme enthält. Wenn man jetzt durch Einschaltung des Condensators für die Grundperiode Resonanz herstellt, so wird, wie wir oben gesehen haben, der Grundstrom auf das 24,2 fache, die Octave nur auf das 1,32 fache verstärkt, sodass ihr Wert jetzt unter 1 Proc. der Amplitude des Grundstromes sinkt. *Somit kann man den Strom der Wechselstromsirene als annähernd sinusförmig ansehen.*

Die elektromotorische Kraft der Octave ist stark genug, dass, wenn man für die Octave Resonanz herstellt (Capacität gleich $C/4$), bei höheren Schwingungszahlen die Amplitude des Grundstromes wegen des für denselben sehr grossen scheinbaren Widerstandes neben der der Octave klein wird. Auf diese Weise lässt sich also die Schwingungszahl der Wechselstromsirene verdoppeln, mithin, da die höchste Schwingungszahl des Grundstromes 8500 beträgt, noch *ein Sinusstrom von 17000 Schwingungen in der Secunde* erreichen, allerdings von geringerer Amplitude (ca. 0,03 Amp. bei 200 Ohm im Schliessungskreis) und etwas durch den noch vorhandenen Grundstrom, dessen Amplitude etwa 10 Proc. derjenigen der Octave betrug, verunreinigt. Immerhin sind diese Ströme für manche Messungen noch vollkommen ausreichend.

Trotzdem die einzelnen Eisenteilchen auf der Scheibe der Wechselstromsirene aus gleich grossen und gleichmässig aus-

geglühten Stückchen Transformatorenblech hergestellt waren, so können doch zufällige Unregelmässigkeiten vorhanden sein und zu *Schwankungen der Amplitude* Veranlassung geben.

Wenn ein einzelner Zahn schwächer wirkte als die benachbarten, so wäre das nicht so schlimm, da dies durch die elektrische Resonanz ausgeglichen würde, ebenso wie bei elektromagnetischem Betrieb einer Stimmgabel ein einmaliges Aussetzen des Funkens keine merkliche Wirkung auf die Amplitude der Stimmgabel hat. Die erzwungene elektrische Schwingung geht als freie Schwingung weiter und wird nur durch den Widerstand der Leitung etwas gedämpft. Schlimmer wäre es, wenn eine ganze Reihe von Ankern, etwa die ganze Hälfte der Peripherie, stärker wirkte wie die gegenüber liegende. Um dies zu untersuchen, wurde eine Vorrichtung getroffen, die erlaubte, nur während des Vorbeiganges eines bestimmten Teiles der Scheibe an den Polen des Elektromagneten den Strom geschlossen zu halten, und so verschiedene Teile der Peripherie miteinander zu vergleichen. Zu diesem Zweck wurde eine Hartgummischeibe auf die Axe des Motors aufgesetzt und mit einem Reifen aus Messingblech versehen, der an vier Stellen durchschnitten wurde, sodass der ganze Reifen in vier voneinander isolirte Quadranten geteilt war (vgl. Fig. 5). Jeder dieser Quadranten konnte mit der Axe leitend verbunden werden. Diese Scheibe wurde mittels zweier Bürsten in den Wechselstromkreis eingeschaltet, sodass derselbe nur während einer $^1/_4$ Umdrehung geschlossen war. So konnten die den vier Quadranten der Sirenenscheibe entsprechenden Ausschläge miteinander verglichen werden. Durch Verdrehen der Hartgummischeibe wurden in dieser Weise verschiedene Teile der Peripherie untersucht. Es ergab sich nirgends eine grössere Differenz zwischen den verschiedenen Quadranten als 1 Proc., also sind die Schwankungen der Amplitude sehr gering.



Fig. 5.

Damit ist die Aufgabe gelöst, verhältnismässig starke, reine, schnelle Sinusströme zu erzeugen, die sich für physikalische Versuche, speciell für Messungen mit der Wheatstone'schen Brücke eignen.

B. Versuche über resonirende elektrische Systeme.

Mittels dieser hochfrequenten Sinusströme lassen sich die Erscheinungen der Resonanz mit grosser Genauigkeit darstellen, besser noch wie mit irgend welchen akustischen Systemen.

Ein elektrisches System besitze den Widerstand W, das Selbstpotential L und die Capacität C; in demselben werde, wie in unserem Fall, eine mit der Schwingungszahl steigende elektromotorische Kraft $E = n\,Q$ inducirt. Dann entsteht ein Strom, dessen Amplitude A_0 gegeben ist durch den Ausdruck:

$$A_0 = \frac{n\,Q}{\sqrt{W^2 + (n\,L - 1/n\,C)^2}}.$$

Der Stromkreis, an welchem die Messungen ausgeführt wurden, besass einen Widerstand von 32,0 Ohm, ein Selbstpotential von $3{,}09 . 10^7$ cm und eine Capacität von 0,051 Mikrof., wie durch besondere Messungen ermittelt wurde. Die Berechnung von A_0^2 nach der obigen Formel ergab die Zahlen der Tab. 1, worin der grösste Wert — für die Eigenperiode des Systems $n = (1/\sqrt{L\,C}) = 2\pi . 4008$ — gleich 100 gesetzt ist.

Tabelle 1.

$N =$	3408	3508	3608	3708	3808	3908	3958	**4008**
$A_0^2 =$	1,2	1,8	3,0	5,6	12,3	38,1	71,8	**100**
$N =$	**4008**	4058	4108	4208	4308	4408	4508	4608
$A_0^2 =$	**100**	74,0	43,1	16,5	9,6	5,3	3,7	2,8

Die entsprechende Curve ist in Fig. 6 wiedergegeben und mit I bezeichnet.

A_0^2 wurde durch ein Kohlrausch'sches Dynamometer im Nebenschluss gemessen. Die Resultate giebt die Tab. 2. Es sind die beobachteten Ausschläge α selbst, ferner dieselben in Procenten des grössten Ausschlages $100\,\alpha/\alpha_m$ angegeben.

Tabelle 2.

$N =$	3456	3750	3820	3930	**4008**	4140	4278	4319	4425	4620
$\alpha =$	3,2	17,0	36,2	86,5	**205,0**	65,3	20,2	15,8	8,1	5,6
$\frac{\alpha}{\alpha_m}\,100 =$	1,6	8,3	17,7	42,2	**100**	31,9	9,9	7,7	4,0	2,7

Die Beobachtungen sind in Fig. 6 durch kleine Kreise o bezeichnet und schliessen sich der berechneten Curve gut an.

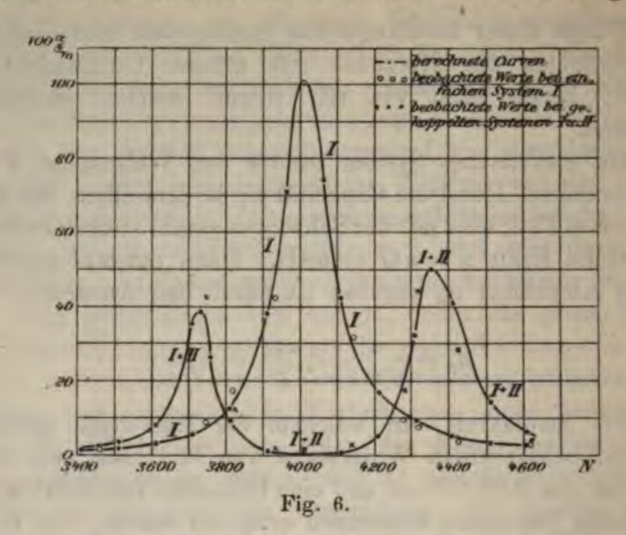


Fig. 6.

Koppelt man mit diesem elektrischen System ein zweites (vgl. Fig. 7), so übt dieses zweite System eine *Rückwirkung* auf die Schwingungen des ersten aus, die besonders stark ist, wenn beide Systeme die gleiche Eigenperiode

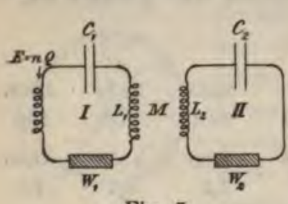


Fig. 7.

$$n_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} = n_2$$

besitzen. Das Selbstpotential des zweiten Systems war gleich $2{,}74 . 10^7$ cm, die Capacität gleich 0,0575 Mikrof., der Widerstand betrug 14,5 Ohm. Die Koppelung war eine magnetische, indem eine dem System I angehörige Inductionsrolle auf eine andere des Systems II gelegt wurde. Der gegenseitige Inductionscoefficient der beiden Rollen betrug $M = 4{,}51 . 10^6$ cm.

Die analytischen Ausdrücke für erzwungene Schwingungen in gekoppelten Systemen habe ich in einer früheren Arbeit[1]) für Kraft- bez. elektrische Koppelung abgeleitet, sie lassen

1) M. Wien, Wied. Ann. 62. p. 151. 1897.

sich leicht für Beschleunigungs- bez. magnetische Koppelung umrechnen und lauten, indem statt der allgemeinen Schwingungsconstanten die elektromagnetischen Constanten eingeführt sind, für die Quadrate der Stromamplituden in den beiden Stromkreisen:

$$A_1^2 = \frac{n^2 Q^2}{\left\{W_1 + W_2 \frac{n^2 M^2}{W_2^2 + \left(\frac{1}{n C_2} - n L_2\right)^2}\right\}^2 + \left\{\left(\frac{1}{n C_1} - n L_1\right) - \frac{n^2 M^2 \left(\frac{1}{n C_2} - n L_2\right)}{W_2^2 + \left(\frac{1}{n C_2} - n L_2\right)^2}\right\}^2}$$

und

$$A_2^2 = \frac{Q^2 M^2}{L_1^2 C_1^2 \left\{W_1 W_2 + n^2 M^2 - \left(\frac{1}{n C_1} - n L_1\right)\left(\frac{1}{n C_2} - n L_2\right)\right\}^2 + \left\{W_1 \left(\frac{1}{n C_2} - n L_2\right) + W_2 \left(\frac{1}{n C_1} - n L_1\right)\right\}^2}.$$

Die folgende Tab. 3 giebt die berechneten und beobachteten Werte von A_1^2, wobei wieder das Maximum von A_0^2, also der Schwingung des ungekoppelten Systems I, gleich 100 gesetzt ist.

Tabelle 3.

Berechnung.

$N =$	3408	3508	3608	3708	**3730**	3758	3808	3908	4008
$A_1^2 =$	1,8	3,1	8,1	35,2	**38,1**	26,8	9,4	1,0	0,15

$N =$	4008	4108	4208	4308	**4350**	4408	4508	4608
$A_1^2 =$	0,15	0,9	5,3	32,4	**50,1**	41,0	14,5	7,1

Beobachtung.

$N =$	3456	**3750**	3820	3930	4008	4140	4278	**4319**	4425	4620
$\alpha_1 =$	4,2	**88,0**	26,1	3,6	1,2	5,1	35,4	**91,3**	58,1	8,4
$\frac{\alpha_1}{\alpha_m} \cdot 100 =$	2,0	**42,9**	12,6	1,8	0,6	2,5	17,3	**44,5**	28,3	4,1

In der Fig. 6 ist die berechnete Curve mit I + II bezeichnet, die beobachteten Werte sind durch Kreuze (× ×) eingetragen. Dieselben fallen nicht so genau mit der berechneten Curve zusammen, wie bei der einfachen Resonanzcurve (I).

Vor allem sind bei dem ersten Maximum (links) die Kreuze höher wie die Curve, bei dem zweiten ist das beobachtete Maximum nicht so hoch wie das berechnete. Es liegt dies daran, dass die elektromotorische Kraft nicht, wie bei der Rechnung angenommen, proportional der Schwingungszahl steigt, sondern langsamer (vgl. p. 431). Ferner steigt der wirksame Widerstand mit der Schwingungszahl, sodass der für die Schwingungszahl 4008 bestimmte Widerstand von 32,0 bez. 14,5 für das erste Maximum zu gross, für das zweite zu klein ist. Bei der einfachen Resonanzcurve ist dies nicht so sichtbar, weil die hohen Werte von A_0^2 unmittelbar um $N = 4008$ herum liegen.

Jedenfalls tritt bei der Berechnung wie bei der Messung das Charakteristische der erzwungenen Schwingungen gekoppelter Systeme deutlich hervor: das breite tiefe Minimum, genau an der Stelle, wo das ungekoppelte System ein Maximum hatte, und die beiden Maxima zu beiden Seiten.

Das System II zeigt ebenfalls ein Minimum zwischen zwei Maximis, jedoch ist dasselbe nicht so ausgesprochen wie bei System I. Für

$$n = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}$$

ist

$$A_1^2 = \frac{n^2 Q^2 W_2^2}{(W_1 W_2 + n^2 M^2)^2}, \qquad A_2^2 = \frac{n^4 Q^2 M^2}{(W_1 W_2 + n^2 M^2)^2},$$

$$A_2^2 / A_1^2 = \frac{n^2 M^2}{W_2^2};$$

in unserem Fall berechnet sich A_2^2 / A_1^2 zu 61,3, jedoch kann man bei derselben Schwingungszahl leicht die Anordnung so treffen, dass M den 10 fachen Wert erhält und W_2 10 mal so klein wird, dann wird $A_2^2 / A_1^2 = 613000$, d. h. die Stromenergie im primären System ist verschwindend gegen die im secundären. Man hat damit theoretisch die Möglichkeit, mittels einer langen Leitung im System I elektrische Energie auf ein entferntes System II zu übertragen, ohne einen merklichen Energieverlust durch Joule'sche Wärme in der Leitung, weil die Stromstärke in dem System I so ausserordentlich gering ist.

Verkleinert man die gegenseitige Induction der beiden Systeme, indem man den Abstand der beiden inducirenden Rollen vergrössert, so rücken die beiden Maxima näher zu-

sammen und das Minimum zwischen ihnen wird weniger tief. Dann zeigt zunächst das System II nur noch ein flaches Maximum für die Eigenperiode der beiden Systeme, bei immer weiterem Entfernen der Rollen wird dieses Maximum immer spitzer: wir erhalten eine ausgesprochene Resonanzcurve und das secundäre System reagirt merklich nur noch auf eine bestimmte Schwingungszahl. Man kann nun leicht eine Reihe solcher secundärer Systeme anordnen, die alle auf verschiedenen Schwingungszahlen eingestimmt sind, und je nach der Frequenz, die man im primären Kreise erzeugt, wird man dieses oder jenes secundäre System erregen können. Damit wäre der eingangs erwähnte Mangel der Marconi'schen Telegraphie ohne Draht gehoben. Leider tritt dafür hier noch eine viel grössere Schwierigkeit auf: die gegenseitige Induction zweier geschlossener Ströme, deren Abstand gross ist gegen ihre Dimensionen, nimmt sehr schnell mit ihrem Abstande ab, sodass eine Wirkung auf grössere Entfernung auf diese Art ausgeschlossen erscheint.

Bei *freien* Schwingungen bewirkt die Koppelung mit einem gleichgestimmten zweiten System, dass in beiden Schwebungen entstehen, indem die gesamte Schwingungsenergie abwechselnd in dem einen und in dem andern System auftritt.[1] Ein interessantes Beispiel dafür bieten die Photographien Hertz'scher Schwingungen von J. Trowbridge[2]), dem allerdings der wahre Grund der Schwebungen nicht bekannt war: „With periods ranging from 0,00001 to 0,000001 of a second, I have found it impossible to tune two circuits in which spark occurred to perfect resonance. There were always indications of beats due, I believe, to the capacity not rising immediately to its full value.

C. Messinstrumente für schnelle Sinusströme.

Wir haben gesehen, dass zur Messung stärkerer Sinusströme das *Kohlrausch'sche Dynamometer* direct oder im Nebenschluss eingeschaltet ein geeignetes Instrument ist. Für die *Nulleinstellungen in der Wheatstone'schen Brücke*, welche die

---

1) Vgl. M. Wien, l. c.

2) J. Trowbridge, Phil. Mag. 38. p. 183. 1894.

Grundlage der meisten Messungen bildet, ist es jedoch nicht empfindlich genug.

Es liegt nun nahe, denselben Kunstgriff anzuwenden, dessen sich F. Kohlrausch bei der Messung des Widerstandes von Flüssigkeiten bediente, nämlich die feste Rolle des Dynamometers in den Hauptzweig der Brücke einzuschalten, sodass sie von einem starken Wechselstrom durchlaufen wird, und nur die bewegliche Rolle in den Brückenzweig zu bringen. Bei schnellen Wechselströmen versagt jedoch diese Methode, weil die bewegliche Rolle in der Ruhelage bei genau senkrechter Stellung der beiden Rollen sich in einer Art labilen Gleichgewichtes befindet. Sobald die Rolle beim Einstellen der Brücke etwas aus dieser Nullstellung herauskommt, werden in ihr, da sie durch die Brücke geschlossen ist, von der festen Rolle aus Ströme inducirt, welche um so stärker sind, je höher die Wechselzahl ist, und bestrebt sind, den Ausschlag zu vergrössern. Dabei werden dann wieder die inducirten Ströme stärker und so fort, bis die bewegliche Rolle ⊥ zur ursprünglichen Nullstellung eine neue Gleichgewichtslage einnimmt.

Das *Hörtelephon*, welches an sich — vor allem zwischen den Schwingungszahlen 500—3000 — eine völlig genügende Empfindlichkeit besitzt[1]), ist bei längerem Arbeiten nicht recht brauchbar, weil das Ohr, besonders bei sehr hohen Tönen, schnell ermüdet, und auch oft ein subjectives Nachklingen im Ohr sich einstellt. Ausserdem müsste man, um nicht durch das Geräusch des Motors und das Tönen des Elektromagneten der Wechselstromsirene gestört zu werden, in einem entfernten Zimmer arbeiten, was auch misslich ist. Hingegen empfiehlt es sich, die rohe Voreinstellung der Brücke mit dem Hörtelephon zu machen.

Bei langsameren Wechselströmen erlauben das optische Telephon und das Rubens'sche Vibrationsgalvanometer sehr empfindliche Nulleinstellungen. Diese Apparate haben sich, obgleich sie für manche Messungen Vorteile bieten, wenig eingebürgert, vielleicht weil die Handhabung derselben für den, der zum erstenmal damit arbeitet, Schwierigkeiten bietet. Ich

---

1) Vgl. den nachstehenden Artikel.

möchte deshalb im Folgenden eine Abart des Vibrationsgalvanometers beschreiben, die sich jeder im Laboratorium selbst herstellen kann, mit der man sich leichter einarbeitet, weil sie sich mehr dem gewöhnlichen Galvanometer nähert, und die schliesslich für wesentlich höhere Schwingungszahlen als die beiden anderen Apparate eine genügende Empfindlichkeit besitzt.

Das Princip ist folgendes: ein modernes Galvanometersystem mit sehr kleinem Trägheitsmoment wird nicht an einem dünnen Quarzfaden aufgehängt, sondern in der Mitte eines ausgespannten Drahtes befestigt. Dadurch wird die Schwingungsdauer sehr viel geringer und man kann sich durch geeignete Wahl der Drahtdicke und Länge so einrichten, dass dieselbe $^1/_{100}$, $^1/_{1000}$ oder auch $^1/_{10000}$ Sec. beträgt. Die Empfindlichkeit wird dadurch sehr herabgesetzt, jedoch wird das System sehr viel stärkere Torsionsschwingungen machen, wenn ein schnell wechselndes magnetisches Feld darauf wirkt, dessen Periode gerade mit der Eigenperiode des Systems übereinstimmt. Das Magnetsystem wird nun nicht zwischen gewöhnliche Galvanometerrollen gebracht, sondern zwischen die Polflächen eines durchschnittenen Ringes aus dünnem Eisendraht, der mit einer Wickelung versehen ist. Das Feld dieses Elektromagneten ist etwa 10 mal so stark, wie das von Galvanometerrollen gleichen Widerstandes. Zur Strommessung wird wie bei dem optischen Telephon und dem Rubens'schen Vibrationsgalvanometer ein beleuchteter Spalt in einem Fernrohr betrachtet, dessen Bild, wenn der Spiegel vibrirt, als breites Lichtband erscheint. Um eine empfindliche Nulleinstellung zu ermöglichen, werden in dem Spalt zwei Drähte über Kreuz unter kleinem Winkel ausgespannt. Man stellt darauf ein, dass das Bild dieser Drähte, besonders ihres Schnittpunktes, ganz scharf erscheint.

Zur Herstellung des *Systems* lötet man auf einen Messingdraht passender Dicke — für $N = 256$ 0,1 mm dick — ein 4 mm langes und 2 mm breites, sehr dünnes Stück Blech auf und unmittelbar darüber im rechten Winkel dazu ein zweites Stück, 2 mm lang und 2 mm breit. Das erste dient zur Anbringung der kleinen Magnete, das zweite für den Spiegel; beides wird mit sehr wenig Schellack auf die Blechstückchen geklebt. Wegen der Beugung durften die Spiegel nicht weniger als 2,5 – 3,0 mm

Durchmesser haben. Ein solcher Spiegel wog ca. 3 mg.[1]) Entsprechend wurde auch Gewicht und Trägheitsmoment des Magnetsystems gewählt: die längsten Magnetstäbchen waren 3 mm lang und alle zusammen wogen 6—7 mg. Die ganze Anordnung des Systems ist aus Fig. 8a zu entnehmen.

Zur Herstellung des *Elektromagneten* wurde aus 0,2 mm starkem Eisendraht ein Ring von 10 cm Durchmesser gewickelt, dessen Dicke 4 mm betrug. Der Ring wurde durchgesägt, die Enden gerade gefeilt und das Ganze ausgeglüht. Hierauf wurde

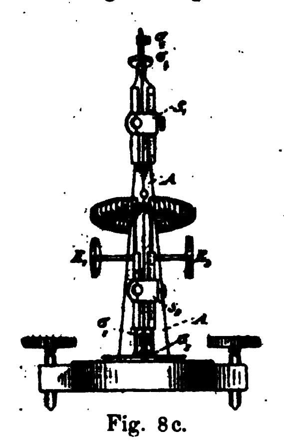


Fig. 8c.

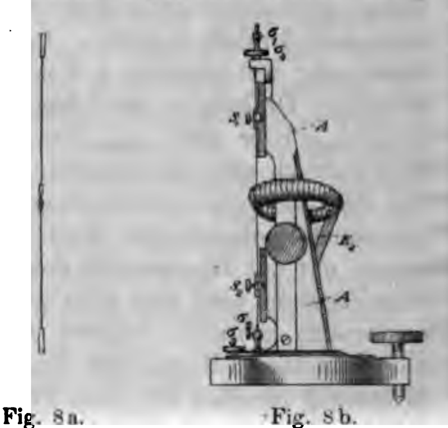


Fig. 8a. Fig. 8b.

er mit einer Wickelung von 0,1 mm-Kupferdraht versehen, deren Gesamtwiderstand ca. 200 Ohm betrug. Jedoch konnten die beiden Hälften auch || geschaltet werden, sodass der Widerstand sich dann auf ca. 50 Ohm belief.

Wie aus Figg. 8b und 8c ersichtlich, wird das Ganze dann in einfacher Weise mittels des Messingbalkens A montirt. Mit Hülfe der Schrauben σ_1 σ_2 kann das System leicht herausgenommen und durch ein anderes ersetzt werden. Die Schraube σ_3 (unten) dient zur Aenderung der Spannung des Drahtes, σ_4 (oben) zum Drehen des Systems, sodass die Magnete den Polflächen des Elektromagneten parallel gerichtet werden können.

Damit sind die wesentlichen Teile des Apparates beschrieben. Was noch sonst auf den Figg. 8b und 8c zu sehen ist, dient

1) Die Spiegel wurden von dem Optiker Hrn. Magen, Berlin, Scharnhorststrasse, bezogen und lieferten in Rücksicht auf ihre geringe Grösse äusserst scharfe Bilder.

dazu, das *System genau auf eine bestimmte vorgeschriebene Schwingungszahl einzustimmen*, was bei vielen Anwendungen wünschenswert ist. Zu diesem Zwecke kann, wie bei dem Rubens'schen Apparat, die Länge des Drahtes mit Hülfe der Schlitten S_1 S_2 verändert werden. Die genaue Einstimmung geschieht dann schliesslich durch Aenderung der Dämpfung, indem man mittels der Schrauben E_1 E_2 die Entfernung der Pole von dem System variirt.[1])

Die Empfindlichkeit des Apparates kann man in folgender Weise im voraus schätzen. Ein modernes Galvanometer möge einen Ausschlag von 1 Scalenteil bei 1000 Scalenteilen Entfernung, einer doppelten Schwingungsdauer von 10 Secunden und 200 Ohm Widerstand, für einen Strom von 10^{-11} Ampère geben. Für $^1/_{100}$ Secunde Schwingungsdauer würde der gleiche Ausschlag erst bei 10^{-5} Ampère erfolgen. Für einen Wechselstrom von 100 Schwingungen in der Secunde wird der Ausschlag durch Resonanz ca. 100 mal vergrössert; infolge des Kerns aus weichem Eisendraht ist das Feld 10 mal so stark wie bei Galvanometerrollen von gleichem Widerstand. Demnach erhalten wir eine Verbreiterung des Spaltbildes um 1 Scalenteil für 10^{-8} Ampère. Etwa $^1/_{20}$ Scalenteil ist durch Unscharfwerden der gekreuzten Drähte im Spalt noch erkennbar, somit ist ein Wechselstrom von 5.10^{-10} noch eben merklich.

Die Untersuchung ergab für einen Apparat mit einem System $N = 100$ einen Scalenteil Ausschlag für $1{,}7.10^{-6}$ Ampère; ine Verbreiterung des Spaltbildes um einen Scalenteil für eine mittlere Intensität des Wechselstromes von $1{,}4.10^{-8}$ Ampère, demnach wäre ein Strom von 7.10^{-10} Ampère noch eben merklich, was der Vorausberechnung genügend entspricht.

Das neue Instrument übertrifft demnach unter gleichen Verhältnissen das optische Telephon etwa um das 15 fache, das Rubens'sche Vibrationsgalvanometer etwa um das 4 fache an Empfindlichkeit, was wohl hauptsächlich durch die geringere Trägheit des Systems bewirkt wird. Die beiden Vibrations-

---

1) Der Apparat ist von Hrn. Feldhausen, Mechaniker an dem physikalischen Institut der hiesigen Technischen Hochschule, hergestellt und mit drei Systemen zum Preise von 110 Mark erhältlich.

anometer unterscheiden sich im Princip nur dadurch, dass Stelle eines Systems von weichem Eisen zwischen Telephongneten bei dem älteren Instrument, hier ein System kleiner Magnete zwischen Rollen mit weichem Eisenkern vibrirt. Ausser der leichteren Herstellung und der etwas grösseren Empfindlichkeit scheint mir ein weiterer Vorzug des neuen Apparates darin zu liegen, dass er, wie sogleich gezeigt werden soll, auch für höhere Schwingungen eine genügende Empfindlichkeit beibehält. Bei den Telephonspulen des Rubens'schen Apparates nimmt infolge der Wirbelströme der wirksame Widerstand schnell mit der Frequenz zu, während die magnetische Induction sinkt, was beides die Empfindlichkeit beeinträchtigt.[1])

Die grössere Empfindlichkeit der Vibrationsgalvanometer gegenüber dem optischen Telephon rührt hauptsächlich daher, dass die Dämpfung geringer ist wie bei diesem. Infolge dessen sind die charakteristischen Eigenschaften des optischen Telephons hier noch in verstärktem Maasse vorhanden: sie reagiren wesentlich nur auf den Sinusstrom, auf den sie eingestimmt sind und es können schon recht starke Oberströme vorhanden sein, ohne dass die Nulleinstellung darunter leidet. Auf der anderen Seite bringt die geringe Dämpfung auch manches Unbequeme mit sich: das Tongebiet der maximalen Resonanz ist sehr eng begrenzt und die Nulleinstellung ist mühsamer. Daher ziehe ich für tiefere Schwingungen bis 256 das optische Telephon vor; für höhere Schwingungen wird es jedoch zu unempfindlich — über 600 habe ich die Tonhöhe überhaupt nicht bringen können —, sodass hier ausschliesslich das Vibrationsgalvanometer in Frage kommt, dessen Dämpfung überdies für höhere Schwingungen besser wird.

Für Systeme mit verschiedenen Schwingungszahlen erhielt ich folgende Zahlen für die Empfindlichkeit: α_1 bedeutet die Verbreiterung des Spaltbildes um einen Scalenteil, α_2 den eben noch merklichen Strom ($^1/_{20}$ α_1).

N	100	500	1000	4000
α_1	$1{,}4 \cdot 10^{-8}$	$3 \cdot 10^{-7}$	$1{,}5 \cdot 10^{-6}$	$6 \cdot 10^{-5}$
α_2	$7 \cdot 10^{-10}$	$1{,}5 \cdot 10^{-8}$	$7{,}5 \cdot 10^{-8}$	$3 \cdot 10^{-6}$

1) Vgl. den folgenden Artikel p. 453.

Für α_2 ist einfach $\alpha_1/20$ gesetzt, weil es schwierig ist, eine sichere Zahlenangabe zu machen: bei höheren Schwingungszahlen ist im allgemeinen eine genauere Nulleinstellung möglich wegen besserer Dämpfung und geringerer Erschütterungsempfindlichkeit.

Bei $N = 4000$ ist die mit dem Quadrat der Schwingungszahl abnehmende Empfindlichkeit schon so klein, dass man genaue Messungen kaum mehr damit machen kann.

Für schnellere Schwingungen wandte ich daher ein *Bellati-Giltay'sches Dynamometer* [1]) an, dessen Ausschlag in sehr weiten Grenzen unabhängig von der Schwingungszahl ist. Die Empfindlichkeit dieses Instrumentes, welche in der ihm von Giltay gegebenen Form schon ziemlich gross ist, kann man noch wesentlich vermehren, wenn man die Principien der neueren Galvanometer darauf anwendet, d. h. das System leicht und von geringem Trägheitsmoment wählt, den Wickelungsraum der von Maxwell angegebenen Form anpasst und ihn mit Draht von allmählich zunehmender Dicke bewickelt.

Das System des von mir benutzten Apparates bestand aus einem sehr dünnen, 5 cm langen Glasröhrchen, darauf war auf dem einen Ende der Spiegel von 3 mm Durchmesser und ca. 3 mg Gewicht (vgl. p. 442) mit Schellack aufgeklebt, an dem anderen Ende befand sich ein rundes Stück weichen Eisenblechs von ebenfalls 3 mm Durchmesser und 0,1 mm Dicke. Es wog ca. 6 mg. Das System hing an einem ca. 20 cm langen Quarzfaden und stellte sich von selbst nord-südlich ein bei einer Schwingungsdauer von ca. 3 Secunden. Mittels eines kleinen, in der Nähe des Instrumentes befindlichen Hülfsmagneten konnte der Erdmagnetismus verstärkt bez. geschwächt und damit die Schwingungsdauer zwischen 1 und 10 Secunden geändert werden. Gewöhnlich wurde mit 5 Secunden Schwingungsdauer gearbeitet. Durch kleine Verschiebungen des Hülfsmagneten konnte das System leicht in seine um 45° gegen die Axe des magnetischen Feldes geneigte Stellung gebracht und erhalten werden.

Zur Erzeugung des magnetischen Feldes kann ein *Rollenpaar* eines Du Bois-Rubens'schen oder Paschen'schen Galvanometers dienen; nur muss man darauf achten, dass keine grösseren

1) J. W. Giltay, Wied. Ann. **25**. p. 325. 1885.

Metallteile, in denen Wirbelströme entstehen könnten, sich daran befinden. Die von mir benutzten Rollen waren in drei Abteilungen (vgl. Fig. 9) mit 0,07, 0,2 und 0,5 mm dickem Kupferdraht bewickelt. Ihr Widerstand betrug je 400 Ohm. Der freie Raum für das Eisenblättchen hatte einen Durchmesser (a) von 5 mm. Das Ganze war auf Holz und Elfenbein montirt.[1])

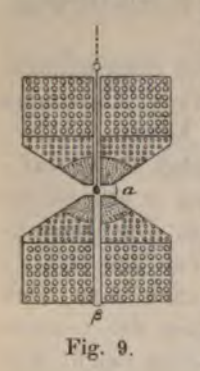


Fig. 9.

Gegen magnetische Störungen erwies sich der Apparat als sehr unempfindlich, jedoch wirken Luftströmungen leicht störend, sodass er ausser mit dem üblichen Glasgehäuse noch mit einer Filzumhüllung versehen wurde. Ferner musste man sich bei den Brückeneinstellungen mit hohen Frequenzen sorgfältig vor gegenseitiger Induction von anderen Teilen des Brückensystems auf das Dynamometer und seine Zuleitungen hüten.

Theorie des Instrumentes. Für gegebenen Widerstand und Form der Rollen und für ein System von gegebenem Trägheitsmoment und Schwingungsdauer lässt sich die erreichbare Empfindlichkeit des Instrumentes vorausberechnen.

Es sei: H das magnetische Feld der Rollen, M die magnetische Induction in dem weichen Eisenblättchen, K das Trägheitsmoment, T die Schwingungsdauer des Systems, $D = \pi^2 K / T^2$ das Drehungsmoment, so ist der Ausschlag α des Bellati-Giltay'schen Dynamometers gegeben durch die Gleichung:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{H.M}{D} \cdot \sin 45^0 \cos 45^0 = \frac{H.M}{2D} = \frac{H.M.T^2}{2\pi^2 K}.$$

Ist J die Stromstärke in Ampère, welche die Rollen durchströmt, G das Feld der Rollen für den Strom von 1 Amp., so ist $H = J.G$. Das durch H inducirte magnetische Moment M ist $= \varkappa' H.V = \varkappa' J.G.V$, worin V das Volumen des Eisenblättchens und $\varkappa'$ die scheinbare Susceptibilität mit Berücksichtigung der entmagnetisirenden Wirknng der Pole ist. Dies eingeführt, wird:

$$\operatorname{tg} \alpha = \tfrac{1}{2} \frac{J.G.J.G.\varkappa'.V.T^2}{\pi^2 K} \quad \text{und} \quad J = \frac{\pi}{G.T} \cdot \sqrt{\frac{2 \operatorname{tg} \alpha . K}{V.\varkappa'}}.$$

1) Der Apparat wurde von dem Mechaniker Hrn. Siedentopf in Würzburg angefertigt.

Das Trägheitsmoment K des Systems setzt sich zusammen aus dem des Spiegels und dem des Eisenblättchens. Beide sind rund und haben denselben Radius r. Ihre Massen seien m und m'. Daher das Trägheitsmoment beider zusammen $= (m + m') r^2 / 4$. Ferner ist das Volumen $V = m' / s$, wenn s das specifische Gewicht des Eisens ist. Somit wird schliesslich:

$$J = \frac{r \pi}{2\, G \,.\, T} \cdot \sqrt{\frac{2 \,.\, \operatorname{tg} \alpha \,.\, s}{\varkappa'} \cdot \frac{m + m'}{m'}}\,.$$

Hierin sind für unseren speciellen Fall folgende Zahlenwerte einzusetzen:

$$r = 0{,}15 \text{ cm}, \qquad T = 5 \text{ sec}, \qquad \operatorname{tg} \alpha = \tfrac{1}{1000}$$

(1 Scalenteil bei 1000 Scalenteilen Abstand zwischen Scala und Spiegel).

$$m = 3 \text{ mg}, \qquad m' = 6 \text{ mg}, \qquad \sigma = 7{,}8.$$

$\varkappa'$, die scheinbare Susceptibilität, ist für eine runde Scheibe, deren Dicke klein ist gegen ihren Durchmesser:

$$\frac{\varkappa}{1 + \pi^2 \varkappa \cdot \dfrac{\text{Dicke}}{\text{Durchmesser}}}.$$

Nehmen wir die wahre Susceptibilität zu 10 an, so ist

$$\varkappa' = \frac{10}{1 + \pi^2 \,.\, 10 \cdot \dfrac{0{,}1}{3}} = 2{,}33.\,^{1)}$$

Das Feld G berechnet sich nach Ayrton und Mather[2]) für einen 5 mm weiten Spielraum für das Eisenblättchen (α Fig. 9) zu ca. 3000 bei 1 Ohm Widerstand (w) und steigt proportional $w^{2/5}$, also für $w = 800$ zu ca. 50000. Meine Rollen ergaben bei einer Messung mittels Localspule nur 32000. Es lag dies daran, dass die beiden Rollen nicht ganz nahe zusammengeschoben werden konnten, sondern für das System ein kleiner Zwischenraum von etwa 2 mm übrig bleiben musste (β Fig. 9), weil sonst das System bei kleinen Erschütterungen durch Luftzüge etc. leicht kleben blieb. Setzen wir $G = 32000$ und die anderen Werte in unserem Ausdruck für J ein, so wird

1) Für $\varkappa = 20$ ist $\varkappa' = 2{,}60$, mithin hängt die scheinbare Permeabilität und damit die Empfindlichkeit nur wenig von der Weichheit des Eisens ab.

2) W. Ayrton und F. Mather, Phil. Mag. **48.** p. 349. 1898.

$J = 1{,}10 . 10^{-6}$. Die Messung ergab in guter Uebereinstimmung $J = 1{,}16 . 10^{-6}$.[1]) Bei dem geringen Abstand von 1000 Scalenteilen zwischen Scala und Spiegel und der ruhigen Nullstellung des Instrumentes konnte noch etwa $^1/_{10}$ Scalenteil mit Sicherheit beobachtet werden, sodass Ströme von $3{,}5 . 10^{-7}$ Amp. erkennbar waren.

Die hohe Selbstinduction der Rollen ($5{,}2 . 10^8$ cm) würde den scheinbaren Widerstand für hohe Schwingungszahlen so gross machen, dass trotz der Empfindlichkeit das Instrument unbrauchbar würde. Deshalb wurde das Selbstpotential durch davor geschaltete Condensatoren von passender Capacität compensirt. Arbeitet man mit bestimmten Schwingungszahlen ($N = 1000$, 2000, 4000, etc.), so kann man die zur Compensation nötige Capacität ein für allemal bestimmen, sodass man, um von der einen Schwingungszahl zur anderen überzugehen nur den Condensator umzustöpseln hat, ohne an dem Messinstrument irgend etwas zu ändern.

Die Aufhebung der Selbstinduction erfolgt naturgemäss nur für die Grundperiode, für andere Schwingungszahlen bleibt der scheinbare Widerstand sehr hoch. Dadurch erhält das Dynamometer wieder dieselbe Eigenschaft, wie das optische Telephon oder das Vibrationsgalvanometer, nämlich nur für Wechselstrom einer bestimmten Periode empfindlich zu sein, nur dass hier die elektrische, dort die akustische Resonanz die Wirkung ausübt. Für alle höheren Schwingungen kann daher das Dynamometer an Stelle jener Apparate gebraucht werden. Für die in den meisten Fällen notwendige Nulleinstellung durch Näherung ist das schnelle Anwachsen des Ausschlags proportional dem Quadrat des Stromes äusserst bequem.

Das Dynamometer erwies sich als merklich gleich empfindlich für alle angewandten Schwingungszahlen und würde

---

1) G. Stern (Wied. Ann. **42.** p. 622. 1891) giebt an, dass er durch Verlängerung der Schwingungsdauer bei einem Giltay'schen Dynamometer eine Empfindlichkeit von $4 . 10^{-7}$ Amp. erzielt habe. Da das Giltay'sche Dynamometer nach Obigem wegen des grösseren Trägheitsmoments und der ungünstigeren Wickelung der Rollen mindestens 5 mal weniger empfindlich gewesen sein muss, wie das meinige, so muss die Schwingungsdauer bei Hrn. Stern die etwas unbequeme Grösse von ca. einer Minute gehabt haben.

es noch für viel höhere sein. Nach den Versuchen von Bjerknes[1]) folgt der Magnetismus auch sehr schnellen Hertz'schen Schwingungen. In unserem Falle könnten die Wirbelströme in dem Eisenblättchen eine Schirmwirkung ausüben. Aus der Oberbeck'schen[2]) Theorie der Foucaultströme ergiebt sich, dass für die Dicke des Eisenblättchens von 0,1 mm und die Susceptibilität von $\varkappa' = 2{,}33$ eine Schwächung der magnetischen Induction um 1 Proc. erst bei einer Frequenz von ca. 100000 eintreten würde. Man könnte jedoch das Eisenblättchen auch aus Eisenblechen von $^1/_{10}$ Dicke zusammenkleben, dann würde die Schwächung von 1 Proc. erst bei einer Schwingungszahl von 10 Millionen eintreten. Ein solches System würde also auf ein magnetisches Feld, das 10 Millionen mal in der Secunde wechselt, mit derselben Empfindlichkeit reagiren, wie auf langsame Feldänderungen, d. h. eine mittlere Feldänderung von 0,01 C.G.S. noch merklich machen.

Schluss.

Im Vorstehenden ist die Erzeugung annähernd reiner verhältnismässig starker Sinusströme bis zu Frequenzen von 17000 mittels der Wechselstromsirene beschrieben, ferner sind Methoden und Instrumente angegeben, um einerseits die Intensität solcher Ströme genau zu messen, andererseits empfindliche Nulleinstellungen in der Wheatstone'schen Brücke damit zu machen.

Die Ströme sollen, abgesehen von physiologischen und akustischen Zwecken, vor allem dazu dienen, die Aenderungen einiger elektro-magnetischen Grössen mit der Schwingungszahl zu untersuchen, z. B. der magnetischen Hysterese und des Energieverlustes im Dielektricum, ferner soll damit der Durchgang schneller Wechselströme durch Kabel, durch Gase etc. studirt werden. Ueber eine derartige Anwendung ist im nächststehenden Artikel berichtet.

Aachen, Physikal. Institut der Technischen Hochschule,
December 1900.

1) V. Bjerknes, Wied. Ann. **48**. p. 692. 1893.
2) A. Oberbeck, Wied. Ann. **21**. p. 672. 1884.

(Eingegangen 20. December 1900.)

2. *Die akustischen und elektrischen Constanten des Telephons; von Max Wien.*

Die Grundbedingung für die Deutlichkeit der Sprachübertragung durch ein Telephon ist die, dass die relative Amplitude der verschiedenen Töne, aus denen die Sprache sich zusammensetzt, dieselbe bleibt, dass also alle Töne in demselben Verhältnis geschwächt reproducirt werden.

Die Einwirkung der Leitung und des Mikrophons als Aufnahmeapparat sollen hier nicht besprochen, sondern es soll nur die Frage erörtert werden, ob in dem Telephon selbst — einerseits als elektromagnetischer Apparat, andererseits als akustischer Apparat betrachtet — Gründe für eine verschiedene Uebertragung von Tönen verschiedener Höhe vorhanden sind.

Der Ton des Telephons rührt von der Bewegung der Platte her; die Kraft, welche die Platte bewegt, ist die magnetische Induction in dem Eisenkern der Telephonspule; die Aenderungen der magnetischen Induction werden durch den in der Spule fliessenden Wechselstrom bewirkt. Es kommen daher hier folgende Fragen in Betracht: Wie ändert sich für die verschiedenen Schwingungszahlen 1. bei gleicher elektromotorischer Kraft die Stromintensität, 2. bei gleicher Stromintensität die magnetische Induction, 3. bei gleicher magnetischer Induction die Amplitude der Platte.

Die Stromstärke hängt in bekannter Weise von dem Widerstand und der Selbstinduction ab, die Erscheinung wird aber dadurch wesentlich complicirter, dass der „wirksame" Widerstand und das „wirksame" Selbstpotential[1]) des Telephons in hohem Maasse von der Schwingungszahl abhängig sind, weil infolge der Foucaultströme im Eisenkern der Telephon-

1) Für einen Wechselstrom von gegebener Frequenz und Stärke kann eine Spule mit Eisenkern in ihrer Wirkung auf den Strom stets durch eine Spule ohne Eisenkern von passendem Widerstand ersetzt werden. Der „wirksame" Widerstand und die „wirksame" Selbstinduction der Spule mit Eisenkern ist gleich dem Widerstand und der Selbstinduction der ersetzenden Spule.

spule der Widerstand mit der Frequenz steigen, das Selbstpotential abnehmen muss. Ferner lässt sich von vornherein übersehen, dass die magnetische Induction mit der Schwingungszahl sinkt, weil die Foucaultströme auf den mittleren Teil des Eisenkernes eine Schirmwirkung ausüben. Schliesslich muss bei gleicher bewegender Kraft die Amplitude der Telephonplatte für ihre Eigentöne eine Anzahl von Maximis zeigen.

Die in der menschlichen Sprache vorkommenden Töne beginnen bei den tiefsten überhaupt hörbaren Schwingungszahlen, also etwa bei 16 in der Secunde, und gehen bei den charakteristischen Tönen mancher Vocale und vor allem bei den Zischlauten bis zu 10000 und darüber.[1]) Zwischen diesen Grenzen sollen die in Betracht kommenden akustischen und elektrischen Grössen bestimmt werden und zwar für folgende Telephone: 1. ein Bell'sches Telephon, 2. ein älteres Telephon von Siemens & Halske (Nr. 13306), 3. ein neueres Telephon von Siemens & Halske (Nr. 353968), 4. ein Dosentelephon, bezogen von Apel-Göttingen, wie es bei der Nernst'schen Methode zur Bestimmung der Dielektricitätsconstanten mit Vorteil gebraucht wird. Die Verständigung bei der Sprachübertragung war bei allen vier Telephonen nicht merklich verschieden. Die Vocale wurden rein wiedergegeben und auch ähnliche Worte wie „Pfirsich" und „Vierzig" wurden überall mit voller Sicherheit unterschieden. Das ältere Siemens'sche Telephon gab die Zischlaute nur sehr leise wieder. Die Klangfarbe hatte bei dem Apel'schen Telephon einen nasalen Charakter.

Die zur Untersuchung dienenden Ströme wurden durch die im vorstehenden Artikel beschriebene Wechselstromsirene

---

1) Vgl. L. Hermann, Pflüger's Archiv **53.** p. 1. 1893 und **83.** p. 1. 1900. Ueber die Grössenordnung der Schwingungszahlen, welche die charakteristischen Töne der Zischlaute besitzen, kann man in folgender Weise einen Anhalt bekommen: Eine empfindliche Flamme, die bei einer Ausströmungsöffnung von 1 mm Weite unter dem hohen Gasdrucke von 26 cm Wasser functionirt, reagirt nicht merklich auf hohe gesungene Töne, wohl aber sehr gut auf Zischlaute. Mit der Edelmann'schen Galtonpfeife untersucht, zeigte es sich, dass erst Töne mit über 5000 Schwingungen die Flamme stark beeinflussen, am empfindlichsten war sie für Töne, die an der Grenze der Hörbarkeit und darüber hinaus liegen, also etwa 50000 Schwingungen machen.

erzeugt, die annähernd reine Sinusströme bis zu Frequenzen von ca. 17000 zu liefern im Stande ist. Die Ströme mit den Schwingungszahlen 64 und 128 wurden von einem Sinusinductor hervorgerufen.

Die wirksame Selbsinduction und der wirksame Widerstand wurden nach der Maxwell'schen Brückenmethode gemessen. Der durch das Brückensystem gesandte Sinusstrom wurde so schwach genommen, dass die magnetische Induction in dem Telephonelektromagneten nicht über den ersten linearen Teil hinausging, das Selbstpotential mithin von der Stromstärke unabhängig war.[1]) Dies wurde in der Weise festgestellt, dass bei Verdoppelung des Stromes die Brückeneinstellung sich nicht ändern durfte. Als Brückeninstrument diente das ebenfalls in der vorstehenden Abhandlung beschriebene Bellati-Giltay'sche Dynamometer. Die Resultate der Messungen an den verschiedenen Telephonen waren folgende: N bedeutet die Schwingungszahl, $N = 0$ constanten Strom, W' den wirksamen Widerstand in Ohm und L' die wirksame Selbstinduction in Centimetern.

Tabelle I.

Wirksamer Widerstand und Selbstinduction der Telephone für verschiedene Schwingungszahlen.

	Bell		Siemens I		Siemens II		Apel	
N	W'	L'	W'	L'	W'	L'	W'	L'
0	6,67	—	186,6	—	199,7	—	96,2	—
256	6,90	$3,53 . 10^6$	238.6	$1,17 . 10^8$	286,5	$1,93 . 10^8$	108,7	$3,73 . 10^7$
1000	9,52	$3,28 . 10^6$	422,6	$7,45 . 10^7$	586,2	$1,23 . 10^8$	159,0	$3,08 . 10^7$
4000	21,7	$2,75 . 10^6$	963	$3,97 . 10^7$	1494	$8,87 . 10^7$	329,7	$2,50 . 10^7$
8000	33,2	$2,42 . 10^6$	1275	$2,94 . 10^7$	2100	$6,8 . 10^7$	482	$1,96 . 10^7$
16000	37,5	$2,16 . 10^6$	1457	$2,30 . 10^7$	2590	$5,8 . 10^7$	609	$1,63 . 10^7$

1) Messungen der Selbstinduction von Telephonen mit constantem Strome nach der Maxwell'schen Methode, wie sie mehrfach (L. Hermann, Pflüg. Arch. 48. p. 543. 1891 und Strecker u. Billig, Mitth. Telegraph. Ing.-Bür. d. Reichspostamts 1896) ausgeführt sind, liefern Werte, die mit den für telephonische Ströme in Betracht kommenden sich nicht direct vergleichen lassen, besonders wenn die Intensität des constanten Stromes nicht äusserst gering gewählt wurde. Ueberhaupt muss bei Messungen von Grössen, die für Wechselstrom Gültigkeit haben sollen, stets auch *Wechselstrom* derselben Schwingungszahl und Intensität angewandt werden.

Wir sehen, dass der wirksame Widerstand, entsprechend dem grösseren Energieverlust durch Wirbelströme, mit wachsender Schwingungszahl stark ansteigt, bei dem Telephon Siemens II sogar den 13 fachen Wert des wahren Widerstandes ($N = 0$) erreicht. Auf der anderen Seite nimmt das wirksame Selbstpotential ab, am stärksten bei dem Telephon Siemens I, wo es etwa auf den fünften Teil des Wertes für die Schwingungszahl 256 sinkt. Die Selbstinduction für $N = 256$ ist noch wenig von den Wirbelströmen beeinflusst, wie Vergleichsmessungen mit $N = 128$ zeigten. Der Unterschied zwischen den Werten bei $N = 8000$ und $N = 16000$ ist verhältnismässig gering: es nehmen merklich nur noch die äussersten Schichten des Eisens an der Magnetisirung teil, und die Anzahl der Kraftlinien ist nicht sehr viel grösser als wenn überhaupt kein Eisen vorhanden wäre.

Indem wir mit Helmholtz[1]) annehmen, dass die elektromotorische Kraft in dem Telephonstromkreise proportional der Schwingungszahl wächst, so ist die Stromstärke proportional $n / \sqrt{W'^2 + n^2 L'^2}$, worin $n = 2\pi N$ die Schwingungszahl in 2π Secunden bedeutet. Wenn L' gross gegen W' ist, so ist der Ausdruck merklich unabhängig von n, vorausgesetzt, dass W' und L' nicht von der Schwingungszahl abhängen. Wie wir soeben gesehen haben, ist dies jedoch in hohem Maasse der Fall: W' steigt mit der Frequenz, L' sinkt. Letzteres ist bei hohen Schwingungszahlen von grösserem Einfluss, sodass z. B. für Telephon Siemens II der Ausdruck $n / \sqrt{W'^2 + n^2 L'^2}$ für $N = 16000$ 3,4 mal so gross ist, wie für $N = 256$, die Intensität des entsprechenden Tones wäre hiernach $(3,4)^2 = 11,5$ mal grösser. Auf der anderen Seite sinkt die magnetische Induction mit der Schwingungszahl proportional L' und damit die Amplitude der Platte und die Intensität der höheren Töne. Bei dem Telephon Siemens II wird aus diesem Grunde die Intensität des Tones $N = 16000$ mehr als 25 mal kleiner sein wie die des Tones 256 bei gleicher Intensität des Wechselstromes.

Es machen sich hier offenbar zwei entgegengesetzte Einflüsse geltend; ob sie sich vielleicht einmal in ihrer Wirkung

1) H. v. Helmholtz, Wissensch. Abhandl. 1. p. 465.

gerade compensiren, oder ob die hohen Töne relativ geschwächt bez. verstärkt werden, hängt in den einzelnen Fällen von den äusseren Umständen, dem Widerstand und der Capacität der Leitung etc., ab. Jedenfalls spielt diese Aenderung der elektromagnetischen Constanten mit der Schwingungszahl bei der Sprachübertragung durch das Telephon eine hervorragende Rolle, und man darf nicht etwa einfach den Widerstand bei constantem Strom und den nach der Maxwell'schen Methode mit Stromschluss oder Oeffnung gefundenen Wert des Selbstpotentiales der Rechnung zu Grunde legen.

Noch weitgehender ist der Einfluss der rein akustischen Eigenschaften des Telephons. Hätte die Telephonplatte nur einen einzigen Eigenton p, so würde die Amplitude der Platte bei einer sinusförmigen bewegenden Kraft mit der Schwingungszahl n in 2π sec umgekehrt proportional $\sqrt{(n^2 - p^2)^2 + n^2 k^2}$ sein, also für $p = n$ ein mehr oder weniger ausgeprägtes Maximum zeigen, je nach der Grösse der Dämpfung k. Dieselbe hängt von der Platte selbst, der Art ihrer Befestigung und der Stärke des Telephonmagnets ab. Von den untersuchten vier Telephonen besass das Bell'sche Telephon die geringste, das Apel'sche die stärkste Dämpfung.

Wenn man durch die Telephone mittels der Wechselstromsirene einen Sinusstrom hindurchschickt und seine Schwingungszahl allmählich ändert, so machen sich die Eigentöne der Telephonplatte durch stärkere Intensität bemerkbar. Je nachdem dieselben mehr oder weniger ausgeprägt sind, und je nach der Dämpfung der Platte bewirken sie ein scharfes Aufgellen des Tones oder ein langsameres Ansteigen und Wiederabfallen der Tonstärke. Die tieferen Eigentöne sind deutlicher herauszuhören wie die höheren. Die Maxima erstrecken sich meist über einen ziemlich grossen Tonbereich, bis zu mehreren Hundert Schwingungen bei den höheren Eigentönen. Die Schwingungszahlen der Eigentöne ergeben sich aus folgender Tabelle:

Tabelle II.

Bell	1100	2800	6500	Darüber bei allen Telephonen noch mehrere schwächer ausgebildete Eigentöne, vor allem bei dem Apel'schen Telephon.
Apel	1060	2500	5600	
Siemens I	720	2100	5000	
Siemens II	750	2350	5400	

Offenbar liegen sämtliche Eigentöne bei den Siemens'-
:hen Telephonen etwas tiefer, als bei den beiden anderen.
ine auffallende Erscheinung ist, dass mehrfach bei den höheren
igentönen statt eines ausgesprochenen Maximums 2—3 Maxima
on ziemlich gleicher Stärke dicht beieinander auftreten. Be-
onders ausgeprägt war dies bei den Eigentönen 5000 bez.
400 der beiden Siemens'schen Telephone.

Eine andere Methode zur Untersuchung der Lage der
igentöne und ihres Einflusses auf die Intensität der durch
as Telephon reproducirten Töne besteht in der Messung der
*:hwächsten Ströme, die einen noch gerade hörbaren Ton in dem
elephon erzeugen.* Derartige Untersuchungen sind schon mehr-
.ch angestellt und dabei für die eben noch merklichen Strom-
ärken sehr verschiedene, zum Teil ausserordentlich niedrige
'erte erzielt.[1]) Die Differenzen in den Resultaten dürften
.uptsächlich darin ihren Grund haben, dass meistens statt
ıes einfachen Sinusstromes der Wechselstrom eines Induc-
:iums mit spitzen Oeffnungsstromstössen verwandt wurde.
ese Stromstösse werden im Hörtelephon nun noch gehört[2]),
nn auch die mittlere Intensität des ganzen Wechselstromes
ır gering ist. Ein Analogon dazu würde etwa in den Auf-
chnungen in eine Phonographenwalze zu finden sein, die
weit von dem Schreibstift entfernt ist, sodass nur die
ösSten Excursionen eingekrazt werden.

Lord Rayleigh[3]) hat mit einem Sinusinductor und für

1) Vgl. hierüber Lord Rayleigh, Phil. Mag. 38. p. 294. 1894.

2) Vielfach ist die Ansicht verbreitet und ich habe dieselbe eben-
s vertreten, dass das Hörtelephon besonders empfindlich für ganz hohe
ne sei, eine Ansicht, die hauptsächlich darauf begründet war, dass bei
Widerstandsmessung zersetzbarer Leiter nach der F. Kohlrausch'-
en Methode auch bei verhältnismässig starker Polarisation noch ein gutes
ıimum zu erzielen ist und die Lage desselben mit dem Minimum von
ömen sehr hoher Wechselzahl übereinstimmt. Das Hörtelephon ist
och, wie aus den weiter unten mitgeteilten Zahlen hervorgeht, für
ıe mit über 10000 Schwingungen in der Secunde sehr unempfindlich:
Einstellung erfolgt in Wirklichkeit auf das Minimum der genannten
:zen Stromstösse, die sehr schnell verlaufen und sich daher elektrisch
sehr schnelle Wechselströme verhalten, während sie akustisch das
annte charakteristische „Telephongeräusch" erzeugen, das unter Um-
ıden die musikalischen Töne des Telephonklanges überdeckt.

3) Lord Rayleigh, l. c.

höhere Frequenzen mit den annähernd sinusförmigen Strömen gearbeitet, welche beim Anschlagen magnetisirter Stimmgabeln in zwischen den Zinken befindlichen Rollen inducirt wurden. Er erreichte auch hiermit nur Frequenzen bis zu 768, wobei die Beobachtung wegen der sehr kurzen Dauer der Stimmgabelschwingung schwierig wurde. Seine Resultate für ein Telephon mit 70 Ohm Widerstand waren folgende:

N	128	192	256	307	320	384	512	640	768
Strom in 10^{-8} Amp.	2800	250	88	49	32	15	7	4,4	10

Dieselben sind mit meinen weiter unten mitgeteilten Werten qualitativ in guter Uebereinstimmung.

Um die Empfindlichkeit der vier Telephone für verschiedene Tonhöhen festzustellen, wurde der Strom der Wechselstromsirene in ein entferntes, möglichst ruhiges Zimmer geleitet und dort durch geeignete Abzweigung die Reizschwelle für den betreffenden Ton und die verschiedenen Telephone festgestellt. Die Resultate sind in der folgenden Tabelle angegeben. Dieselben beziehen sich auf mein rechtes Ohr und geben die Stromstärke in 10^{-8} Amp. an, welche einen Ton hervorrief, den ich beim Oeffnen und Schliessen noch mit Sicherheit wahrnehmen konnte.

Tabelle III.

Empfindlichkeit verschiedener Telephone.

N	Bell	Apel	Siemens I	Siemens II
64	190000 . 10^{-8} Amp.	5000 . 10^{-8}	1800 . 10^{-8}	1200 . 10^{-8}
128	15000	510	220	150
256	1050	40	26	13,5
512	150	10	1,7	2,7
720	—	—	1,5	0,8
1024	18	3,5	3,0	1,35
1500	30	2,3	6,0	2,4
2030	130	3,5	0,8	3,0
2400	—	5,0	2,0	1,0
2800	70	—	—	—
4000	230	70	50	30
8000	2500	170	700	400
16000	12000	1000	2200	1700

Das Bell'sche Telephon hat durchweg eine geringere Empfindlichkeit, wie die anderen drei Instrumente, entsprechend seinem geringeren Widerstand (vgl. Tab. 1, $N = 0$). Alle vier Telephone zeigen eine besonders grosse Empfindlichkeit für die Ströme zwischen den Schwingungszahlen 500 und 3000; sowohl nach der Tiefe wie nach der Höhe zu nimmt sie schnell ab, sodass z. B. bei dem Bell'schen Telephon für $N = 64$ eine mehr als 10000 fache Stromintensität oder eine mehr als 100 Millionen mal so grosse Stromenergie zur Hervorbringung eines eben merklichen Tones notwendig ist, wie für $N = 1024$.

Dieser steile Abfall der Empfindlichkeit für hohe und tiefe Töne kann nicht etwa allein durch die akustischen Eigenschaften des Telephons, die Eigentöne der Platte erklärt werden: zum weitaus grössten Teil ist er durch die verschiedene Empfindlichkeit des menschlichen Ohres für Töne verschiedener Höhe bedingt. Auf die Schlüsse, die man hierauf aus den Versuchen ziehen kann, hoffe ich anderer Stelle eingehen zu können.

Die fettgedruckten Zahlen der Tab. III, welche die Maxima der Empfindlichkeit für das betreffende Telephon angeben, fallen im allgemeinen mit den oben direct bestimmten Eigentönen der Telephonplatte zusammen. Am deutlichsten zeigt sich dies bei dem Bell'schen Telephon, das auch die geringste Dämpfung besitzt. Bei den beiden Telephonen von Siemens und Halske zeichnen sich die Eigentöne ebenfalls durch besonders geringe Stromintensitäten aus, bei dem stark gedämpften Apel'schen Telephon liegt jedoch das Maximum der Empfindlichkeit $N = 1500$ zwischen zwei Eigentönen ($N = 1060$ und $N = 2500$).

Die wichtigsten charakteristischen Töne der menschlichen Sprache fallen zwischen die Schwingungszahlen 500 und 3000, wo alle vier Telephone die grösste Empfindlichkeit zeigen. Dieser Umstand mag viel zur Deutlichkeit der Sprachübertragung beitragen. Auf der anderen Seite sind die Unterschiede in der Empfindlichkeit für verhältnismässig kleine Differenzen in den Schwingungszahlen gerade in diesem Gebiete sehr gross, weil die wichtigsten Eigentöne der Platte in dasselbe fallen. Die relative Intensität der höheren Töne

muss infolge dessen sehr verschieden ausfallen, je nach dem Telephon, das man gerade gebraucht. So verhält sich z. B. bei dem Bell'schen Telephon die Empfindlichkeit für $N = 256$ zu der für $N = 4000$ wie $230/1050$ — es sind absichtlich nicht ausgesprochene Eigentöne gewählt — während sich dasselbe Verhältnis bei dem Telephon Siemens II zu $30/13,5$ ergiebt. Bei gleicher Intensität des Tones 256 muss daher das Siemens'sche Telephon den Ton 4000 ca. 100 mal so laut übertragen, wie das Bell'sche.

Bei klangvollem und lautem Hineinsprechen in das Mikrophon machen sich ja oft die Eigentöne der Telephonplatte unangenehm bemerkbar. Im allgemeinen ist jedoch bei diesem wie bei jenem Telephon, bei hohen wie bei tiefen Stimmen eine gute Verständigung möglich. Es kann dies nur durch die erstaunliche Empfindlichkeit des menschlichen Ohres für das Charakteristische in den Vocalen und Consonanten erklärt werden, das noch nicht völlig verwischt ist, trotz der grossen Veränderungen der Klangfarbe, die nach dem Vorstehenden unzweifelhaft infolge der akustischen und elektromagnetischen Eigenschaften des Telephons eintreten müssen.

Aachen, Physik. Institut der Technischen Hochschule, December 1900.

(Eingegangen 20. December 1900.)

---

3. *Zur Theorie der Niederschlagsbildung an Gebirgen; von F. Pockels.*

Es ist ein längst bekannter Satz der Klimatologie, dass die der vorherrschenden Windrichtung zugewandte Seite eines Gebirges im allgemeinen eine erhöhte Niederschlagsmenge im Vergleich zur vorgelagerten Ebene, und um so mehr zur entgegengesetzten Seite des Gebirgszuges, besitzt. Auch über die Erklärung dieser Erscheinung besteht kein Zweifel, seitdem man in der adiabatischen Abkühlung aufsteigender Luftmassen die wichtigste Ursache der Condensation des atmosphärischen Wasserdampfes erkannt hat; denn der gegen eine Bodenerhebung treffende Luftstrom muss beim Ueberschreiten derselben notwendig eine Hebung erfahren. Es ist aber, soweit dem Verf. bekannt, noch nicht versucht worden, den Vorgang quantitativ zu verfolgen, ausser etwa für die dem Boden unmittelbar anliegende Luftschicht, deren Hebung, als derjenigen des Bodens selbst gleich, direct bekannt ist. Eine solche quantitative Behandlung soll im Folgenden versucht werden. Wenngleich dieselbe nur unter speciellen Voraussetzungen möglich ist, welche in der Natur höchstens annäherungsweise erfüllt sein werden, so dürfte sie immerhin einen brauchbaren Anhalt bieten zur Beurteilung des rein mechanischen Einflusses der Bodengestaltung auf die Niederschlagsbildung.

1.

Wir müssen, um die für die Condensation maassgebende verticale Geschwindigkeitscomponente des Luftstromes zu finden, zunächst die hydrodynamische Aufgabe der Strömung der Luft über einen starren Boden von gegebener Gestalt lösen. Hierbei müssen wir eine Reihe vereinfachender Annahmen machen; es sollen die folgenden sein.

1. Die Strömung soll stationär sein; 2. sie soll wirbelfrei und continuirlich sein; 3. sie erfolge überall parallel zu einer bestimmten Verticalebene und sei somit ausser von der verticalen Coordinate (y) nur von *einer* horizontalen (x) abhängig;

4. die innere Reibung sowohl als die äussere (an der Erdoberfläche) werde vernachlässigt; 5. in grosser Höhe herrsche eine rein horizontale Strömung von constanter Geschwindigkeit a. Ueber die Bodengestalt müssen wir entsprechend der Annahme 3. voraussetzen, dass die Profilcurven in allen zur xy-Ebene parallelen Verticalebenen identisch sind. Ferner wollen wir 6. das Bodenprofil als *periodisch*, d. h. die Erdoberfläche als aus gleichgestalteten parallelen Gebirgswellen gebildet voraussetzen, ohne aber die Gleichung der Profilcurve von vornherein specieller festzusetzen.

Bezeichnet man mit u und v die horizontale und verticale Geschwindigkeitscomponente, mit ε die Dichte, so besteht zufolge den Voraussetzungen 1. und 3. die Bedingung

$$\frac{\partial (\varepsilon u)}{\partial x} + \frac{\partial (\varepsilon v)}{\partial y} = 0,$$

und zufolge 2. existirt ein Geschwindigkeitspotential φ, welches nach 3. nur von x und y abhängen kann, sodass

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = 0.$$

Bedenkt man, dass die Dichte der Luft in horizontaler Richtung (wenn grosse Temperaturunterschiede in gleichem Niveau ausgeschlossen werden) sehr viel langsamer variirt als in verticaler, so kann man ε als Function von y allein ansehen und erhält für φ die Differentialgleichung

$$(1) \qquad \varepsilon \Delta \varphi = - \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Das Gesetz für die Abnahme der Dichte mit der Höhe wird strenggenommen in jedem besonderen Falle ein verschiedenes sein, da die dasselbe mitbestimmende verticale Temperaturabnahme in einem aufsteigenden Luftstrom von der Condensation abhängt. Es ist aber, wie es ja auch gewöhnlich bei barometrischen Höhenmessungen geschieht, als gute Annäherung statthaft, das für constante Temperatur gültige Gesetz der Luftdruckabnahme zu Grunde zu legen, welches bekanntlich lautet:

$$\log \text{nat} \frac{p_0}{p} = q \cdot y,$$

wo q eine Constante ist, welche, wenn die Höhendifferenz y in Metern ausgedrückt wird, nahezu den Wert $^1/_{8000}$ hat. Dann gilt auch:

$$\log \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} = q \cdot y \,,$$

und folglich

$$-\frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = q \,,$$

wodurch die Differentialgleichung für φ diese wird:

$$\Delta \varphi = q \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} \,. \tag{2}$$

Eine den Annahmen 5. und 6. genügende Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$\varphi = a(x - b \cos m x \,.\, e^{-ny}) \,, \tag{3}$$

wobei zwischen den Constanten m und n die Relation besteht:

$$\left\{ \begin{aligned} & m^2 - n^2 = q \,.\, n; \\ & n = -\frac{q}{2} + r, \text{ wo } r = \sqrt{m^2 + q^2/4}. \end{aligned} \right. \tag{4}$$

Um zu erfahren, welchem Bodenprofil die durch dieses Geschwindigkeitspotential bestimmte Strömung entspricht, suchen wir die Strömungslinien auf; denn eine solche muss ja mit der Profilcurve zusammenfallen. Die Differentialgleichung der Strömungslinien lautet

$$d y : d x = \frac{\partial \varphi}{\partial y} : \frac{\partial \varphi}{\partial x} = a b n \cos m x e^{-ny} : a(1 + b m \sin m x e^{-ny}) \,.$$

Ihre Integration ergiebt:

$$e^{-ny} \,.\, \sin m x = -\frac{m}{b q n} + B e^{qy} \,, \tag{5}$$

wobei B den Parameter der Strömungslinien bedeutet.

Setzt man fest, dass die Bodenprofilcurve durch den Punkt $x = 0$, $y = 0$ geht, so wird speciell für diese $B = (m / b q n)$, und ihre Gleichung heisst, wenn ihre Ordinate mit η bezeichnet wird:

$$b \frac{q n}{m} \sin m x e^{-n\eta} = e^{q\eta} - 1$$

oder

$$b \frac{n}{m} \sin m x e^{-r\eta} = \frac{e^{\frac{q}{2}\eta} - e^{-\frac{q}{2}\eta}}{q} \,.$$

Sofern nun η so klein bleibt, dass $(q\eta/2)^2$ auch für die [hö]chsten und tiefsten Punkte des Bodenprofils neben 1 zu vernachlässigen ist, was bei den für uns in Betracht kommenden Gebirgserhebungen praktisch immer zutrifft, so kann man schreiben:

$$(5') \qquad \eta = b \cdot \frac{n}{m} \cdot \sin m x \, e^{-r\eta}; \qquad \left[\begin{array}{l} n = -\frac{q}{2} + r, \\ r = \sqrt{m^2 + q^2/4} \end{array}\right].$$

Hierin erscheinen b und m als willkürlich wählbare Parameter, deren erster die *Höhe*, deren zweiter die horizontalen *Abstände* der Bergrücken bestimmt; es ist nämlich $m = (2\pi/\lambda)$, wenn λ die „Wellenlänge", d. h. die Entfernung zweier correspondirender Punkte (z. B. der Gipfel) benachbarter Bergzüge bedeutet.

Für die durch die transcendente Gleichung (5') gegebene Bodengestalt ist die durch das Geschwindigkeitspotential (3) bestimmte Strömung die *einzige* mit den allgemeinen Bedingungen 1. bis 5. vereinbare, wie leicht zu zeigen ist. Da ferner eine Potentialströmung auch durch die Werte von $\partial\varphi/\partial n$ längs der Begrenzung eines geschlossenen Bereiches für dessen Inneres eindeutig bestimmt ist, so wird unsere Lösung, falls sie etwa über den Thalmitten constante (oder mit der Höhe nur langsam abnehmende) horizontale Geschwindigkeit ergiebt, auch auf den praktisch besonders interessanten Fall anwendbar sein, dass sich nur *ein einzelner* Bergrücken über einer ausgedehnten *Ebene* erhebt und von einem gleichförmigen horizontalen Luftstrome senkrecht getroffen wird. Inwieweit dies zutrifft, wird in jedem speciellen Falle festzustellen sein.

Die unserer Lösung entsprechenden horizontalen und vertical aufwärts gerichteten Geschwindigkeitscomponenten sind:

$$(6) \qquad u = a(1 + b m \sin m x \, e^{-ny})$$

$$(7) \qquad v = \quad a b n \cos m x \, e^{-ny}.$$

Es wäre nun, um in der Natur wirklich vorliegende Fälle behandeln zu können, erwünscht, die Lösung einer willkürlich gegebenen Bodengestalt anpassen zu können. Der Gedanke liegt nahe, dies durch Superposition einer Reihe von Ge-

schwindigkeitspotentialen der Form (3) mit verschiedenen Constanten m und b zu versuchen, also zu setzen

$$(8)\qquad \varphi = \sum \varphi_h = a\{x - \sum^h b_h \cos m_h x\, e^{-n_h y}\};$$

allein man findet, dass dieser Lösung nur dann auch eine Superposition der Profilcurven entspricht, d. h. nur dann auch

$$(9)\qquad \eta = \sum \eta_h = \sum b_h \frac{n_h}{m_h} \sin m_h x\, e^{-r_h \eta}$$

wird, wenn man die Exponentialfunction $e^{-n_h \eta}$ und $e^{-r_h \eta} = 1$ setzen kann. Dann geht zugleich η in die einfache trigonometrische Reihe

$$(9')\qquad \eta = \sum^h b_h \frac{n_h}{m_h} \sin m_h x$$

über, und man könnte also, indem man $m_h = h . m_1$ nimmt, im Intervall $0 < x < (\lambda / 2)$ eine willkürliche Function $\eta = f(x)$ durch jene Reihe darstellen. Allein die Bedingung, dass $e^{\pm h m \eta}$ noch für beliebig grosses h gleich Eins zu setzen sei, wird bei *beliebiger* Gestalt der darzustellenden Profilcurve auch dann nicht erfüllt sein, wenn deren Maximalhöhe gegen die „Wellenlänge“ λ sehr klein vorausgesetzt wird. Man wird sich demnach auf eine *annähernde* Darstellung der gewünschten Profilcurve durch eine *endliche* Anzahl von Reihengliedern beschränken müssen. Insbesondere wird man auf dem angegebenen Wege niemals die strenge Lösung für ein Bodenprofil mit *Ecken* herstellen können. Indessen haben die fortzulassenden höheren Reihenglieder um so geringeren Einfluss auf die verticale Geschwindigkeit in grösseren Höhen und somit auf das die Niederschlagsmenge betreffende Resultat, je grösser ihre Ordnungszahl h ist.

2.

Wir wollen als erstes Beispiel eine Profilgestalt wählen, welche möglichst ebenen, breiten Thalböden und plateauartigen Bergrücken entspricht, weil man dann am Bergabhange nahe dieselben Verhältnisse zu erwarten hat, wie wenn derselbe von einem gleichförmigen horizontalen Luftstrome getroffen würde.

Eine derartige Profilcurve, welche im Intervall

$$-\frac{\lambda}{12} < x < +\frac{\lambda}{12}$$

...nsteigt, zwischen $x = \frac{5}{12}\lambda$ und $x = \frac{7}{12}\lambda$ ebenso ...er Neigung) abfällt und in den zwischenliegenden Geb... s horizontale Gerade im Abstande $\pm H$ von der ... uft, erhielte man durch die Fourier'sche Reihe:

$$\eta = \frac{24\,H}{\pi^2}\sum_h \frac{1}{h^2}\sin\frac{h\,\pi}{6}\,.\sin\frac{2\,h\,\pi}{\lambda}\,x,$$

worin h alle positiven *ungeraden* Zahlen durchläuft. Wir nehmen zur Darstellung einer sich der beschriebenen Gestalt annähernden Profilcurve die ersten drei Glieder dieser Reihe, setzen also:

$$(10)\qquad \eta = C\{\tfrac{1}{2}\sin m_1\,x + \tfrac{1}{9}\sin 3\,m_1\,x + \tfrac{1}{50}\sin 5\,m_1\,x\}.$$

Die numerischen Werte der Parameter seien:

$$\lambda = 60000\,\mathrm{m},\quad \text{also}\quad m_1 = \frac{2\,\pi}{\lambda} = 0{,}1047\,.\,10^{-3},$$

und

$$C = 1100\,\mathrm{m}.$$

Dann erhalten die Coefficienten b_h in den Ausdrücken (8) und (9) die Werte

$$b_1 = 881,\quad b_3 = 148{,}3,\quad b_5 = 24{,}8.$$

Das durch die Gleichung (10) gegebene Profil ist in Fig. 1 (p. 470) in 5 facher Ueberhöhung dargestellt. Man erkennt, dass der Anstieg sich wesentlich auf das Intervall

$$-\frac{\lambda}{12} < x < +\frac{\lambda}{12}$$

beschränkt, wo er auch ziemlich gleichförmig ist, ferner dass der Thalboden in der Mitte wieder ein wenig gehoben und das Bergplateau um ebensoviel eingesenkt ist. Die Höhendifferenz der Thal- und Bergmitte, welche nach den angenommenen Zahlwerten 900 m beträgt, ist daher nicht die absolut grösste, bleibt aber nur um ca. 18 m hinter letzterer zurück.

Die betrachtete Profilcurve entspricht dem durch obige Coefficienten b_h bestimmten Geschwindigkeitspotential

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} \varphi = a\{x &- b_1\cos(m_1\,x)\,e^{-n_1 y} - b_3\cos(3\,m_1\,x)\,e^{-n_3 y} \\ &- b_5\cos(5\,m_1\,x)\,e^{-n_5 y}\}, \end{aligned}\right.$$

allerdings nach dem oben erörterten nur annähernd, doch überzeugt man sich, dass im vorliegenden Beispiel die Abweichungen in der Fig. 1 kaum zum Ausdruck kommen würden.

Aus vorstehendem φ ergeben sich die Componenten der Strömungsgeschwindigkeit:

$$(12)\quad \begin{cases} u = a\{1 + \sum b_h\, m_h\, e^{-n_h y} \sin m_h x\} \\ \quad = a\left\{1 + \frac{2\pi}{\lambda}\,(b_1\, e^{-n_1 y} \sin m_1 x + 3\, b_3\, e^{-n_3 y} \sin 3\, m_1 x \right. \\ \qquad\qquad \left. + 5\, b_5\, e^{-n_5 y} \sin 5\, m_1 x)\right\}, \end{cases}$$

$$(13)\quad \begin{cases} v = a\,.\sum b_h\, n_h\, e^{-n_h y} \cos m_h x \\ \quad = a\,.\,0{,}1152\,.\{\frac{1}{2}\, e^{-n_1 y} \cos m_1 x + \frac{1}{3}\, e^{-n_3 y} \cos 3\, m_1 x \\ \qquad\qquad + \frac{1}{10}\, e^{-n_5 y} \cos 5\, m_1 x\}. \end{cases}$$

Für $x = 0$, d. h. über der Mitte des Bergabhanges, ist u in allen Höhen constant gleich a, über dem Thal ($x < 0$) kleiner, über dem Berge grösser; a hat auch die Bedeutung der *mittleren* horizontalen Geschwindigkeit in irgend einem Höhenniveau.

Für verschiedene Höhen H über der Thalmitte findet man:

$H = 450 + y$:	0	450	2000	5000
$\frac{u-a}{a}$:	$-$ 0,068	$-$ 0,0676	$-$ 0,0675	$-$ 0,0646

Bis zur Höhe von 5000 m ist dort also die horizontale Geschwindigkeit merklich constant, die verticale Null; somit würde nach dem p. 462 Gesagten unsere Lösung auch für den Fall gelten, dass sich das Profil von $x = -(\lambda/4)$ an nach der negativen Seite unbegrenzt als horizontale Gerade fortsetzte, und darüber ein rein horizontaler Luftstrom flösse, dessen Geschwindigkeit bis zur Höhe von 5000 m merklich constant (0,93 a) ist und in noch höheren Schichten allmählich bis a wächst.

Ueber dem Berge (bei $x = +\lambda/4$) sind die Geschwindigkeiten u nahe um ebensoviel grösser als a, als sie über dem Thale kleiner sind.

Die Verteilung der verticalen Geschwindigkeitscomponente, welche für die Condensation maassgebend ist, ist eine complicirtere; um eine Vorstellung von ihr zu geben, seien die Werte von v/a für verschiedene Werte der x- und y-Coordinate angegeben:

	$x = 0$	$\pm \frac{\lambda}{12}$	$\pm \frac{\lambda}{8}$	$\pm \frac{\lambda}{6}$	$\pm \frac{\lambda}{4}$
$y =$ 500	0,099	0,0406	0,0129	− 0,0012	0
1530	0,0842	0,04075	0,0149	+ 0,00226	0
2440	0,0740	0,0400	0,0182	0,0064	0
3460	0,0651	0,0387	0,0206	0,0093	0
4530	0,0575	0,0370	0,0217	0,0108	0

Während also über der Mitte des Bergabhanges eine stetige Abnahme von v mit der Höhe stattfindet, nimmt diese Grösse in der Nähe des Fusses des Berges, sowie des Plateaurandes (bei $x = \pm \lambda/8$) mit der Höhe zunächst zu bis zu einem in sehr grosser Höhe gelegenen Maximum. (Der für $x = \lambda/6$, $y = 500$ auftretende vereinzelte negative Wert erklärt sich durch die erwähnte schwache Einsenkung des Bergplateaus.)

Um nun die *Condensation des Wasserdampfes* zu untersuchen, welche infolge des durch die Bodenerhebung erzwungenen aufsteigenden Luftstromes eintritt, machen wir zunächst die Annahme, dass die aufsteigenden Luftmassen eine *adiabatische* Zustandsänderung erleiden, und dass auch bereits in dem gegen den Bergabhang treffenden horizontalen Luftstrome adiabatisches Gleichgewicht herrscht. Die Luft wird dann überall von einer gewissen Höhe an, die aus Temperatur und Feuchtigkeitsgehalt der Luft am Thalboden zu berechnen ist, gesättigt sein. Durch ein scheibenförmiges Raumelement von der horizontalen Basisfläche 1 und der Höhe dy strömt nun in der Zeiteinheit die Luftmenge $v . \varepsilon$ in verticaler Richtung hindurch. Liegt das Raumelement über der unteren Wolkengrenze, so wird in dieser Luftmenge dabei so viel Wasserdampf condensirt, als sie im Sättigungszustande in der Höhe $y + dy$ weniger in Dampfform enthalten kann als in der Höhe y, also die Menge

$$v \cdot \varepsilon \cdot \frac{-\partial F}{\partial y} dy,$$

wenn $F(y)$ die „specifische Feuchtigkeit“ der gesättigten Luft in der Höhe y bezeichnet.

Die gesamte in einer zwischen y_0 und y' liegenden Wolkenschicht über der Einheit der Grundfläche in der Zeiteinheit condensirte Wassermenge ist demnach — immer den stationären Zustand vorausgesetzt —:

$$W = -\int_{y_0}^{y'} v \varepsilon F'(y) \, dy. \tag{14}$$

Dies wäre zugleich die aus jener Wolkenschicht auf die Einheit der horizontalen Grundfläche ausfallende Niederschlagsmenge, falls das Condensationsproduct einfach vertical niederfiele, ohne durch den horizontalen Luftstrom fortgetragen zu werden. Diese Annahme wollen wir machen, da es bisher an Anhaltspunkten fehlt, um die horizontale Fortführung der fallenden Niederschlagsteilchen in Rechnung setzen zu können. Es ist jedoch vorauszusehen, dass dieselbe besonders für die langsam fallenden Wasser- oder Eisteilchen in den höheren Wolkenschichten von Belang sein wird, dass dagegen die grösseren Tropfen, die das in den unteren Wolkenschichten condensirte Wasser mit sich nehmen, nur in verhältnismässig geringer horizontaler Entfernung niederfallen. Nun tragen aber, wie die numerische Rechnung zeigt, die unteren Wolkenschichten relativ viel mehr zur Condensation bei, als die höheren; es wird daher der Einfluss der horizontalen Fortführung, wenigstens bei mässiger Windgeschwindigkeit, nicht allzu gross sein. Dieser Einfluss betrifft übrigens nicht die Gesamtniederschlagsmenge, welche der Bergzug veranlasst, sondern nur ihre *Verteilung* über den Bergabhang, und besteht in einer Verschiebung des Maximums des Niederschlages gegen den Berggipfel hin. In diesem Sinne ist also eine Abweichung der wirklichen Niederschlagsverteilung von derjenigen zu erwarten, welche sich theoretisch durch Berechnung von W als Function von x nach Formel (14) ergiebt. Diese Abweichung wird unter sonst gleichen Umständen bei *Schneefall* bedeutend grösser sein, wie bei als Regen fallendem Niederschlag.

Was nun die obere Grenze y' betrifft, welche für die Integration in (14) zu nehmen ist, um die gesamte auf die Flächeneinheit fallende Niederschlagsmenge zu erhalten, so wird dafür diejenige Höhe zu setzen sein, in welcher die Condensation im aufsteigenden Luftstrom thatsächlich aufhört. Theoretisch würde, wenn bis zu beliebigen Höhen von vornherein adiabatisches Gleichgewicht herrschte, auch die durch die Bodenerhebung veranlasste Condensation sich unendlich hoch bez. bis zur Grenze der Atmosphäre erstrecken, da die verticale Geschwindigkeitscomponente nur asymptotisch gegen Null convergirt. Allein praktisch gilt für sehr hohe Schichten wahrscheinlich nicht mehr unsere Lösung des Strömungs-

problems und sicher nicht die Voraussetzung des adiabatischen Gleichgewichtes; und selbst wenn letzteres der Fall wäre, also wenn der aufsteigende Strom Luftmassen von der Erdoberfläche bis zu beliebigen Höhen hinaufführte, würde doch infolge der zunehmenden Schwere der vom aufsteigenden Strome getragenen Niederschlagspartikeln einerseits und der zunehmenden Sonnenstrahlung andererseits sich eine *obere Wolkengrenze* ausbilden.[1]) Wir werden demnach eine solche obere Wolkengrenze in bestimmter — und zwar der Einfachheit halber überall gleicher — Höhe als gegeben annehmen; der ihr entsprechende Wert von y' ist die obere Grenze des Integrales in (14). Uebrigens hat die hierfür angenommene Höhe, sobald sie nur überhaupt beträchtlich ist, d. h. mehrere Tausend Meter beträgt, nur verhältnismässig geringen Einfluss auf den Wert von W, da sowohl $-F'(y)$ als $v.\varepsilon$ mit der Höhe schnell abnehmen.

Für die numerische Berechnung von W ist es zunächst vorteilhaft, den Ausdruck (14) durch partielle Integration auf die Form zu bringen:

$$(14a) \qquad W(x) = \Big[v\,\varepsilon\,.\,F(y)\Big]_{y'}^{y_0} + \int\limits_{y_0}^{y'} F(y)\,\frac{\partial\,\varepsilon\,v}{\partial\,y}\,dy\,.$$

Hierin ist v als Function von y und x durch Gleichung (13) gegeben. $F(y)$ — der Sättigungswert der specifischen Feuchtigkeit in der Höhe y —, sowie die zur Berechnung von ε erforderlichen entsprechenden Werte von Druck und Temperatur, sind am bequemsten mit Hülfe der von H. Hertz[2]) gegebenen graphischen Darstellung für die adiabatische Zustandsänderung feuchter Luft zu ermitteln, da ein einfacher analytischer Ausdruck für diese Grössen nicht aufzustellen ist. Bei der Benutzung der Hertz'schen Tafel ist zu beachten, dass y nicht die absolute Höhe, sondern diejenige über der x-Axe unseres Coordinatensystems bedeutet, also, um die Meereshöhe zu erhalten, noch um den Wert $-\eta_{(x=-\lambda/4)}$ und die Meereshöhe der Thalsohle zu vermehren ist. Das Integral

1) Vgl. W. v. Bezold, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin 1888. p. 518; 1891. p. 303.

2) H. Hertz, Meteorol. Zeitschr. 1. p. 421—431. 1884.

in (**14a**) kann dann mit hinreichender Genauigkeit in der Weise ausgewertet werden, dass man das Intervall von y_0 bis y' in Teilintervalle $y_0 \dots y_1$, $y_1 \dots y_2 \dots y_{h-1} \dots y_h$ (wo $y_h = y'$) zerlegt und für jedes derselben einen Mittelwert F_{m_k} einführt, wodurch man erhält:

$$(15) \qquad \int\limits_{y_0}^{y_h} F(y) \frac{\partial (\varepsilon v)}{\partial y} dy = \sum_0^h {}_k F_{m_k} \left[(\varepsilon v)_k - (\varepsilon v)_{k-1} \right].$$

Um nun die Berechnung von W für ein specielles Beispiel durchzuführen, wollen wir annehmen, dass der Luftstrom, welcher den Berg von der in Fig. 1 dargestellten Profilgestalt trifft, am Thalboden den Druck 760 mm, die Temperatur 20° und die specifische Feuchtigkeit 9,0 besitze. Daraus folgt nach unserer Voraussetzung adiabatischen Gleichgewichtes, dass die untere Wolkengrenze in der Höhe von 950 m über der Thalsohle liegt, also bei $y_0 = 500$, d. i. 50 m über der Bergmitte; die specifische Feuchtigkeit ist dort $F(y) = 9,0$, die Temperatur 11°. Wir wollen ferner die obere Wolkengrenze in der Höhe von rund 5000 m ($y' = 4530$) annehmen, wo die Temperatur auf $-13,6°$, die specifische Feuchtigkeit auf $F(y') = 2,5$ gesunken ist. Die Temperatur 0° ist in der Höhe von 3000 m erreicht. Die Benutzung der Hertz'schen Tafel setzt voraus, dass bei Temperaturen unter 0° das Condensationsproduct Eis ist; ob dies der Wirklichkeit entspricht, ist für mässig tiefe Temperaturen mindestens fraglich, doch würde die Annahme, dass sich überkaltetes Wasser ausscheidet, das Resultat nicht viel ändern. Da dem vorausgesetzten stationären Zustand entsprechend anzunehmen ist, dass alles condensirte Wasser gleich ausfällt, so kommt für unsere Berechnung das Hertz'sche „Hagelstadium", in dem das mitgeführte Wasser gefrieren würde, in Fortfall.[1]) — Für die Berechnung des Integrales nach Formel (15) wurde die Wolke in vier Schichten zerlegt, deren Zwischengrenzen bei $y_1 = 1530$, $y_2 = 2440$, $y_3 = 3460\,m$ liegen; für diese Höhen ist $\varepsilon = 1,00$, 0,912, 0,816 und bez. $F(y) = 6,9$, 5,35, 3,8.

1) Auf die Condensationsadiabate hat es keinen hier in Betracht kommenden Einfluss, ob man — wie bei Construction der Hertz'schen Tafel — alles condensirte Wasser als mitgeführt oder als gleich ausfallend annimmt.

findet so für W/a folgende Werte

0	$\pm\frac{\lambda}{12}$	$\pm\frac{\lambda}{8}$	$\pm\frac{\lambda}{6}$
,475	0,241	0,0985	0,0081 g pro Sec. und qm

Die Niederschlagshöhe in Millimetern pro Stunde erhält hieraus durch Multiplication mit 3,6; sie ist durch die ꞏre Curve in Fig. 1 dargestellt. Ihre Werte sind für die ꞏe horizontale Strömungsgeschwindigkeit von 1 m/sec:

i $x =$	0	$\pm\frac{\lambda}{24}$	$\pm\frac{\lambda}{12}$	$\pm\frac{\lambda}{8}$	$\pm\frac{\lambda}{6}$	$\pm\frac{\lambda}{4}$
„ $W' =$	1,71	1,47	0,867	0,355	0,029	0

ꞏr Niederschlag ist hiernach am stärksten über der s Bergabhanges, wo er schon bei der mässigen Wind- ndigkeit von 7 m/sec die beträchtliche Höhe von 12 mm nde erreicht. Dabei ist freilich zu bedenken, dass wir msweise günstige Bedingungen für die Niederschlags-

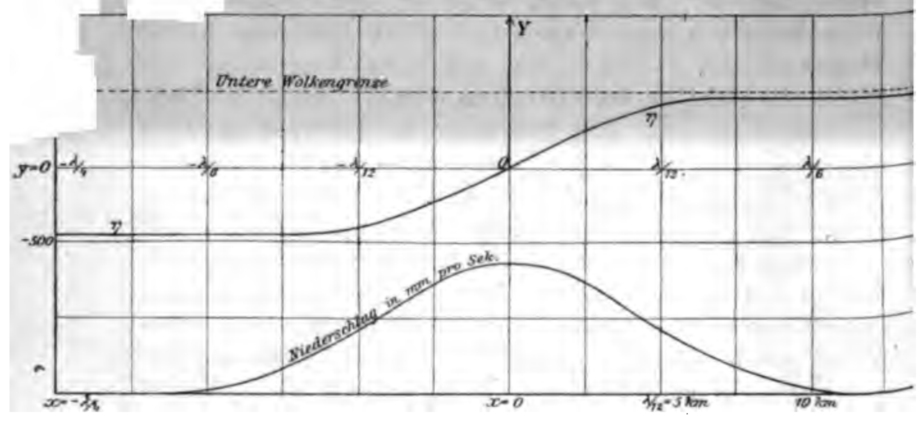


Fig. 1.

bildung annahmen, indem wir die herzuströmende Luft in der ganzen 4000 m mächtigen Schicht zwischen y_0 und y' als bereits gerade gesättigt voraussetzten.

Die Vergleichung der Niederschlagscurve mit der Profilcurve in Fig. 1 zeigt, dass zwar das Maximum des Niederschlages mit demjenigen der Steilheit des Bergabhanges zusammenfällt, dass aber die Niederschlagshöhe von dort nach der

Thalebene und dem Bergplateau hin langsamer abnimmt, als die Neigung der Erdoberfläche; so beträgt z. B. letztere (gegeben durch $\partial \eta / \partial x$) an den Stellen $x = \pm \lambda / 12$ nur noch $^1/_{20}$ von der maximalen, der Niederschlag aber dort noch mehr als $^1/_5$ seines Maximalwertes. Die niederschlagerzeugende Wirkung eines Bergzuges macht sich also unter den hier vorausgesetzten Verhältnissen schon bei Annäherung an den Fuss desselben in der vorliegenden *Ebene* bemerklich, was mit der Erfahrung übereinstimmt.[1] Dass in Wirklichkeit das Maximum der Niederschläge mehr nach dem Kamm der Gebirge verschoben erscheint, erklärt sich wohl zum Teil, wie oben schon erörtert, aus der horizontalen Fortführung der Condensationsproducte in den Wolken, zum Teil aber wohl auch aus der Abweichung der wirklichen Temperatur- und Feuchtigkeitsverteilung von der hier vorausgesetzten (vgl. Abschnitt 4).

Von Interesse ist noch die Bestimmung der *gesamten* durch den Bergzug veranlassten Niederschlagsmenge. Diese wird erhalten, indem man das durch Gleichung (14) als Function von x bestimmte W von $x = -\lambda/4$ bis $+\lambda/4$ integrirt, sie ist also

$$G = \int_{-\lambda/4}^{+\lambda/4} W(x)\,dx = -\int_{y_0}^{y'} \varepsilon F'(y) \int_{-\lambda/4}^{+\lambda/4} v\,dx\,, \tag{16}$$

darin wird nach (13)

$$\int_{-\lambda/4}^{+\lambda/4} v\,dx = a.1100\{e^{-n_1 y} - \tfrac{2}{9} e^{-n_3 y} + \tfrac{1}{25} e^{-n_5 y}\}.$$

Man findet für unser Beispiel $G = 5100\,a$ g/sec auf einem Streifen von 1 m Breite und ca. 22 km Länge.

Hieraus folgt die *mittlere* Niederschlagshöhe für den ganzen Bergabhang:

$$W_m' = 0{,}833\,.\,a \text{ mm pro Stunde.}$$

3.

In dem behandelten Beispiel lag die untere Wolkengrenze höher als der Berggipfel. Ist das Umgekehrte der Fall, so muss für denjenigen Teil des Bergabhanges, welcher in die

1) Vgl. Hann, Klimatologie, 2. Aufl., I. Bd., p. 295; ferner Assmann, Einfluss der Gebirge auf das Klima von Mitteldeutschland p. 373. 1886.

lke eintaucht, als untere Grenze des Integrales in den rmeln (14) bis (16) η statt y_0 genommen werden; infolge ssen wird die theoretische Niederschlagsverteilung nicht mehr symmetrisch in Bezug auf den Nullpunkt der x-Axe sein.

Als Beispiel für diesen Fall werde die Strömung über ein Bodenprofil betrachtet, welches durch die einfache Gleichung:

$$(5') \qquad \eta = C \sin m x . e^{-r\eta}$$

gegeben ist.

Ueber die Parameter werde wie folgt verfügt:

$$C = 1000 \text{ m}, \qquad \lambda = 24000 \text{ m};$$

dann ist

$$m = 0{,}262 . 10^{-3}, \qquad r = 0{,}269 . 10^{-3},$$

und für die verticale Coordinate η findet man aus (5):

für $x =$	$-\frac{\lambda}{4}$	$-\frac{\lambda}{6}$	$-\frac{\lambda}{12}$	0	$+\frac{\lambda}{12}$	$+\frac{\lambda}{6}$	$+\frac{\lambda}{4}$
„ $\eta =$	-1495	-1194	-585	0	$+444$	$+715$	$+805$ m.

Die Curve ist durch Fig. 2 dargestellt. Die Höhe des Berggipfels über der Thalsohle beträgt 2300 m. Letztere möge noch 100 m über Meeresniveau liegen; der Luftdruck daselbst

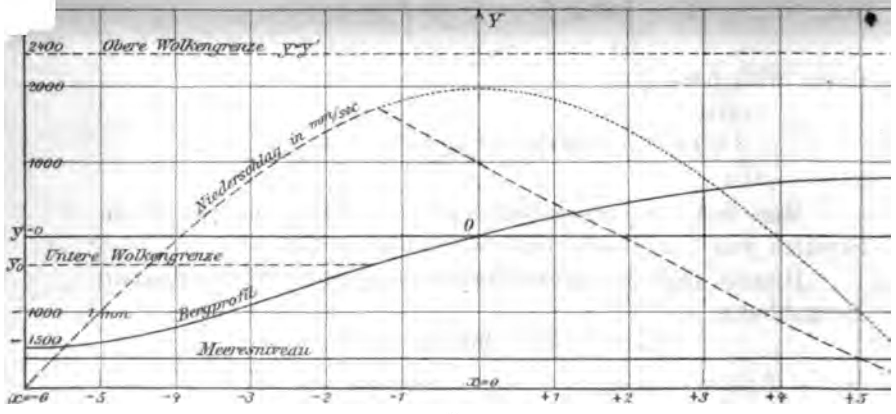


Fig. 2.

betrage 750 mm, die Temperatur 23°, die specifische Feuchtigkeit 10 g. Dann findet man nach der **Hertz**'schen Tafel die untere Wolkengrenze in der Meereshöhe 1220 m, das ist bei $y = -375$. Die obere Wolkengrenze werde bei $y' = 2400$,

also in 4000 m Meereshöhe vorausgesetzt. Dann ergiebt sich für den unterhalb der Wolke liegenden Teil des Bergabhanges, welcher sich auf die negativen Werte der x-Coordinate bis zu etwa $-1,35$ km beschränkt, da nach (7)

$$v = C a m \cos m x\, e^{-ny}$$

wird,

$$W = -\int_{y_0}^{y'} \varepsilon v F' dy = -a C m \cos m x \int_{y_0}^{y'} \varepsilon F'(y) e^{-ny} dy$$
$$= a \cos m x \,.\, 1{,}09.$$

Die Niederschlagshöhe wird hier also durch eine einfache Cosinuslinie dargestellt und entspricht im wesentlichen der Neigung des Bergabhanges, welche sich aus (5') zu

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{C m \cos(m x) e^{-r\eta}}{1 + C r \sin(m x) e^{-r\eta}}$$

berechnet. Für das oberhalb der Wolkengrenze y_0 liegende Gebiet ist $W(x)$ nicht durch eine einfache Function von x darstellbar. Man findet die in Millimeter pro Stunde ausgedrückte Niederschlagshöhe für die horizontale Geschwindigkeit $a = 1$:

bei x =	-6	-5	-4	-3	-2	unterhalb der Wolke,
W' =	0	1,01	1,96	2,78	3,40	
bei x =	-1	0	$+2$	$+4$	$+6$	in der Wolke.
W' =	3,50	2,94	1,95	0,88	0	

Die Niederschlagsverteilung ist hiernach in Fig. 2 durch die gestrichelte Curve dargestellt. Die punktirte Curve veranschaulicht den symmetrischen Verlauf, welcher gelten würde, wenn der Berg nicht in die Wolke eintauchte.

Das Maximum des Niederschlages läge dann bei $x=0$ und betrüge 3,93, während es so schon bei $x = -6{,}3$ mit einem Betrage von ca. 3,68 erreicht wird.

Die Gesamtniederschlagsmenge ergiebt sich nach der Formel

$$G = -a C \sin m x \int_{y_0}^{y'} \varepsilon F'(y) e^{-ny} dy$$

annähernd gleich 22730; sie verteilt sich auf einen horizontalen Streifen von 12000 m Länge, würde also bei gleichmässiger Verteilung für $a = 1$ durchschnittlich 1,9 mm betragen.

Aus vorstehendem Ausdruck für G ist beiläufig ersichtlich, dass dieselbe bei gegebener Höhe des Bergrückens um so kleiner wird, je kürzer und steiler derselbe, d. h. je kleiner λ ist, da der Exponent $n y$ mit abnehmendem λ wächst.

Die horizontale Windgeschwindigkeit ist im vorliegenden Falle gegeben durch

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = a\left(1 + C\frac{m^2}{n}\sin m x e^{-ny}\right)$$
$$= a(1 + 0{,}332 \sin m x e^{-ny});$$

sie erreicht ihr Minimum $= 0{,}547\,a$ in der Thalsohle, ihr Maximum von $1{,}283\,a$ auf dem Berggipfel, und besitzt in jeder Horizontalebene den Mittelwert a. Ueber der Thalmitte nimmt sie nach oben hin allmählich zu, sich asymptotisch dem Grenzwerte a nähernd; sie ist z. B. im Niveau $y = 0$ gleich $0{,}668\,a$ und im Niveau $y = 2400$ schon gleich $0{,}80\,a$. Sollte also die betrachtete Strömung wieder aus einem bis zur Stelle $x = -\lambda/4$ rein horizontal über einer Ebene fliessenden Luftstrom hervorgehen, so müsste dessen Geschwindigkeit im Verhältnis e^{-ny} mit der Höhe abnehmen. Dies würde zwar an sich eine plausible Annahme sein; es wäre dann aber in jenem horizontalen Luftstrom eine Wirbelbewegung vorhanden, welche sich streng genommen nicht stetig in die oben vorausgesetzte Potentialbewegung fortsetzen kann.

4.

Die bisher von uns gemachte Voraussetzung, dass die Temperaturverteilung in dem gegen das Gebirge treffenden Luftstrome bereits dem indifferenten Gleichgewicht entspreche, d. h. dieselbe sei, welche sich bei adiabatischer Zustandsänderung in einem aufsteigenden Luftstrome herstellt, ist in Wirklichkeit im allgemeinen nicht erfüllt. Ueber die wirklichen Temperatur- und Feuchtigkeitsverhältnisse in der freien Atmosphäre bis zu Höhen von 8000 m haben neuerdings die Berliner wissenschaftlichen Luftfahrten sicheren Aufschluss gegeben. Die mittleren Werte von Temperatur und Feuchtigkeit in von 500 zu 500 m fortschreitenden Höhenniveaus, welche Hr. v. Bezold aus den Beobachtungen der Herren

Berson und **Süring** abgeleitet hat[1]), lassen erkennen, dass die mittlere verticale Temperaturabnahme langsamer ist, als die adiabatische, und der Sättigungswert der Feuchtigkeit im Durchschnitt nicht erreicht ist. In einem horizontalen Luftstrom, in welchem diese durchschnittlichen Verhältnisse herrschen, würde also die Luft nirgends gesättigt, und somit unsere frühere Voraussetzung einer constanten unteren Wolkengrenze nicht zulässig sein. Auch ist dann für die Condensation, welche an irgend einer Stelle des über dem Bergabhange aufwärts fliessenden Luftstromes stattfindet, nicht mehr allein die *verticale* Strömungscomponente maassgebend, wie es bei Aufstellung der Formel (14) vorausgesetzt war. Wir hätten vielmehr zur Berechnung von W zu berücksichtigen, dass die in einem Raumelement beim stationären Zustand condensirte Wassermenge gleich ist dem Ueberschuss der einströmenden über die gleichzeitig ausströmende Wasserdampfmenge; dieser Ueberschuss ist für 1 cbm und 1 Secunde

$$-\left(\frac{\partial(\varepsilon u F)}{\partial x}+\frac{\partial(\varepsilon v F)}{\partial y}\right),$$

oder, da zufolge der Continuitätsbedingung sehr annähernd

$$\frac{\partial \varepsilon u}{\partial x}+\frac{\partial \varepsilon v}{\partial y}=0$$

ist[2]),

$$-\varepsilon\left(u\frac{\partial F}{\partial x}+v\frac{\partial F}{\partial y}\right),$$

und somit

$$(17)\qquad W=-\int_{y^0}^{y'}\varepsilon\left(u\frac{\partial F}{\partial x}+v\frac{\partial F}{\partial y}\right)dy,$$

worin y^0 und y' die Wolkengrenzen über der betrachteten Stelle bezeichnen. Die Auswertung des Integrales verlangt jetzt ausser der vollständigen Kenntnis der Strömung noch die Ermittelung des *Wolkengebietes*, d. h. desjenigen Raumes, in welchem

1) W. v. Bezold, Theoretische Betrachtungen über die Ergebnisse der wissenschaftlichen Luftfahrten des deutschen Vereins zur Förderung der Luftschifffahrt zu Berlin p. 18—21. Braunschweig, 1900.

2) Insofern nämlich die Menge des in der Volumeneinheit condensirten Wasserdampfes gegen die Gesamtmenge der hindurchströmenden *feuchten Luft* verschwindend klein ist.

die Luft überhaupt gesättigt ist, und der Temperaturverteilung in demselben, da erst durch letztere F gegeben ist. Zu diesem Zwecke hat man längs jeder Stromcurve die adiabatische Zustandsänderung der Luft zu verfolgen, indem man von den gegebenen Temperatur- und Feuchtigkeitswerten in der Verticalen über der Thalmitte ($x = -\lambda/4$), wo die Strömung rein horizontal ist, ausgeht.

Indem man dann diejenigen Punkte der einzelnen Strömungslinien, in welchen gerade die Sättigung erreicht wird, miteinander verbindet, findet man zunächst die Contur des Wolkengebietes.

Da die Wolkenform auch an sich von Interesse ist[1]), soll ihre Bestimmung für unser zweites Beispiel durchgeführt werden, indem wir über der Thalmitte ($x = -\lambda/4$) einmal die für den Sommer, dann zweitens die für den Winter nach Bezold's Zusammenstellung (l. c. p. 21) geltende mittlere Temperatur- und Feuchtigkeitsverteilung voraussetzen. Es ist danach

	bei y =	− 1500 (Thalboden, Seehöhe 100 m)	− 600	+ 400	+ 1400	+ 2400 m (Seehöhe 4000 m)
im Sommer	t =	17,7°	11,0°	5,3°	+ 0,9°	− 5,0°
	F =	8,2	6,69	4,59	3,03	2,60*
im Winter	t =	0,2°	− 0,6°	− 5,1°	− 10,8°	− 14,6°
	F =	2,92	2,17	1,64	1,19	0,86

An Stelle des mit * bezeichneten Wertes F wollen wir denjenigen (2,2) setzen, der sich bei Ausgleichung der ausspringenden Ecke, welche die Curve für F (l. c. Fig. 11) in der Höhe von 4000 m zeigt, ergiebt.

Die *Strömungslinien* haben nach p. 461 die Gleichung

$$e^{-ny} \sin m x = -\frac{m}{bqn} + B e^{qy}, \tag{5}$$

oder, wenn y_0 der Wert von y für $x = 0$ ist und $y - y_0 = \eta$ gesetzt wird:

$$e^{-n\eta} . e^{-ny_0} \sin m x = \frac{m}{bqn}(e^{q\eta} - 1),$$

$$\frac{bn}{m} \cdot e^{-ny_0} \cdot e^{-r\eta} \sin m x = \frac{1}{q}\left(e^{\frac{q\eta}{2}} - e^{-\frac{q\eta}{2}}\right).$$

1) Es erscheint z. B. wohl möglich, aus der beobachteten Wolkenbegrenzung umgekehrt auf die Feuchtigkeitsverhältnisse in dem gegen den Bergabhang fliessenden Luftstrom zu schliessen.

In gleicher Annäherung wie früher kann die rechte Seite gleich η gesetzt werden; also nimmt die Gleichung die Form an:

$$\eta = b \frac{n}{m} \sin m x \, e^{-r\eta} . e^{-n y_0}, \tag{18}$$

welche sich von der Gleichung (5') der Boden-Profilcurve nur durch den für jede Strömungslinie constanten Factor $e^{-n y_0}$ unterscheidet, der bewirkt, dass die Amplitude der Wellenlinien nach oben beständig abnimmt.

Sollen nun die Strömungslinien durch bestimmte Punkte y_h' der Verticalen $x = -\lambda / 4$ gelegt werden, so hat man den zu $x = -\lambda / 4$ gehörigen Wert η' aus der transcendenten Gleichung

$$\eta' = -b \frac{n}{m} e^{-r\eta'} . e^{-n(y_h' - \eta')} \tag{19}$$

zu berechnen, und dann in (18) $y_h^0 = y_h' - \eta'$ einzusetzen.

Hiernach wurden die vier Strömungslinien berechnet, deren Anfangspunkte (d. h. tiefste Punkte) in den Meereshöhen 1000,

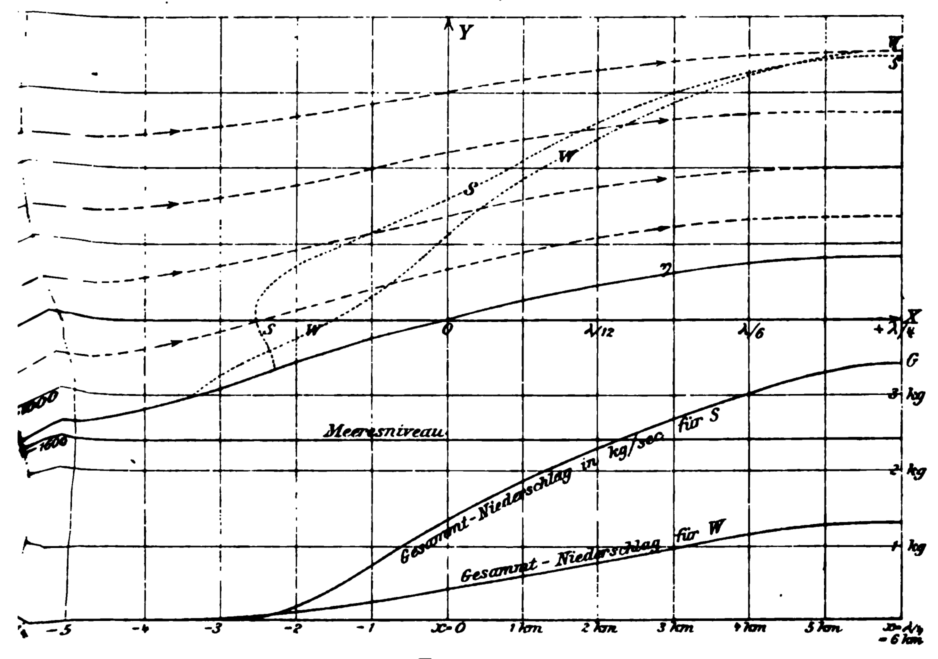


Fig. 3.

2000, 3000 und 4000 m liegen, und welche in Fig. 3 als Curve I, II, III, IV eingezeichnet sind. Ihre höchsten Punkte liegen in den Höhen 2940, 3610, 4333, 5100 m.

Bestimmt man nun mittels der Hertz'schen Tafel die Höhen, in welchen auf der Bodencurve 0 und den Curven I bis IV die Condensation beginnt, so findet man unter Zugrundelegung der oben angegebenen Werte von t und F[1]):

	0	I	II	III	IV
für den Sommer	930	1570	2730	4060	(5125)
für den Winter	600	2070	3100	4130	5100

Im Sommer würde hiernach auf der Strömungslinie IV die Condensation nicht mehr ganz erreicht, da deren Gipfelpunkt bei 5100 liegt; der Gipfel der Wolke liegt also ein wenig darunter. Im Winter fällt derselbe zufällig gerade mit dem höchsten Punkte der Curve IV zusammen. Zur Construction der in Fig. 3 als punktirte Linien eingetragenen Wolkengrenzen (mit S für den Sommer, mit W für den Winter bezeichnet) wurden ausserdem noch die zwischen 0 und I bez. I und II in der Mitte liegenden Strömungslinien benutzt.[2])

Wir können nun leicht mit Hülfe der Hertz'schen Tafel die Wassermenge finden, welche in jedem Kilogramm feuchter Luft beim Fortschreiten auf einer der construirten Strömungslinien insgesamt oder bis zu einer bestimmten Verticalen condensirt wird; so erhält man insgesamt:

auf Curve	0	I	II	III
für den Sommer	2,85	2,42	1,22	0,26 g
für den Winter	1,5	0,74	0,34	0,14

Nennt man die bis zur Abscisse x auf derjenigen Strömungslinie, deren Anfangspunkt in der Höhe h liegt, condensirte Menge $g_x(h)$, und ist H die Anfangshöhe derjenigen Strömungslinie, welche bei dem gegebenen x die obere Wolkengrenze

1) Aus obigen Zahlen folgt, dass eine beliebig gestaltete Bodenerhebung von weniger als 500 m weder im Sommer noch im Winter unter *Durchschnitts*verhältnissen zur Condensation Anlass giebt. Im Sommer würde bei einer Berghöhe zwischen 600 und 800 m eine zwischen den Höhen 1000 m und 3000 m liegende, den Berg *nicht berührende* Wolke entstehen; erst bei grösseren Berghöhen würde dieselbe den Berg berühren.

2) Für den im ersten Beispiel vorausgesetzten plateauartigen Berg von 900 m Höhe findet man in analoger Weise ein Wolkengebiet, welches bei durchschnittlichen Verhältnissen im Sommer nur 40 m unterhalb des Bergplateaus beginnt und bis über 3000 m hinaufreicht, im Winter dagegen schon 500 m über dem Thale beginnt, aber sich nur ca. 700 m über den Berg erhebt, also diesen in Gestalt einer flachen Kappe bedeckt.

schneidet, ferner u' die (horizontale) Strömungsgeschwindigkeit und ε' die Luftdichte in der Höhe h über der Thalsohle (also bei $x = -\lambda/4$), so ist die gesamte pro Secunde über dem vom Beginn der Wolke bis zu x reichenden Grundflächenstreifen von 1 m Breite condensirte Menge in Grammen:

$$(20) \qquad G_x = \int_0^H \varepsilon' u' g_x(h)\, d h.$$

Denn durch einen Streifen der Verticalebene $x = -\lambda/4$ von der Breite 1 und der Höhe dh fliesst in der Secunde die Luftmenge εu kg; eine gleich grosse Luftmenge muss aber in der Secunde durch die Verticale von der Abscisse x austreten, und da der Zustand stationär ist, verhält es sich also ebenso, als ob jene Luftmenge εu sich in 1 Sec. längs der betreffenden Strömungslinie von $-\lambda/4$ bis x bewegt hätte; hierbei ist aber nach der Definition von g die Wassermenge $\varepsilon u g_x(h)$ ausgeschieden worden. — Hat man nach Formel (20) G als Function von x berechnet, so giebt endlich

$$(21) \qquad W = \frac{\partial G}{\partial x}$$

die an der Stelle x pro Quadratmeter Grundfläche in 1 Sec. ausgeschiedene Wassermenge in Grammen; und auf diesem Wege dürfte die Bestimmung von W praktisch bequemer auszuführen sein, als durch directe Berechnung nach Formel (17). — Bei Voraussetzung der durchschnittlichen Verhältnisse für den Sommer findet man im obigen Beispiel für $a = 1$, wenn man das Integral (20) näherungsweise als Summe über die zwischen den einzelnen construirten Stromcurven gelegenen Intervalle berechnet,

$$G_{x=0} = 1352, \quad G_{x=+\lambda/8} = 2680, \quad G_{x=\lambda/4} = 3460\,\text{g}.$$

Die letztere Zahl bedeutet die *gesamte* in 1 Sec. an dem der Windrichtung zugewandten Bergabhange auf einem Streifen von 1 m Breite fallende Niederschlagsmenge. Der Niederschlag beginnt zufolge dem in Fig. 3 ersichtlichen Verlauf der Curve SS erst etwa bei $x = -0{,}108\,\lambda$, verteilt sich also auf einen Grundflächenstreifen von $0{,}358\,\lambda = 8600$ m Länge; daraus berechnet sich die *durchschnittliche* Niederschlagshöhe pro Stunde:

$$\frac{3{,}6 \,.\, 3460}{8600} = 1{,}45\,\text{mm}.$$

Ebenso findet man für den *Winter*:

$$G_{x=0} = 380, \quad G_{x=\lambda/6} = 770, \quad G_{x=\lambda/4} = 1264;$$

die Gesamtniederschlagsmenge verteilt sich auf einen Streifen von 9400 m Länge, sodass die mittlere Niederschlagshöhe sich zu 0,485 mm pro Stunde ergiebt.

Aus obigen 3 Werten von $G(x)$ kann man den Verlauf dieser Function bereits annähernd graphisch construiren, indem man noch berücksichtigt, dass die Tangente der Curve für G in ihrem Anfangspunkte und bei $x = + \lambda/4$ horizontal ist. (Vgl. die unteren Curven in Fig. 3.)

Die Neigungstangente der Curve ergiebt dann bei Berücksichtigung des Maassstabes W'. Man erkennt so in unserem Falle, dass das Maximum des Niederschlages im Sommer zwischen $x = 0$ und $x = -1$, im Winter zwischen $x = 0$ und $x = +2$ km erreicht wird und etwa a . 2,2 mm bez. a . 0,75 mm pro Stunde beträgt bei einer Windgeschwindigkeit von a Metern in sehr grosser Höhe; ferner, dass nach dem Kamm des Berges zu die Niederschlagshöhe langsamer abnimmt, als unter unserer früheren Voraussetzung constanter Wolkendicke gefunden wurde. In Wirklichkeit würde wegen der auch jetzt von uns vernachlässigten Mitführung der Wasser- bez. Eisteilchen das Maximum des Niederschlages mehr gegen den Bergkamm hin verschoben sein; ferner würde, weil ein Teil der Wolke über den Kamm hinübergeweht und dort im niedersinkenden Luftstrome wieder aufgelöst wird, der Niederschlag sich noch etwas über den Kamm hinüber erstrecken, seine Gesamtmenge aber geringer sein, als die berechnete.

Das im Vorstehenden enthaltene Ergebnis, dass am *Abhange* eines Gebirgszuges eine Zone maximalen Niederschlages existirt, und dass für die Niederschlagsmenge mehr die *Neigung* der Erdoberfläche als ihre absolute Erhebung maassgebend ist, findet sich durch Beobachtungen wenigstens für höhere Gebirge bestätigt.[1])

1) Vgl. Hann, Klimatologie, 2. Aufl., I. Bd., p. 298.

(Eingegangen 22. December 1900.)

1. Die Wirkungen der Gleichstromschwankungen, der elektrischen Schwingungen und der Elektro-inductionsströme auf eine in einem constanten Felde stehende Magnetnadel bez. einen Inductor aus weichem Eisen;

von Max Hornemann.

I. Teil.

Versuche.

Im Galvanoskope wird eine in der Nähe befindliche Magnet-adel unter dem Einfluss eines elektrischen Stromes aus ihrer ewöhnlichen Nord-Süd-Lage in gesetzmässiger Weise nach echts oder links abgelenkt und bleibt so lange abgelenkt, als er Strom fliesst. Hört der Strom auf zu fliessen, dann kehrt ie Nadel in ihre Ruhelage zurück. Bei Einwirkung eines ehr kurze Zeit dauernden Stromes entstehen häufig nur sehr leine und zuweilen keine deutlich wahrnehmbaren Ausschläge. . B. vermag auch der Entladungsstrom der Leydener Batterie e Nadel abzulenken, aber nur, wenn man die Entladung urch Einschalten eines geeigneten Widerstandes verlang-umt. Doch gelingt dieser Versuch nicht bei plötzlicher Ent-dung der Leydener Flasche, da die Dauer des Stromes zu urz ist, als dass die Elektricität einen merklichen Antrieb uf die Nadel ausüben könnte, ganz abgesehen davon, dass eser Entladungsstrom aus einer Reihenfolge abwechselnd itgegengesetzter Ströme zusammengesetzt ist. Beim Ein-halten eines Galvanometers in den Kreis eines Inductions-pparates beobachtet man nur einen Ausschlag nach der einen eite, wenn die Unterbrechungen des Hauptstromes rasch auf-nander folgen: Die Nadel, die einmal nach der einen oder ach der anderen Seite vielleicht schon ein wenig abgelenkt t, bleibt dann in dieser abgelenkten Stellung oder wird nach eser Seite noch stärker abgelenkt (doppelsinnige Ablenkung er Nadel). Unter gewissen Bedingungen kommt, wie ich igen werde, diese regellos nach der einen oder anderen

Seite abgelenkt stehenbleibende Nadel in gesetzmässige Rotation, deren Geschwindigkeit sich dann noch durch Verstärkung des erdmagnetischen Feldes sehr erhöhen lässt. Setzt man nun an die Stelle der Nadel einen Inductor aus weichem Eisen (am zweckmässigsten von der Form einer kreisrunden Scheibe), dann bekommt man, besonders wenn wiederum das constante erdmagnetische Feld in geeigneter Weise verstärkt wird, in allen Fällen, selbst dann, wenn die Nadel keinen, einen geringen oder einen unsicheren Ausschlag macht, trotz des viel grösseren Gewichtes dieses Inductors (Ankers) sehr beträchtliche und vor allem stets gesetzmässige Drehbewegungen. An der Hand von Versuchen werde ich zeigen, welcher Art dieselben sind.

Die zur Ausführung dieser Versuche benutzten Apparate sind nach Art eines gewöhnlichen Horizontalgalvanoskopes construirt, bestehen also aus verschiedenen Drahtwicklungen, welche in einem magnetischen Felde passend aufgestellt werden, und einer Magnetnadel, bez. einem Inductor (Anker) aus weichem Eisen.

Als Nadel diente mir eine kleine Compassnadel von einer Länge = 2,2 cm, als Inductor eine kreisrunde, aus dünnem Blech hergestellte Scheibe aus weichem, mehrfach ausgeglühten Eisen mit einem Durchmesser von 4,5 cm, welche mittels eines oberhalb angelöteten Bügels auf eine senkrecht stehende Stahlspitze aufgesetzt, in der horizontalen Ebene leicht drehbar ist.

Die Drahtwicklungen, in deren Mitte die Nadel und der Anker von der Seite her hineingeschoben werden können, sind auf einem rechteckigen Holzrahmen (von einer Länge = 6 cm, einer Höhe = 1 cm, einer Breite = 2 cm) gewunden. Es kommen zur Verwendung: Drahtwicklung Nr. 1 (320 Windungen eines 50 m langen, 0,2 mm dicken Drahtes mit einem $W = 28$ Ohm), Drahtwicklung Nr. 2 (140 Windungen eines 22 m langen, 0,5 mm dicken Drahtes, dessen $W = 2$ Ohm ist,) und Drahtwicklung Nr. 3 (35 Windungen eines 6 m langen, 1 mm dicken Drahtes mit $W = 0,133$ Ohm). Diese Drähte werden nun in der Nord-Süd-Richtung eines constanten magnetischen Feldes aufgestellt.

Als magnetisches Feld dient entweder das erdmagnetische Feld, oder das Feld eines Stahlmagneten (gewöhnlich benutze ich einen 10 cm langen, 0,4 cm dicken Stabmagneten), oder

das Feld eines Elektromagneten, bez. das Feld eines Gleichstromes, der eine senkrecht zu den Versuchswicklungen gestellte Drahtwicklung dauernd durchströmt.

Je nach dem Verlauf der Kraftlinien des constanten Feldes und der Stromrichtung sind zwei Ausgangsstellungen zu unterscheiden. In der Ausgangsstellung *A* liegt, wenn wir den Apparat von der Ober-(Stirn-)seite ansehen, *S* des Magneten (bez. der gleichwirkende Nordpol der Erde, der aber der Einfachheit halber stets durch ein *S* bezeichnet werden soll) oben und der Nordpol des Magneten (bez. der gleichwirkende Südpol der Erde) unten (der Nordpol der Magnetnadel, bez. der inducirte Nordpol des Inductors liegt demgemäss oben, ihre Südpole unten), und der Strom fliesst an der Stirnseite des Apparates von unten nach oben (an der Unterseite entgegengesetzt). In der Ausgangsstellung *B* dagegen ist zwar wieder *S* des Magneten oben und *N* unten, dagegen fliesst der Strom an der Stirnseite von oben nach unten.

Auf der Nadel und auf dem Inductor ist eine deutlich sichtbare Marke angebracht. Unter Nadel und Inductor kommt eine Kreiseinteilung zu liegen, sodass also die Drehungswinkel leicht abgelesen werden können. Ein Ausschlag oder Drehung im Sinne des Uhrzeigers wird als Ausschlag nach rechts oder Rechtsdrehung bezeichnet und durch ein positives Vorzeichen (+) gekennzeichnet. Entgegengesetzte Bewegungen werden durch — (Linksdrehung) markirt.

Die Stromschwankungen des Gleichstromes werden durch Schliessen und Oeffnen des Stromes erzeugt, welches an einer beliebig im Stromkreis gelegenen Stelle *U* vielfach mit der Hand oder durch eine automatische Unterbrechungsvorrichtung geschieht. Bei Benutzung von Wechselströmen eines Inductionsapparates werden beide Drahtenden unserer Wicklungen fest mit den zuführenden Drähten verbunden. Bei Entladungen Leydener Flaschen sind eine oder zwei Funkenstrecken einzuschalten.

Wenn möglich, sind in den Versuchen die Einzelwirkungen beim Schliessen, während des Fliessens des Stromes, bei der Stromöffnung und die Gesamtwirkungen eines einmaligen Schliessens und Oeffnens des Stromes, sowie wiederholter, rasch folgender Stromschwankungen auseinander gehalten.

Abschnitt I. Ablenkung und Drehbewegung der Nadel und des Inductors unter Einwirkung der Kräfte eines constanten Feldes (des Erdmagnetismus, bez. des permanenten Stahlmagneten) und der Stromschwankungen eines Gleichstromes.

In den Versuchen 1—5 ist Ausgangsstellung *A* gewählt, bei welcher der Strom aufwärts fliesst.

Versuch 1: Wirkung eines Stroms mit kleiner elektromotorischer Kraft und geringer Stromstärke. Der Strom eines Flaschenelementes wird durch Drahtwicklung Nr. 1 geleitet. Dann ist

$$J = \frac{E}{Wi + We} = \frac{1,5}{0,2 + 28,0} = 0,053;$$

also wirken 320 × 0,053 = 17 Ampèrewindungen.

a) Die Nadel wird im erdmagnetischen Felde in bekannter Weise bei Stromschluss nach links rasch abgelenkt, bleibt während des Stromschlusses nach mehrfachem Hin- und Herpendeln um -90^{0} abgelenkt stehen, und kehrt bei Stromöffnung langsam rechts herum um $+90^{0}$ in die Ausgangsstellung *A* zurück, in welcher sie nach einigen wenigen Pendelbewegungen stehen bleibt. Bei einmaligem, rasch folgenden Schliessen und Oeffnen erfolgt eine Ablenkung um durchschnittlich -45^{0} und darauf sofortige rechtsseitige Rückkehr in die Ruhelage *A*. Bei rascher Folge von Stromschwankungen bleibt sie nach links abgelenkt stehen. Der Ablenkungswinkel ist um so grösser, je grösser die Dauer des jedesmaligen Stromschlusses und je kleiner die Zeit der Stromunterbrechung ist. In dem Felde meines permanenten Stabmagneten erfolgt ziemlich rasche Ablenkung um -60^{0}, bez. sehr rasche Rückkehr in die Ruhelage.

b) Der Inductor macht unter denselben Bedingungen im Felde des Stabmagneten folgende Bewegungen: Beim Stromschluss dreht er sich langsam links herum; nach längerer Einwirkung des Stromes ist die Marke um durchschnittlich -60^{0} gedreht; bei Stromöffnung dreht sich der Anker rechts herum, ungefähr um ebensoviel Grade ($+60^{0}$) zurück, sodass die Marke wieder in ihre ehemalige Lage kommt. Gewöhnlich ist aber diese bei Stromöffnung erfolgende Rechtsdrehung um 5^{0} grösser als die Linksdrehung beim Stromschluss. Bei rascher

Folge von Stromschluss und -öffnung bleibt dann der Anker ntweder ganz still stehen, aber oft dreht er sich auch um $+1^0$ is $+5^0$ (rechtsherum) im Gegensatz zu der Nadel, welche ja tark links abgelenkt wird. Wiederholte Stromschwankungen assen den Anker meist ganz unbeeinflusst, und nur selten eobachtet man eine sehr langsame, continuirliche Rechtslrehung. Alle Bewegungen des Inductors geschehen in diesem Versuche äusserst langsam, daher der Inductor meist nur wenig iber die Stellungen, in denen er nach Stromschluss bez. öffnung schliesslich stehen bleibt, pendelnd hinauskommt. Venn er z. B. bei Stromschluss und Andauer des Stromes m -60^0 abgelenkt stehen bleibt, so erreicht er diese Stellung rst durch eine linksseitige Drehung von -70^0 und Rückärtsbewegung von $+10^0$, und ebenso erreicht er seine Ausingsstellung bei Stromöffnung durch eine Rechtsdrehung um $\cdot 70^0$ und Rückwärtspendeln von -10^0. Der Effect einer ler mehrerer rascher Stromschwankungen ist aber im allmeinen $= 0$, d. h. der Anker kommt nicht von der Stelle, eibt still stehen, während im Gegensatz hierzu die Nadel gelenkt wird bez. abgelenkt bleibt. Im erdmagnetischen elde erfolgen weder beim Stromschluss noch beim Oeffnen gend welche nennenswerte Bewegungen des Ankers.

Versuch 2: Wirkungen eines Stromes mit etwas höherer ktromotorischer Kraft und Intensität. Durch die Wicklung . 1 wird ein Strom eines Accumulators geschickt. Dann ist

$$J = \frac{E}{Wi + We} = \frac{6}{0{,}6 + 28{,}0} = 0{,}21 .$$

mgemäss sind $320 \times 0{,}21 = 67{,}2$ Ampèrewindungen wirksam.

a) Die Nadel wird im erdmagnetischen Felde ähnlich beflusst wie im Versuch 1. Die Ablenkung beim Stromschluss olgt nur etwas rascher und beträgt im Felde des Stabgneten -77^0. Bei Stromöffnung kehrt sie in die Ruhelage in Versuch 1 zurück.

b) Die Marke des Inductors dreht sich im Felde der Stabgneten beim Schliessen und Andauer des Stromes links um sehr langsam durchschnittlich um -10^0; bei Stromnung erfolgt eine ziemlich rasche Rechtsdrehung um durchnittlich $+47^0$ (auch hier schiesst der Inductor zunächst

etwas weiter herum und macht dann eine linksseitige Rückwärtsdrehung); durch einmaliges Schliessen und Oeffnen ist also der Anker rechts herum um durchschnittlich $+37^0$ $(= -10^0 + 47^0)$ vorwärts gekommen. Folgt die Oeffnung zeitlich rasch dem Schluss, so kommt nach einer minimalen Linksdrehung, die wegen der kurzen Dauer des Stromschlusses nicht ihr Ende erreichen kann, sofort eine kräftige Rechtsdrehung zu stande; und bei wiederholter Einwirkung von Stromschwankungen kommt der Inductor in gleichmässige Rechtsrotation. Schon durch 6 malige Wiederholung der Stromunterbrechung im geeigneten Augenblicke kann man eine volle Umdrehung des Inductors erzielen. Im erdmagnetischen Felde bewirkt eine Stromschwankung eine Rechtsdrehung um nur $+15^0$, daher die Rotation unter dem Einfluss wiederholter Stromschwankungen eine viel langsamere ist.

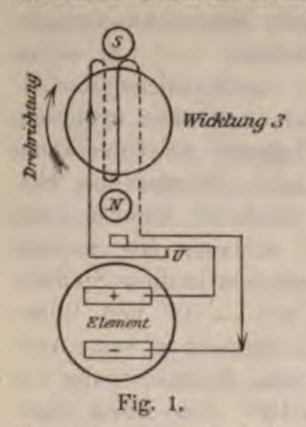


Fig. 1.

Versuch 3 (vgl. Fig. 1): Wirkung eines Stromes mit kleiner elektromotorischer Kraft, aber grosser Intensität. Der Strom des Flaschenelementes wird durch Wicklung Nr. 3 geleitet; es ist dann

$$J = \frac{E}{Wi + We} = \frac{1,5}{0,2 + 0,133} = 4,5;$$

daher $35 \times 4,5 = 150,5$ Ampèrewindungen.

a) Die Nadel verhält sich im erdmagnetischen Felde wie in Versuch 1; nur ist die Ablenkung bei Stromschluss sehr rasch erfolgt. Im Felde des Magnetstabes beträgt der Ablenkungswinkel -85^0.

b) Im Felde des Stabmagneten verhält sich der Anker so: Bei Stromschluss und bei Andauer des Stromes wird der Inductor um $-5,5^0$ (links herum) gedreht, bei Stromöffnung dagegen sehr rasch um $+57^0$ rechts herum. Einmaliges Schliessen und Oeffnen dreht also den Inductor um $51^1/_2{}^0$ $(= -5,5^0 + 57^0)$ rechts herum (auch hier erfolgt bei Stromöffnung zunächst eine grössere Rechtsdrehung um durchschnittlich $+85^0$ und dann eine Rückkehr um -28^0); schliesst man daher immer in dem

Augenblicke, in dem die maximale Rechtsdrehung gemacht ist, dann kommt der Inductor schon durch 5 Stromschlüsse einmal im Kreise herum.

Versuch 4: Wirkung eines Stromes von noch höherer elektromotorischer Kraft und noch grösserer Intensität: Geht der Accumulatorstrom durch Wicklung Nr. 3, dann ist

$$J = \frac{6}{0,6 + 0,133} = 8;$$

also sind 8 × 35 = 280 Ampèrewindungen wirksam.

a) Die Nadel erleidet bei Stromschluss eine enorm rasche Ablenkung um — 90° und bleibt nach länger andauernden, zitternden Pendelbewegungen während des Stromschlusses um — 90° abgelenkt stehen (im Felde des Stabmagneten um — 85°). Unter Einwirkung rasch folgender Stromschwankungen bleibt auch hier die Nadel in starker Ablenkung nach links still stehen.

b) Der Inductor wird im Felde des Stabmagneten bei Stromschluss und Andauer des Stromes langsam um durchschnittlich — 3,5° gedreht; bei Stromöffnung erfolgt rasche und ausgiebige Rechtsdrehung um durchschnittlich + 65° (der maximale Ausschlag beträgt oft bis 100°, und durch Zurückpendeln geht er auf 65° zurück). Im erdmagnetischen Felde kommt der Inductor kaum von der Stelle. Der Strom eines stark entladenen Accumulators dreht den Anker merkwürdigerweise schon beim Schliessen und während des Fliessens des Stromes rechts herum um + 15° und beim Oeffnen weiter in derselben Richtung um + 35° (zusammen also durch Schliessen und Oeffnen um + 50°).

Versuch 5a: Wenn wir den Strom des Flaschenelementes durch Drahtwicklung Nr. 2 gehen lassen, dann sind 98 (= 140 × 0,7) Ampèrewindungen wirksam, und der Inductor macht Drehungen um — 8° (beim Stromschluss) und um + 52° (bei Stromöffnung), während die Nadel nur die bekannte negative Ablenkung zeigt, bez. in ihre Ruhelage zurückkehrt. 6—7 Stromschwankungen können eine Umdrehung bewirken.

Versuch 5b: Geht der Accumulatorstrom durch Wicklung Nr. 2, dann sind die Drehungen = — 3° und + 63°, wobei 322 (= 2,3 × 140) Ampèrewindungen in Betracht kommen.

Wählen wir nunmehr für die Versuche 6—10 als Ausgangsstellung die Stellung *B*, in welcher der Strom in entgegengesetzter Richtung fliesst, dann sind die Wirkungen des Stromes auf Nadel und Inductor denen in den Versuchen 1—5 genau entsprechende, nur mit dem Unterschiede, dass die Richtung eines jeden Ausschlages, bez. der Drehbewegung jedesmal die entgegengesetzte ist; hinsichtlich der Grösse des Ausschlages und der Geschwindigkeit des Ausschlages und der Drehung findet kein Unterschied statt. Es ist also immer nur das Vorzeichen umzukehren. Wenn wir also in den Versuchen 1—5 die Stromrichtung umkehren, dann bekommen wir

Versuch 6 (Umkehrung von Versuch 1): Im Felde des Stabmagneten macht der Inductor beim Schliessen des Stromes eine langsame Rechtsdrehung, die bei Stromandauer $= + 60^{\circ}$ ist; bei Stromöffnung kehrt er links herum um $- 60^{\circ}$ in die ursprüngliche Lage zurück; bei einmaligem Schliessen und Oeffnen, falls beide zeitlich nahe zusammenliegen, bleibt der Inductor fast gänzlich stillstehen im Gegensatz zu der Nadel, die einen deutlichen Ausschlag nach rechts machen würde.

Versuch 7 (Umkehrung von Versuch 2): Der Inductor dreht sich beim Schliessen und Fliessen des Stromes um $+ 10^{\circ}$, beim Oeffnen um $- 47^{\circ}$; continuirliche Stromschwankungen bringen den Anker in Linksrotation.

Versuch 8 (Umkehrung von Versuch 3): Drehung von $+ 5{,}5^{\circ}$ (beim Schliessen) und $- 57^{\circ}$ (beim Oeffnen des Stromes); bei Stromschwankungen continuirliche Linksrotation.

Versuch 9 (Umkehrung von Versuch 4): Wiederum Linksrotation des Inductors.

Versuch 10 (Umkehrung von Versuch 5): $+8^{\circ}$, bez. $+3^{\circ}$ beim Schliessen und $- 52^{\circ}$, bez. $- 63^{\circ}$ beim Oeffnen; der Inductor rotirt links herum unter Einfluss von Stromschwankungen.

Aus den Versuchen 1—10 ergiebt sich nun ohne weiteres, dass der Inductor verschieden beeinflusst wird je nach der Zahl der Kraftlinien, die durch den Innenraum der Drahtwicklungen hindurchgehen; denn die Zahl der Kraftlinien ist proportional der Zahl der Ampèrewindungen. In Versuch 1 und 6 bleibt der Inductor in dem schwachen Stromfelde fast gänzlich unbeeinflusst, während er in den anderen Versuchen Drehbewe-

gungen macht, die um so ausgiebiger sind, je mehr Ampèrewindungen wirksam sind. Von Einfluss auf die Drehbewegungen ist aber auch, wie ich später ausführen werde, die Geschwindigkeit, mit der sich die Stromstärke in den Drahtwindungen ändert. Die plötzliche Aenderung der Stromstärke bringt einen anderen Effect hervor als die langsame. Erstere ist vorteilhaft, wenn man rasche Rotationen erzielen will.

Soll die Rotation des Inductors eine gleichmässige sein, so empfiehlt es sich, die Unterbrechungen auf mechanischem Wege vorzunehmen. Wird der Strom immer in dem Augenblicke unterbrochen, in welchem er gerade seine grösste Intensität erreicht hat, dann sind die Rotationsgeschwindigkeiten die grössten. Lässt man den Strom lange geschlossen, dann hemmt er die Rotationsbewegung, indem er bremsend wirkt. Die Zahl der Stromschwankungen kann eine beträchtliche sein; bei 80 Unterbrechungen in der Secunde gelangen die Rotationsbewegungen immer sehr gut. Aber es ist anzunehmen, dass die Zahl der Unterbrechungen beträchtlich grösser werden kann.

Es ergiebt sich aus den Versuchen aber noch ein anderes Resultat, welches freilich der genauen Nachprüfung mittels feinerer Messungen, als ich sie ausführen konnte, bedarf. Dividirt man nämlich das Product aus der Zahl der Ampèrewindungen und der Zahl des Winkels beim Stromschliessen durch die Zahl des Ausschlagswinkels bei der Stromöffnung, dann kommt annähernd immer dieselbe Zahl 15 heraus.

	x Zahl der Ampère-windungen	Ausschlag bei y Strom-schluss	z Strom-öffnung	$\frac{xy}{z}$
Versuch 1	17	60	65	$\frac{17.60}{65} = 16$
„ 2	67	10	47	$\frac{67.10}{47} = 15$
„ 5a	98	8	52	$\frac{98.8}{52} = 15$
„ 3	150	5,5	57	$\frac{150.5,5}{57} = 15$
„ 4	280	3,5	65	$\frac{280.3,5}{65} = 15$
„ 5b	322	3	63	$\frac{322.3}{63} = 15$

Abschnitt II. Drehbewegungen der Nadel und des Inductors unter der Einwirkung eines constanten Feldes und elektrischer Schwingungen, wie sie beim Entladen von Leydener Batterien entstehen.

Zu den Versuchen 11 und 12 eignete sich am besten die Wicklung Nr. 3, deren Isolirung meist genügte, ohne dass die Funken auf benachbarte Windungen überschlagen. Zuweilen ist aber auch Wicklung Nr. 1 von Vorteil, wenn nämlich nur minimale Elektricitätsmengen in Betracht kommen. Auch hier legen wir die Ausgangsstellung A zu Grunde, indem wir annehmen, dass der von der positiven Belegung zur negativen Belegung überfliessende Strom an der Vorderseite der Drahtwicklung in der Richtung von unten nach oben zu geht. Bei Entladung einer Flasche ist nur eine Funkenstrecke nötig, bei Entladungen aus Influenzmaschinen bez. aus den damit verbundenen Flaschen lässt man die Funken entweder ebenfalls nur an einer Stelle oder, was zweckmässiger ist, an zwei Stellen (je in der Verbindung einer Flasche mit den Drahtenden des Galvanoskopes) überschlagen; eine Funkenlänge von 2—5 mm ergab die besten Resultate.

Versuch 11: Die Nadel wird im erdmagnetischen Felde durch eine einmalige Entladung einer Flasche nicht merklich beeinflusst. Lässt man aber von der Influenzmaschine zahlreiche Entladungen durch den Draht gehen, dann tritt eine anfänglich sehr langsame, allmählich aber mehr und mehr zunehmende Ablenkung nach rechts ein, und diese Rechtsdrehung geht dann auch nach Aussetzen der Entladungen von selbst weiter, bis die Nadel gerade $^1/_2$ Umdrehung (um $+180^0$) gemacht hat. Dabei ergiebt nun die Untersuchung der Nadel eine Aenderung ihres Eigenmagnetismus: Nach Einwirkung der ersten Entladungen ist die Nadel an ihren Enden weniger stark magnetisch; nach und nach wird sie magnetisch in der Richtung ihrer kleinen Axe, und zwar auf der linken Seite nordmagnetisch, auf der rechten Seite südmagnetisch; dadurch erfährt sie nun im Felde der Erde eine geringe rechtsseitige Ablenkung von $+5^0$ bis $+10^0$; wenn nun die Entladungen weiter wirken, dann wird sie an ihrem unteren Ende (das ursprünglich südmagnetisch war) schwach nordmagnetisch und an ihrem oberen Ende schwach südmagnetisch; deshalb wird

die nunmehr ummagnetisirte Nadel auch nach Aussetzen der Entladungen unter Einfluss des Erdmagnetismus weiter in derselben Richtung (rechts herum) gedreht, bis $^1/_2$ Umdrehung vollendet ist. Setzt man die Entladungen erst aus, nachdem die Nadel um $+90^0$ sich gedreht hat, dann ist die ummagnetisirte Nadel in der Längsrichtung wieder sehr stark magnetisch geworden. Lässt man dann bei der weiteren Drehung über $+90^0$ hinaus die Entladungen weiter einwirken, dann wird die Nadel in der Längsrichtung wieder schwächer magnetisch, und nach Vollendung einer $^1/_2$ Umdrehung erfolgt die Weiterdrehung rechts herum viel leichter und schon durch viel wenigere Entladungen als zu Beginn unseres Versuches, wo ja die Nadel noch in der Längsrichtung stark magnetisch war. Die Nadel kommt also, wenn sie zu Beginn des Versuches in der Längsrichtung kräftig magnetisch war, anfangs sehr schwer und sehr langsam in eine Rechtsdrehung; hat sie aber erst eine gewisse Ablenkung erfahren und ist die Ummagnetisirung erfolgt, dann läuft sie unter dem Einfluss des Erdmagnetismus und der elektrischen Schwingungen sehr leicht weiter und bekommt bald eine grosse Rotationsgeschwindigkeit. Verstärkt man dann noch das constante Feld durch Auflegen eines Stabmagneten, dann rotirt sie so rasch, dass man die Umdrehungszahl derselben nicht mehr mit dem Auge feststellen kann.

Versuch 12 (vgl. Fig. 2): Der Inductor wird nun im Felde des Stabmagneten schon durch Einwirkung einer einzigen Entladung kräftig und rasch rechts gedreht (je nach der Stärke der Entladung um wenige bis fast $+90^0$). Eine anfängliche Tendenz zu einer Linksdrehung ist auch hier nicht vorhanden. Schon der überspringende Funken einer geriebenen Siegellackstange bringt, wenn man Drahtwindung Nr. 1 benutzt, eine deutlich wahrnehmbare Drehung des Inductors hervor.

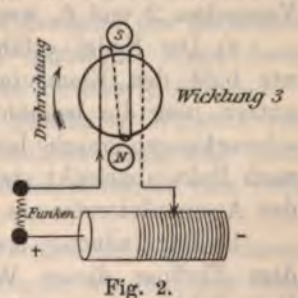


Fig. 2.

Beim Drehen der Influenzmaschine kann man den Inductor in sehr rasche Rotation versetzen. Untersucht man den Inductor nach Einwirken einer Entladung, während welcher er irgend-

wie angehalten wird, sodass er sich nicht drehen kann, dann zeigt er sich in seiner linken Hälfte schwach nordmagnetisch, in seiner rechten schwach südmagnetisch.

Verbindet man die Leiter der Influenzmaschine dauernd mit dem Galvanoskop (sodass also die Funkenstrecken wegfallen), dann bleiben Nadel und Inductor ganz still stehen. Verlangsamt man die Entladung einer Flasche durch eine eingeschaltete nasse Schnur, dann zeigt die Nadel die bekannte Ablenkung nach links.

Lässt man die Entladungsströme in entgegengesetzter Richtung durch die Drahtwicklung gehen (Ausgangsstellung B), dann sind alle Erscheinungen dieselben, bis auf das Vorzeichen der Drehbewegung, welches immer das entgegengesetzte ist.

Abschnitt III. Ablenkung und Drehbewegung der Nadel und des Inductors unter Einwirkung eines constanten Feldes und eines Wechselfeldes, bei welchem eine Richtung überwiegt.

In den Versuchen 13 und 14 erzeuge ich einen Wechselstrom, dessen elektromotorische Kraft in der einen Richtung stärker ist als in der anderen, dadurch, dass ich durch die Drahtwicklungen nacheinander den Strom eines Accumulators in der einen Richtung und dann den Strom eines Elementes in entgegengesetzter Richtung hindurchleite. Die Verbindung der Drahtwicklung mit diesen beiden Stromquellen wird so hergestellt, dass der Accumulatorstrom (6 Volt) aufwärts, der Elementenstrom (1,5 Volt) abwärts fliessen würde.

Versuch 13: Setzt sich demgemäss zusammen aus den Versuchen 2 und 6, wenn wir Drahtwicklung Nr. 1 benutzen.

a) Die Nadel erfährt im erdmagnetischen Felde, wenn wir bald den Elementen-, bald den Accumulatorstrom benutzen, nur die bekannten Ablenkungen. Folgen die Stromschwankungen rasch hintereinander, so bleibt sie ein wenig nach links abgelenkt stehen infolge Ueberwiegen der Wirkung des Accumulatorstromes.

b) Der Inductor macht im Felde des Stabmagneten unter dem Einfluss dieses Wechselstromes folgende Bewegungen: Beim Schliessen des Elementenstromes y (vgl. Versuch 6) dreht er sich langsam um $+60^{\circ}$ (rechts herum), falls der Stromschluss geraume Zeit andauert; beim Oeffnen des Stromes y würde er, wenn nicht sofort der Accumulatorstrom geschlossen

wird, in seine Ausgangsstellung um ebensoviel Grade links herum zurückgedreht werden (Versuch 6). Schliesst man aber den Accumulatorstrom x sofort nach Ausschalten des Stromes y, dann erfolgt eine linksseitige Drehung nur um -10^0 (Versuch 2). Würde man den Strom x erst dann schliessen, nachdem der Inductor in seine Ausgangsstellung zurückgekehrt ist, dann würde er um $-60 + -10 (= -70^0)$ zurückgedreht werden. Beim Oeffnen des Stromes x erfolgt nun wieder eine Rechtsdrehung um $+47^0$. Im ungünstigsten Falle, nämlich wenn zwischen Oeffnung des Stromes y und Schliessen des Stromes x eine geraume Zeit vergeht, bekommt man als Resultat der Beeinflussung dieses Wechselstromes eine Drehung von $+60^0 - 60^0 - 10^0 + 47^0 = +37^0$. Richtet man aber den Versuch so ein, dass man den Elementenstrom geraume Zeit, den Accumulatorstrom kurze Zeit schliesst und Schluss des Accumulatorstromes im Augenblicke der Oeffnung des Elementenstromes vornimmt, dann kommt theoretisch eine Rechtsdrehung von $+60^0 - 10^0 + 47^0 = +97^0$ zu stande. Und in der That lässt sich durch viermaliges Einwirken dieses Wechselstromes unter Beobachtung der beschriebenen Maassregel eine volle Umdrehung des Inductors erzielen. Durch diesen Wechselstrom lässt sich der Inductor also schon bequem in Rotation versetzen.

Versuch 14: Benutzen wir in Versuch 13 statt der Wicklung Nr. 1 die Wicklung Nr. 3, dann setzt sich der Versuch zusammen aus den Versuchen 8 und 4. Im günstigsten Falle beträgt hier die Rechtsdrehung $+5{,}5^0 - 3{,}5^0 + 65^0 = +67^0$. Vergrössert man aber den inneren Widerstand des Elementes dadurch, dass das Zink nicht tief eintaucht, dann dreht sich der Inductor beim Schliessen des Stromes y um $+25^0$, und man bekommt daher die noch günstigere Wirkung von $+25^0 - 3{,}5^0 + 65^0 = +86{,}5^0$. Thatsächlich kann man dann durch viermaliges Einwirken dieses Wechselstromes eine volle Umdrehung des Inductors erzielen.

Kehrt man die Richtung beider Ströme um, dann kommen Linksrotationen zu stande; diese Versuche würden sich dann zusammensetzen aus den Versuchen 1, und 7 bez. 3 und 9.

In den Versuchen 15—17 verwende ich den sogenannten Primärstrom eines Inductionsapparates. Legt man die Drahtwicklung Nr. 1 nämlich in Nebenschluss zu einer Drahtwick-

lung Nr. 4 (welche dadurch hergestellt ist, dass ein 11 m langer, 1 mm dicker Draht in 150 Windungen auf ein 7 cm langes, 15 mm dickes Eisendrahtbündel gewickelt ist, und welche einen $W = 0{,}25$ Ohm hat), dann fliesst beim Schliessen des Elementes der Strom zum grössten Teil durch Nr. 4, zum kleinsten Teil durch Nr. 1, und beim Oeffnen des Stromes entsteht nun der Extrastrom in Nr. 4, der, da die Verbindung mit dem Element aufgehoben ist, die Wicklung Nr. 1 durchströmt und zwar in einer dem Hauptstrom entgegengesetzten Richtung. Dieser Extrastrom hat aber eine höhere elektromotorische Kraft als das Element und entsteht ausserdem in dem günstigsten Augenblicke, nämlich dann, wenn der die Wicklung Nr. 1 durchlaufende Teilstrom des Hauptstromes verschwindet. Es liegt also auf der Hand, dass unter dem Einfluss dieses Wechselstromes Wirkungen zu stande kommen, wie wir sie in Versuch 13 sahen. Dieser Strom übt aber, da die elektromotorische Kraft des Extrastromes eine sehr grosse ist, auch auf die Nadel starke Einwirkungen aus, die denen ähnlich sind, die wir bei den Entladungen der Influenzmaschinen beobachten konnten. Die Verbindung wird so hergestellt, dass der Hauptstrom abwärts, der Extrastrom aufwärts durch Wicklung Nr. 1 geht.

Versuch 15: Die im erdmagnetischen Felde stehende Nadel wird nämlich beim Schliessen des gesamten Hauptstromes um $+90^{0}$ (rechts herum) gedreht (Versuch 6) und bleibt so lange abgelenkt stehen, als der Stromschluss dauert. Oeffnet man den Hauptstrom, dann wird die um $+90^{0}$ abgelenkte Nadel ummagnetisirt durch den Extrastrom und sie wird daher unter dem Einfluss der Erde weiter um $+90^{0}$ gedreht, sodass sie also $^{1}/_{2}$ Umdrehung gemacht hat. Der Extrastrom wirkt also ähnlich wie eine Reihe von Entladungen in Versuch 11. Schliesst man wiederholt, dann kommt die Nadel in continuirliche Rechtsrotation, während der sie nach jeder halben Umdrehung ummagnetisirt wird. Wie in Versuch 13, so gelingt auch hier der Versuch am besten, wenn die Stromöffnung in einem geeigneten Momente erfolgt. Damit soll aber nicht gesagt sein, dass irgend welcher Synchronismus zwischen Rotationsgeschwindigkeit und den Unterbrechungen vorhanden sein muss. Denn einmal kommt die Nadel von selbst in immer raschere Drehung unter dem Einfluss des Wechsel-

stromes, der durch mechanische Unterbrechungsvorrichtungen erzeugt wird, und zweitens nimmt die Rotationsgeschwindigkeit sofort beträchtlich zu, sobald das erdmagnetische Feld durch Annähern des Stabmagneten verstärkt wird.

Ungünstig für das Zustandekommen einer Drehbewegung der Nadel sind:

a) Aeusserst kurze Dauer des Stromschlusses, die zur Folge haben kann, dass die Nadel während des Stromschlusses wegen zu kurzer Zeit nicht abgelenkt wird, und welche die Entwickelung des Stromes in der Wicklung Nr. 4 bis zur vollen Stromstärke verhindert, sodass kein wirksamer Extrastrom entstehen kann; es kann dann die Nadel still stehen bleiben.

b) Eine Stromquelle mit sehr kleiner elektromotorischer Kraft; dann wird die Nadel auch bei längerer Andauer des Stromes weniger stark abgelenkt und zweitens kommt, da die Stromstärke des durch Nr. 4 fliessenden Stromes sehr klein ist, ein nur mässig gespannter Extrastrom zu stande, welcher die Nadel nicht umzumagnetisiren vermag. Wenn man mit der Hand schliesst und öffnet, dann wird die Nadel nur nach rechts abgelenkt (Schliessen) und kehrt in ihre Ruhelage (Oeffnen) links herum zurück. Erfolgen die Unterbrechungen mechanisch, z. B. durch den Wagner'schen Hammer, dann wird die Nadel einfach nach rechts abgelenkt und bleibt in dieser abgelenkten Stellung still stehen.

c) Ein allzustarkes constantes Feld, welches verhindert, dass die Nadel überhaupt aus der Nord-Süd-Richtung abgelenkt werden kann.

d) Eine unzweckmässige Drahtwicklung, z. B. Nr. 3, durch welche beim Schliessen des gesamten Hauptstromes der grössere Teil desselben hindurch gehen würde, da sie nur 0,133 Ohm hat, daher die Stromstärke in der Wicklung Nr. 4 sinkt, der Extrastrom eine kleinere elektromotorische Kraft bekommt und dieser dann, da er nur durch 35 Windungen geht, nicht genügend ausgenutzt wird. Die Nadel bleibt daher auch hier in abgelenkter Stellung still stehen. Bei Benutzung der Wicklung Nr. 2 ist die Wirkung eine mittelgute; die Nadel rotirt, aber langsamer als bei Benutzung von Drahtwicklung Nr. 1.

e) Allmähliches Ausschalten des Hauptstromes, welches die Entstehung eines wirksamen Extrastromes verhindert.

Günstig für das Zustandekommen von Drehbewegungen der Nadel sind dagegen:

a) eine geeignete Dauer des Stromschlusses, wie sie durch mechanische Unterbrechungsvorrichtungen, z. B. den Neef'schen Hammer, erreicht wird, welche den Strom immer in dem Augenblicke öffnen, in welchem der Strom in der Wicklung Nr. 4 die grösste Stromstärke erreicht;

b) eine geeignete Stromquelle, die den Eisenkern in der Wicklung Nr. 4 ad maximum magnetisirt;

c) ein geeignetes magnetisches Feld, dessen Stärke erst zunimmt mit Zunahme der Rotationsgeschwindigkeit der Nadel;

d) eine geeignete Wicklung, die in einem zweckmässigen Verhältnis zu der Wicklung Nr. 4 steht, damit ein zweckmässiger Wechselstrom zu stande kommt;

e) plötzliche Stromöffnung.

Aenderung der Stromrichtungen des Wechselstromes bewirkt stets die entgegengesetzten Bewegungen der Nadel.

Versuch 16 (vgl. Fig. 3): Der Inductor macht unter Einwirkung des Primärstromes im Felde des Stabmagneten folgende Bewegungen: Beim geraume Zeit dauernden Schliessen des Stromes eines Flaschenelementes dreht er sich um durchschnittlich + 20° rechts herum und beim Oeffnen weiter rechts herum um durchschnittlich + 40°. Einmalige Einwirkung des Wechselstromes bewirkt also Drehung um + 60°, daher die 6 malige Einwirkung eine volle Umdrehung. Ist die Stromquelle sehr geschwächt, dann bleibt der Anker beim Stromschluss fast ganz still stehen und dreht sich erst bei Stromöffnung rechts herum (um + 15°); aber selbst dann bringen mittels Neef'schen Hammers erzeugte Wechselströme den Anker in rasche Umdrehung (200 pro Minute). Im erdmagnetischen Felde rotirt der Anker ebenfalls, aber viel langsamer. Auch für

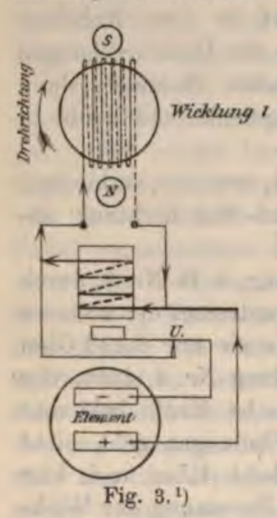


Fig. 3.[1])

1) Durch die Pfeile ist die Richtung des beim Oeffnen entstehenden Extrastromes angedeutet.

die Drehbewegung des Ankers giebt es günstige und ungünstige Bedingungen, die sich annähernd mit den unter Versuch 15 aufgezählten decken. Und mit Umkehr der Richtung der Wechselströme wird auch die Drehrichtung des Inductors umgekehrt.

Versuch 17: Wenn man in Versuch 15 die Nadel, statt sie in das Innere der Drahtwicklung zu bringen, seitlich davon in der Höhe des Innenraumes hält, so rotirt sie ebenfalls rechts herum, aber langsamer; und hält man sie über oder unter die Drahtwicklung, dann rotirt sie in entgegengesetzter Richtung, also links herum, und langsamer als die gleichzeitig im Innern rechts rotirende Nadel. Dasselbe gilt vom Inductor.

In den Versuchen 18 und 19 kommt der Secundärstrom eines Inductionsapparates zur Verwendung; es ist die Secundärrolle eines Inductoriums so mit der Drahtwicklung Nr. 1 verbunden, dass in letzterer der beim Schliessen des Hauptstromes entstehende Inductionsstrom abwärts, der bei Stromöffnung entstehende Inductionsstrom nach aufwärts fliesst.

Versuch 18: Beim Schliessen des primären Stromes wird die Nadel im erdmagnetischen Felde um + wenige Grade nach rechts abgelenkt und kehrt, da die Stromdauer eine kurze ist, sofort um — ebensoviel Grade in die Ruhelage zurück. Dieser positive Ausschlag ist bekanntlich ein Beweis dafür, dass ein Strom in der Richtung von oben nach unten die Wicklung durchflossen hat. Beim Oeffnen des Primärstromes erfolgt in schwächerem Grade eine gerade entgegengesetzte Ablenkung der Nadel, woraus wir schliessen, dass ein Strom in der Richtung nach oben geflossen ist. Oeffnet man aber den Hauptstrom in dem Augenblicke, wo die Nadel unter Einwirkung des Schlussinductionsstromes nach rechts abgelenkt ist, dann kann die Nadel durch einen starken Oeffnungsinductionsstrom ummagnetisirt werden, und dann dreht sie sich unter Einfluss der Erde so weit weiter rechts herum, dass gerade $^1/_2$ Umdrehung vollendet wird. Folgen nun neue Inductionsströme, so wiederholt sich der Vorgang: Die Nadel kommt also in Rechtsrotation, deren Geschwindigkeit wieder durch Verstärken des erdmagnetischen Feldes sehr beträchtlich erhöht werden kann. Sind die Inductinsströme zu schwach oder das magnetische Feld gleich von Anfang an zu stark, dann bleibt die Nadel in ihrer Ausgangsstellung still stehen

oder wird, wenn die Drahtwicklung nicht genau in der NS-Richtung stand, nach der Seite, nach der sie bereits ein wenig abgelenkt ist, noch etwas stärker abgelenkt und bleibt somit in abgelenkter Stellung regellos nach rechts oder links stehen (doppelsinnige Ablenkung der Nadel). Erteilt man ihr aber dann einen Stoss nach rechts, dann sieht man sie oft genug die begonnene Bewegung dauernd fortsetzen. Umkehr der Stromrichtung des Hauptstromes bewirkt Linksrotation.

Versuch 19 (vgl. Fig. 4): Der Inductor wird unter Einfluss des Secundärstromes im Felde des Stabmagneten so beeinflusst, dass er beim Schliessen des primären Stromes meist ganz still stehen bleibt (wie in Versuch 6 bei kurzer Stromdauer), dagegen bei Oeffnung des Hauptstromes eine Rechtsdrehung um $+10^0$ bis $+15^0$ macht; einmalige Einwirkung des Wechselstromes dreht also den Anker schon kräftig rechts herum, und bei häufigen Unterbrechungen des primären Stromes gelangt er in rasche Rechtsrotation. Der Anker rotirt auch im erdmagnetischen Felde, aber sehr langsam. Mit Umkehr der Richtung des primären Stromes wird auch die Drehrichtung geändert. Damit die Rotationen gut gelingen, müssen in den beiden letzten Versuchen natürlich die Wicklungen des Inductoriums und des Galvanoskopes zu einander passen. Will man also Versuchsrolle Nr. 3 mit Erfolg benutzen, dann muss die Secundärrolle des Inductoriums aus einem kurzen und dicken Drahte bestehen.

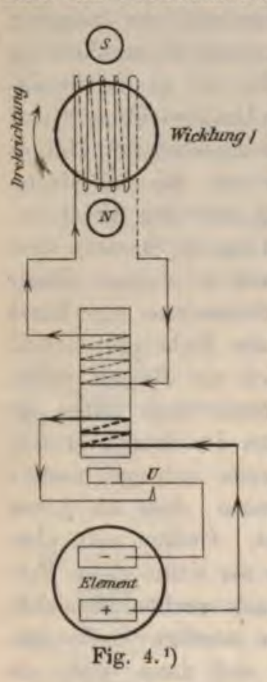


Fig. 4.[1])

Auch der sogenannte combinirte Primär-Secundärstrom der Inductionsapparate kann zur Bewegung der Nadel und des Inductors Verwendung finden.

Da in den bisherigen Versuchen, bei denen Wechselströme benutzt worden sind, der Inductor (eventuell auch die

1) Die Pfeile deuten die Richtung der beim Oeffnen entstehenden Ströme an.

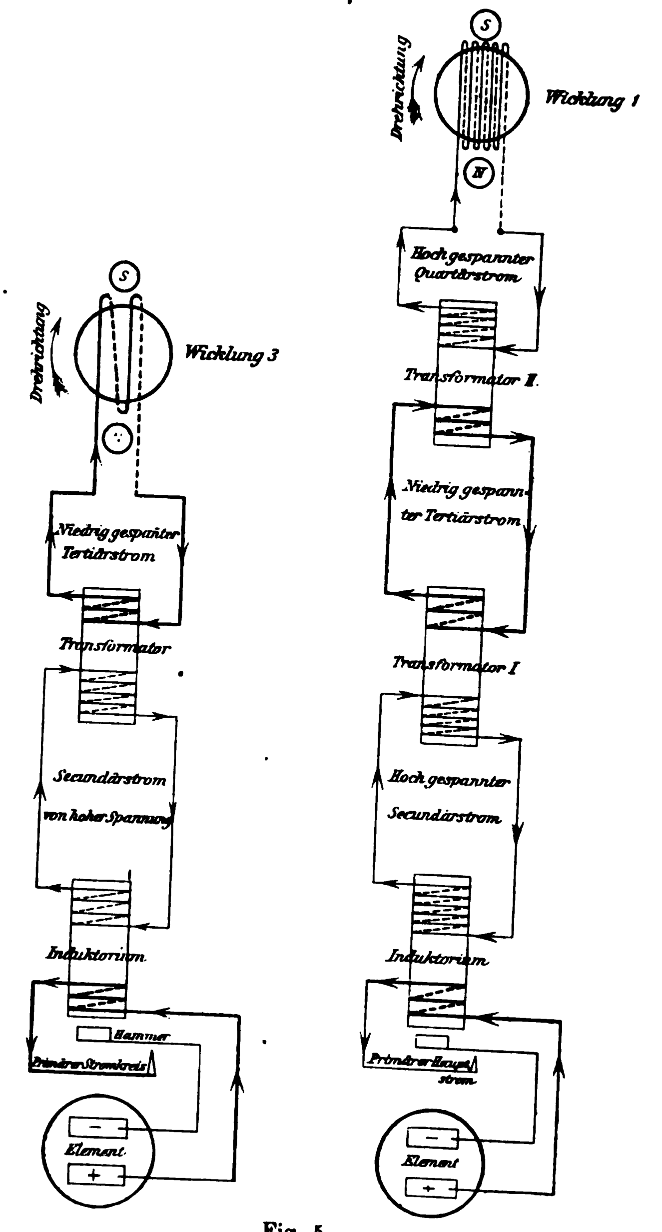

Drehrichtung
Wicklung 1
Hoch gespannter Quartärstrom
Transformator II.
Niedrig gespannter Tertiärstrom
Transformator I
Hoch gespannter Secundärstrom
Induktorium
Primärer Hauptstrom
Element
Drehrichtung
Wicklung 3
Niedrig gespannter Tertiärstrom
Transformator
Secundärstrom von hoher Spannung
Induktorium.
Hammer
Primärer Stromkreis
Element

Fig. 5.

Nadel, falls sie überhaupt rotirt) stets rechts herum sich dreht, wenn die elektromotorische Kraft des aufwärts fliessenden Stromes grösser ist, als die des abwärts fliessenden Stromes, so können wir umgekehrt aus der Drehrichtung des Ankers auch auf die Richtung, in welcher der höher gespannte Strom fliesst, schliessen. Wenn wir also Wechselströme durch Transformatoren leiten, und Drehbewegungen bekommen, dann können wir daraus schliessen, dass der Stromimpuls in der einen Richtung stärker ist als in der anderen, und wir können aus der Drehrichtung feststellen, in welcher Richtung der stärkere Impuls erfolgt.

In den Versuchen 20 und 21 kommen Transformationsströme zur Verwendung.

Versuch 20 (vgl. Fig. 5): Verbindet man die Secundärrolle eines Inductoriums mit einer ähnlichen Wicklung eines Transformators und dessen innere Wicklung mit der passenden Galvanoskopwicklung, dann erhält man tertiäre Wechselströme. Unter deren Einfluss zeigte die Nadel, wenn der primäre Gleichstrom langsam geschlossen und geöffnet wird, keine merklichen Ablenkungen im erdmagnetischen Felde an. Der Inductor dagegen blieb zwar beim Stromschluss ebenfalls still stehen, drehte sich aber bei Stromöffnung deutlich nach einer bestimmten Richtung, die mit Aenderung der Richtung des primären Hauptstromes umgekehrt wird, um einige wenige Grade (3° bis 5°). Bei rascher Folge der Unterbrechungen des primären Stromes kam er in gleichmässige Rotation (bis zu 150 Umdrehungen pro Minute); durch Transformiren der Tertiärströme erzeugte ich ferner Quartärströme, durch die ich bis 60 Umdrehungen des Inductors pro Minute erzielte; auch hier machte der Anker nur eine Drehbewegung, sobald der primäre Strom geöffnet wird. Die Nadel kam unter dem Einfluss der tertiären und quartären Wechselströme nicht von selbst in Drehung, setzte aber eine ihr künstlich erteilte Rotation fort unter Zunahme der Rotationsgeschwindigkeit. Die Skizzen der Fig. 5 dienen dazu, die Drehrichtung des Inductors und die daraus geschlossene Richtung des kräftigeren Stromimpulses zu veranschaulichen.

Versuch 21: Auch die Ströme, die beim Entladen von Leydener Flaschen entstehen, habe ich mit Erfolg transformiren können (vgl. die Skizze der Fig. 6, aus der weiteres hervorgeht).

Einige weitere Versuche mittels Wechselströmen will ich nur kurz andeuten: Einmal habe ich in der Verbindung zwischen der Secundärrolle und dem Galvanoskope eine Unterbrechung hergestellt, sodass eine oder mehrere Funkenstrecken entstehen, wodurch die Drehrichtung unverändert bleibt, die Rotationsgeschwindigkeit erhöht wird. Sodann habe ich die Enden der Secundärrolle des Inductoriums mit den inneren Belegungen zweier Franklin'schen Tafeln, die Enden des Galvanoskopes mit den äusseren Belegungen verbunden; dann sind die Wirkungen verschieden, je nachdem eine oder keine Funkenstrecke zwischen den beiden inneren oder den beiden äusseren Belegungen eingeschaltet ist. Aehnliche Versuche sind auch mit der Influenzmaschine gemacht worden. Endlich habe ich in der Verbindung zwischen Secundärrolle des Inductoriums und Galvanoskop ein Element eingeschaltet, sodass ein Dauerstrom durch die Versuchswicklungen geht und ein constantes Feld erzeugt, das senkrecht zu dem constanten Felde des Stabmagneten wirkt: Fliesst der Oeffnungsinductionsstrom in derselben Richtung als der Dauergleichstrom, dann bleibt der Inductor still stehen; schaltet man um, sodass der Oeffnungsinductionsstrom dem Elementenstrom entgegengesetzt wirkt, dann kommt der Inductor in langsame Rotation.

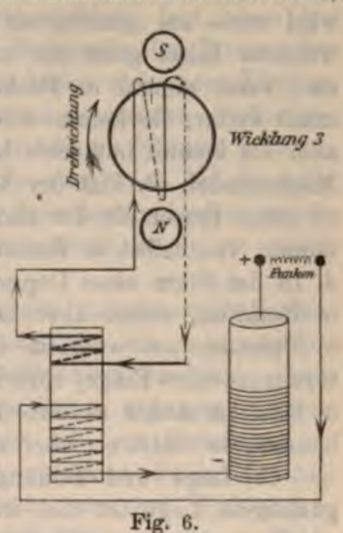


Fig. 6.

Abschnitt IV. A. Lage der Nadel und des Inductors im Galvanoskope. Die günstigste Position ist diejenige, in der die Mittelpunkte der Nadel bez. des Inductors und des Innenraumes der Drahtwicklung zusammenfallen. Je mehr man diese voneinander entfernt, um so schwächer werden Nadel und Inductor von den Strömen beeinflusst. Bringt man Nadel oder Inductor in den ober- oder unterhalb der Wicklung gelegenen Raum, dann kehren sich die Drehrichtungen um. Die Wicklung kann auch aus zwei Hälften bestehen, die dann seitlich rechts und links vom Mittelpunkt des Inductors zu liegen

kommen. Sie können auch auf einen Elektromagneten aufgewickelt sein, dessen Pole senkrecht wirken zu den Polen des Stabmagneten.

B. Formen des Inductors: 1. Die kreisrunde Scheibe bez. ein massiver oder ein aus Scheiben aufgebauter Cylinder wird stets am günstigsten beeinflusst. 2. Eine Nadel aus weichem Eisen giebt die ungünstigste Form ab: zwar rotirt sie, wenn einmal in Drehung begriffen, sehr gut und sehr rasch weiter, sie kommt aber oft nicht von selbst in Rotation; aber sie kommt immerhin leichter in Rotation als die stählerne Magnetnadel. 3. Hat der Anker eine Kreuzform, dann kommt er schon besser als der nadelförmige Anker, aber auch nicht immer, von selbst in Rotation, rotirt aber sehr rasch weiter. 4. In der Form eines Doppelkreuzes kommt er gut von selbst in Rotation, rotirt aber langsamer als die massive Scheibe. 5. Spiralen aus weichem Draht (bez. aus Draht gewickelte Gramme'sche Ringe) rotiren gut, gehen auch von selbst an. 6. Sind im Anker radiäre und circuläre Unterbrechungen vorhanden, so rotirt er, aber sehr langsam.

C. Lage und Bildung des magnetischen Feldes: Die günstigste Lage ist die, in welcher die Richtung der Drahtwicklung zusammenfällt mit der Richtung der Kraftlinien des constanten magnetischen Feldes. Dreht man die Wicklung des Galvanoskopes aus der NS-Richtung heraus, dann werden die Bewegungen geschwächt, und sie werden $= 0$, wenn die Drähte $\perp$ zur NS-Richtung gestellt werden. Fällt der Mittelpunkt der Verbindung beider Pole zusammen mit dem Mittelpunkt des Ankers und des Innenraumes des Galvanoskopes, so bekommt man die besten Bewegungen. Der Magnet kann aber auch seitlich oder auf und unter der Wicklung liegen. Als magnetisches Feld habe ich benutzt:

a) das erdmagnetische Feld, wobei zu beachten ist, dass der Erdnordpol südmagnetisch wirkt;

b) das magnetische Feld eines permanenten Stabmagneten oder eines Hufeisenmagneten;

c) das magnetische Feld eines Elektromagneten, der mit Gleichstrom erregt wird;

d) das magnetische Feld eines Gleichstromes, der eine $\perp$ über die Wicklung des Galvanoskopes geschobene Drahtwicklung dauernd durchfliesst;

e) das magnetische Feld eines Elektromagneten, der durch einen der beschriebenen Wechselströme erregt wird und dessen Polarität durch die Richtung des Oeffnungsinductionsstromes bedingt wird. Wenn man z. B. ein geeignetes Drahtbündel **Z**förmig biegt und so auf die Drahtwicklung legt, dass das Mittelstück oberhalb, die beiden Endstücke im Innern der Wicklung zu liegen kommen, dann bildet sich unter Einfluss des kräftig magnetisirenden aufwärts fliessenden Oeffnungsinductionsstromes oben ein Nord-, unten ein Südpol, und der Anker läuft links herum; er würde aber auch bei Umkehr der Richtung des Inductionsstromes links herum laufen; würde das Eisenstück aber ⋜förmig sein, dann würde er rechts herum rotiren.

D. Zahl der Wicklungen und der magnetischen Felder: Gewöhnlich habe ich eine Wicklung und ein magnetisches Feld benutzt. Wenn ich zwei Wicklungen benutzte, diese parallel stellte und den Strom in beiden in entgegengesetzten Richtungen hindurchschickte, musste ich, um Rotationen zu erhalten, auch zwei constante magnetische Felder in Anwendung bringen; und bei Benutzung von drei Wicklungen, die unter einem Winkel von 120° sich kreuzen oder ein Dreieck bilden, musste ich drei constante magnetische Felder benutzen. Die Zahl der constanten Felder muss also der Zahl der schwingenden Felder entsprechen.

II. Teil.

Theoretische Betrachtungen.

Lässt man die Stromschwankungen eines Gleichstromes, die Entladungen der Leydener Flasche oder die beim Schliessen und Oeffnen des Gleichstromes entstandenen Wechselströme durch den Draht eines in der Nord-Südrichtung eines magnetischen Feldes stehenden Galvanoskopes gehen, dann beobachtet man, dass ein kreisrunder Inductor aus weichem Eisen gewöhnlich leicht in Drehung kommt, während die Magnetnadel oft nur Ablenkungen macht, oft still stehen bleibt und zuweilen in Rotation kommt. Man überzeugt sich leicht, dass die Ursache dieser verschiedenartigen Wirkung der genannten Ströme auf die Nadel und den Inductor teils in der ver-

schiedenen Form, teils in dem verschiedenen Material beider liegt. Denn wenn wir sehen, dass der nadelförmige Inductor aus weichem Eisen schwer oder überhaupt nicht in Rotation kommt, der kreisrunde Inductor dagegen leicht, so liegt es auf der Hand, dass hierbei die Form von Einfluss ist. Wenn wir ferner sehen, dass ein nadelförmiger Inductor aus weichem Eisen eine begonnene Rotation leichter fortsetzt als die stählerne Nadel, die sogar zuweilen wieder, nachdem künstlich in Drehung versetzt, zum Stillstand kommt, so müssen wir annehmen, dass das verschiedene Material ungleich beeinflusst wird. Die stärkere Coercitivkraft und der grössere magnetische Widerstand des Stahles hemmen die Rotation. Erst wenn die magnetischen Kräfte des Stromes so beschaffen sind, dass die Coercitivkraft des Stahles mit Leichtigkeit überwunden, der Eigenmagnetismus der Nadel geändert wird, rotirt die Nadel trotz verschiedener Form und verschiedenem Material ebenso und oft viel rascher als der kreisrunde Inductor. In denjenigen Fällen, in denen die Nadel nur abgelenkt wird, ändert sich ihr Eigenmagnetismus nicht oder nicht wesentlich, wogegen in den Fällen, in denen sie rotirt, eine fortwährende Ummagnetisirung zu stande kommt. Die magnetische Axe behält also in den ersteren Fällen ihre Lage zu einer Marke auf der Nadel bei, in den letzteren Fällen verschiebt sich die magnetische Axe fortwährend zur Marke, und zwar entgegengesetzt der Rotationsbewegung der Nadel. Unter dem Einfluss des Stromes wird daher die Nadel bald in toto gedreht, bald werden nur die Molecüle gedreht. Dieselben Vorgänge spielen sich auch in dem Inductor aus weichem Eisen ab; nur werden in ihm die Molecüle viel leichter gedreht, und darum sehen wir auch viel häufiger Drehbewegungen zu stande kommen. An der Hand der Versuche lässt sich nun leicht feststellen, unter welchen Bedingungen eine Drehung des Eisens in toto unter Erhaltung der Lage der magnetischen Axe zu einer Marke und eine Drehung der Molecüle im Eisen, also eine Drehung der magnetischen Axe gegen eine Marke, zu stande kommt.

Nadel und Anker stehen in unseren Versuchen unter dem Einflusse zweier Kräfte, einmal wirkt auf sie dauernd das constante magnetische Feld der Erde oder des Stabmagneten — ich ziehe der Einfachheit halber nur das letztere in den

'eis dieser Betrachtungen —, welches die Nadel in die Nord-drichtung zu zwingen sucht und auf den Anker so wirkt, ss auch er in der Nord-Südrichtung eine magnetische Axe fweist. Zweitens wirkt auf Nadel und Anker vorübergehend s Stromfeld, und zwar in der West-Ostrichtung. Die magne-chen Kräfte, welche in einem bestimmten Raume wirken, B. in der horizontalen Mittelebene des Galvanoskopes, in r sich die Nadel oder der Inductor befinden, kann man sich f verhältnismässig einfache Weise bildlich darstellen, um ıe Vorstellung von der Richtung und Dichtigkeit der Magnet-ıftlinien zu gewinnen. Zu Fig. 7 sind diese Kraftlinien, :ht in unbegrenzter Zahl, sondern nur in einem passenden ırhältnis gezeichnet: Die magnetische Axe des constanten ldes verläuft also in der Zeichnung senkrecht, die des romfeldes horizontal, die des combinirten Magnetstromfeldes ıräg oder vielmehr **S**-förmig. Diese **S**-Form ist natürlich rschieden stark ausgeprägt zu denken je nach dem Ver-ltnis der Stärke des Magnetfeldes zu der des Stromfeldes, d wenn der Strom in entgegengesetzter Richtung fliessen ırde, so würde diese Linie das Spiegelbild eines **S** darstellen.

Wenn der Strom geschlossen wird, dann dreht sich die ıgnetische Axe des constanten magnetischen Feldes, die in r Ausgangsstellung durch die gerade Linie $N_1 S_1$ gekenn-lchnet ist, links herum und bekommt einen **S**-förmigen Ver-ıf; und gleichzeitig nimmt die Zahl der Kraftlinien beträcht-h zu. Der umgekehrte Vorgang findet bei der Stromöffnung ıtt. Die Magnetnadel, welche gewöhnlich in der Richtung rer grossen Axe magnetisch ist, stellt sich in einem magne-chen Felde immer so ein, dass ihre magnetische Axe mit r Axe dieses Feldes möglichst zusammenfällt: um also im eichgewicht zu sein, folgt sie in den Versuchen 1—5 den ›wegungen des magnetischen Feldes durch die bekannte Ab-ıkung nach links beim Schliessen des Stromes und rechts-itige Rückkehr in die Ruhelage bei Stromöffnung. Da der genmagnetismus der Nadel hierbei nicht wesentlich geändert rd, so zeigt uns die Ablenkung der Nadel gewissermaassen n Verlauf der magnetischen Axe des auf sie wirkenden ›ldes an, und wir bekommen aus dem Grade der Ablenkung ıen Ueberblick über das Verhältnis der Stärke des Strom-

feldes zu der des constanten Feldes; aus der Zahl der Schwingungen und Oscillationen, die die Nadel jedesmal macht, ehe sie zum Stillstand kommt, können wir ferner einen Schluss auf die jedesmalige Stärke des auf sie wirkenden Feldes machen.

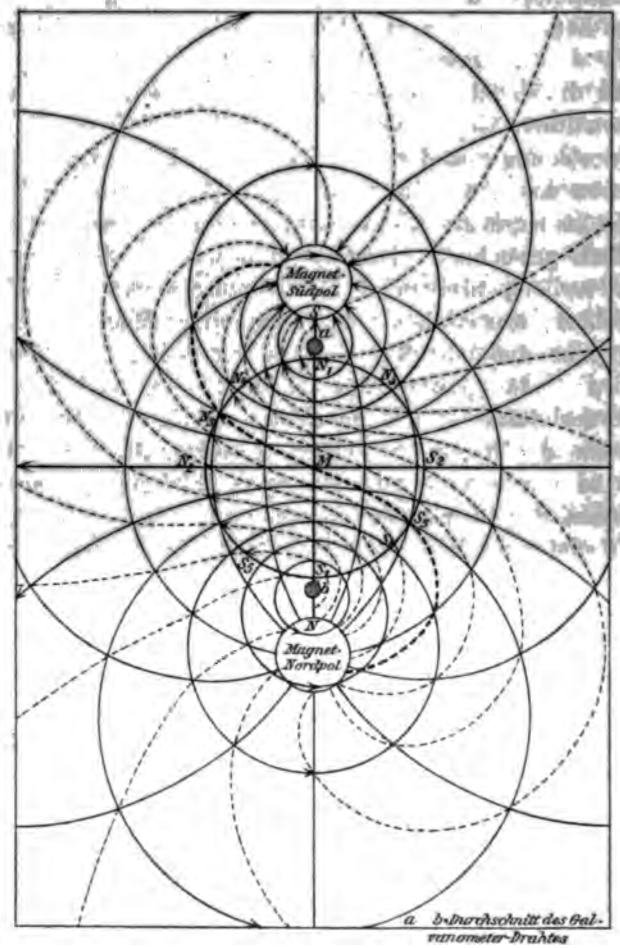


Fig. 7.

Der Inductor aus weichem Eisen wird nun in diesen Fällen anders beeinflusst als die Nadel. Ist er **frisch ausgeglüht**, so zeigt er zunächst keinen **Eigenmagnetismus**; **in** das Feld des Stabmagneten **gebracht** erhält er **bei** N_1 und S_1

Pole, die er aber, aus dem Felde wieder herausgenommen, in nur sehr schwachem Grade beibehält. Hat er aber einmal in einem Versuche unter Einfluss eines kräftigen Stromfeldes gestanden, dann zeigt er an zwei gegenüberliegenden Stellen etwas stärkere Polarität und zwischen denselben eine magnetische Axe, die er in dem erdmagnetischen Felde dauernd behalten würde. Seitlich von dieser Axe lagern sich die Molecüle in gekrümmten Bahnen, die zum Teil geschlossene Kreise darstellen. Ein solcher Inductor stellt sich daher, wenn er in das Feld des Stabmagneten gebracht wird, infolge des Vorhandenseins von remanentem Magnetismus in ganz bestimmter Stellung ein, und verhält sich insofern wie die Magnetnadel mit ihrem stark ausgeprägten Eigenmagnetismus. Da er, auch wenn man ihn immer wieder künstlich aus dieser Stellung herausdreht, in dieselbe zurückkehrt, so ist anzunehmen, dass er seine magnetische Axe in dem Felde des Stabmagneten im grossen und ganzen beibehält, und nur die seitlich gelegenen Molecüle mehr oder weniger verschoben werden: eine Verschiebung der magnetischen Axe gegen eine Marke am Anker findet dabei fast gar nicht statt. Sie findet daher auch nicht statt (oder doch nur partiell, und diese partielle Verschiebung können wir unberücksichtigt lassen), wenn der Inductor, dessen magnetische Axe während des Stromschlusses schräg zwischen der horizontalen und verticalen Linie $N_1 S_1$ und $N_2 S_2$ in der Richtung $N_3 S_3$ verläuft, nach Stromöffnung sich rechts dreht wie die Nadel und sich so stellt, dass seine Axe in der Richtung $N_1 S_1$ verläuft. Anders liegen die Verhältnisse beim Schliessen des Stromes. Während die Nadel mit jedem folgenden Versuche immer stärker abgelenkt wird, da das Stromfeld der Reihe nach an Stärke zunimmt, sehen wir, dass der Inductor der Reihe nach immer schwächer gedreht wird. In Versuch 1 dreht er sich nach Schliessen des Stromes und bei längerer Andauer desselben um annähernd ebensoviel (60) Grade links herum als die Nadel, und bei Stromöffnung kehrt er um annähernd ebensoviel Grade nach rechts zurück, ein wesentliches Verrücken der magnetischen Axe innerhalb des Inductors (gegen eine Marke) kann daher nicht stattgefunden haben. In den folgenden Versuchen ist der Drehungswinkel bei Stromöffnung grösser als der Drehungswinkel beim Stromschliessen:

hier muss also eine Verschiebung der magnetischen Axe des Inductors gegen die Marke stattgefunden haben; diese Verschiebung ist um so grösser, je stärker das Stromfeld wird, das auf den Inductor einwirkt. Gleichzeitig dreht sich aber auch die Marke selbst links herum, und zwar um so mehr, je weniger Ampèrewindungen wirksam werden.

Es könnte nun auffallen, dass in den Versuchen 2—5 der Inductor nicht um ebensoviel Grade rechts gedreht wird beim Oeffnen des Stromes wie die Nadel, und in den Versuchen 2, 3 und 5 der Drehungswinkel bei Stromöffnung kleiner ist als in Versuch 1. Wir haben bisher nicht berücksichtigt, dass durch das Eisen des Inductors der Verlauf der Kraftlinien der Felder geändert wird, indem das Eisen die Kraftlinien concentrirt. Sobald das Stromfeld so stark ist, dass es die Molecüle des Eisens in beträchtlichem Grade richtet, dann wird das Eisen gewissermaassen selbst zu einem Magneten, und der Verlauf der Kraftlinien sowie ihre Dichtigkeit wird nun bestimmt durch das Magnetfeld, das Stromfeld nnd das Feld des Elektromagneten. Da die Kraftlinien des Magnetstromfeldes am dichtesten in den Zonen zwischen N_1 und N_3 bez. S_1 und S_3 verlaufen, so bekommt der Inductor seine stärkste Polarität nicht bei N_3 und S_3, sondern zwischen N_1 und N_3 bez. S_1 und S_3, also etwa bei N_4 und S_4 und die gemeine Axe aller drei Felder würde dann etwa die Linie sein, die von S durch $N_4 M S_4$ nach N geht. Der Winkel, den also diese magnetische Axe gegen die Verticale SN bildet, würde also im Versuch 2 gleich 47°, in Versuch 3 gleich 52° etc. sein. Die Lage der Molecüle zu einer Marke hier näher festzustellen, würde zu weit führen und auch nicht gut ohne zahlreiche Abbildungen möglich sein.

Schliesst man in Versuch 1 den Strom nur sehr kurze Zeit, dann bleibt der Inductor oft ganz still stehen. Infolge seiner Trägheit kann er den raschen Bewegungen der Kraftlinien beim Schliessen und Oeffnen nicht folgen. In den anderen Versuchen findet dagegen eine immer stärkere Einwirkung auf die Molecüle statt; diese werden in sehr kurzer Zeit gerichtet und gedreht. Bei kurzer Dauer des Stromschlusses kommt daher gleich eine Rechtsdrehung des Inductors zu stande, indem die anfängliche Bewegung in der entgegengesetzten

Richtung, die nur während längerer Dauer des Stromschlusses zu stande kommen würde, wegen der kurzen Zeit des Stromschlusses nicht zu Ende geführt wird. Verzögern wir dagegen z. B. in Versuch 3 die gewöhnliche rasche Drehung und Dichtigkeitszunahme der Kraftlinien des Feldes, in welchem der Inductor sich befindet, dadurch, dass wir vor Beginn des Versuches einen grossen Widerstand in den Stromkreis eingeschaltet haben und diesen dann allmählich ausschalten, dann kommt die Richtung und Drehung der Molecüle im Eisen so langsam zu stande, dass der Inductor in toto dieser Bewegung folgen kann. Er dreht sich dann, während die Stromstärke allmählich zunimmt, links herum um etwa 75° (also annähernd so weit wie die kleinere Nadel); es behält dann seine magnetische Axe annähernd ihre Lage zur Marke bei, und bei Stromöffnung dreht er sich wieder um ebensoviel Grade zurück. Wenn also im Inductor eine Verschiebung seiner magnetischen Axe gegen eine Marke zu stande kommen soll, muss das Stromfeld nicht nur genügend stark werden, sondern es muss dieses auch innerhalb einer bestimmten Zeit geschehen: die Drehung der magnetischen Axe des Feldes muss mit einer gewissen Geschwindigkeit (Winkelgeschwindigkeit) vor sich gehen. Wie gross dieselbe sein muss, lässt sich leicht feststellen, indem wir das Stromfeld ersetzen durch das Feld eines permanenten Hufeisenmagneten, dessen Pole in der West-Ostrichtung wirken, und der nun, während er in der Richtung des Stabmagneten hin und her pendelt, den Inductor immer vorübergehend beeinflusst. Bewegt er sich sehr langsam am Inductor vorbei, dann dreht sich dieser bei der Annäherung des Hufeisenmagneten links herum und bei der Entfernung des Magneten gleich stark rechts herum; bei immer rascherer Bewegung wird die Linksdrehung dagegen immer kleiner, während die Grösse der Rechtsdrehung dieselbe bleibt, und der Inductor kommt schliesslich, wenn der Magnet immer wieder vorbeipendelt, in Rechtsrotation.

Hinsichtlich der Versuche 6—10 ist nichts Neues zu erwähnen; sie sind nur die Spiegelbilder der ersten fünf Versuche.

In Versuch 12 sehen wir, dass der Inductor nach Einwirkung einer Entladung der Leydener Flasche sofort eine kräftige und ziemlich rasche Rechtsdrehung macht um wenige

bis fast 90°, je nach der Stärke der Entladung. Wir müssen daher annehmen, dass sich die magnetische Axe des Inductors unter dem Einfluss der Entladung links herum gedreht hat und dass auch die seitlich davon gelegenen Molecüle in grosser Zahl parallel zu dieser Axe gerichtet sind; denn der Inductor muss ziemlich kräftig magnetisch geworden sein, damit er sich rasch rechts herum dreht. Eine anfängliche Linksdrehung ist hierbei nicht zu beobachten und ist auch bei der äusserst kurzen Dauer des Stromes nicht zu erwarten. Die molecularrichtende und moleculardrehende Kraft ist hier nun so gross, dass selbst die Coercitivkraft der Magnetnadel überwunden werden kann. Aus diesem Grunde sowohl wie auch infolge der kurzen Dauer des Stromes reagirt die Nadel in dem Versuch 11 nicht mehr durch eine linksseitige Ablenkung, sondern sie hat, wie der Inductor, gleich von vornherein die Tendenz sich rechts zu drehen, da ihr Eigenmagnetismus sich geändert hat. Sie wird jetzt mehr in der Richtung ihrer kleinen Axe magnetisch. In dieser Richtung nimmt sie starken Magnetismus ungleich schwerer an als in der Richtung der grossen Axe, daher gehören mehrere und kräftigere Entladungen dazu, um sie in dieser Richtung so kräftig zu magnetisiren, dass sie sich in dem Felde der Erde oder des Stabmagneten richtig einstellen würde. Sie kommt daher anfänglich sehr schwer in Rechtsdrehung. Ist sie aber erst einmal ein wenig aus ihrer Anfangsstellung herausgedreht und wirken dann weitere Entladungen ein, dann drehen sich die Molecüle weiter links herum, und die Nadel bekommt dann wieder in der Längsrichtung Magnetismus und dreht sich nunmehr rascher weiter. Wollen wir die bekannte Ablenkung der Nadel nach links erhalten, dann müssen wir verhindern, dass ihre Molecüle gedreht werden, und für längere Stromdauer sorgen, was wir z. B. durch Einschalten einer nassen Schnur erreichen können. Wenn die Nadel und der Anker unter Einfluss der Entladungen rechts herum rotirt, dann drehen sich dabei fortwährend die Molecüle in entgegengesetzter Richtung gerade so, wie dies beim Anker in den Versuchen 2, 3, 4 und 5 der Fall war. Der Inductor verhält sich in dieser Hinsicht wie der Anker eines Gleichstrommotors, dessen Molecüle sich entgegen der Drehrichtung des Ankers herumdrehen.

Bisher hatten wir den Anker bald unter Einfluss des constanten Feldes des permanenten Magneten mit der Axe $N_1 S_1$, bald unter Einfluss des combinirten Magnetstromfeldes mit der S-förmig gekrümmten Axe gesehen und gefunden, dass diesen Bewegungen der Axe bald der Inductor im ganzen, bald nur seine Molecüle folgen. Lassen wir nun durch den Draht des Galvanoskopes einen Wechselstrom gehen, dann würden die Axen der hierbei in Betracht kommenden Felder bald S-förmig, bald vertical, bald umgekehrt S-förmig verlaufen. Hat dieser Wechselstrom in der einen Richtung eine höhere elektromotorische Kraft als in der anderen, dann werden sich die Erscheinungen des Versuches 1 (bez. 6) mit denen der folgenden Versuche combiniren. In Versuch 13 kommt beim Schliessen des Elementenstromes zunächst das verhältnismässig schwache Magnetstromfeld zu stande, welches das Spiegelbild des Feldes in Versuch 1 darstellt, und dessen Axe etwa von S über N_5 MS_5 nach N (diese Linie ist in Fig. 7 nicht ausgezeichnet worden) verlaufen würde. In diesem Felde dreht sich nun der Inductor einfach rechts herum; die Lage seiner magnetischen Axe zur Marke bleibt annähernd erhalten. Beim Oeffnen des Elementenstromes würde er sich um ebensoviel Grade wieder links herum drehen. Wird aber der Accumulatorstrom geschlossen gleich nach Ausschalten des Elementenstromes, dann kommt das verhältnismässig starke Magnetstromfeld des Versuches 2 mit der S-förmigen Axe zu stande, welches ja den Inductor in toto nur sehr wenig links herum dreht, dagegen aber die Molecüle im Innern des Eisens sehr stark beeinflusst, die magnetische Axe im Eisen also sehr stark gegen die Marke verschiebt. Dass auch hier eine geringe Tendenz des Inductors zur Linksdrehung vorhanden ist, habe ich in dem Versuche erwähnt. Aber diese Linksdrehung fällt aus, wenn die Dauer des Schliessens des Accumulatorstromes eine kurze ist. Wir sehen daher, wenn die Oeffnung des Accumulatorstromes dem Schliessen desselben rasch folgt, wiederum nur eine Rechtsdrehung des Inductors zu stande kommen.

Einen Wechselstrom von dieser Beschaffenheit bekommen wir aber sehr leicht auch aus einem Element, wenn wir nämlich im Nebenschluss zu der Wicklung des Galvanoskopes eine

Spirale mit Eisenkern legen. Bei Benutzung des sogenannten Primärstromes einer Spirale fallen eben Oeffnung des schwachen abwärts fliessenden Stromes, Entstehen und Verschwinden des aufwärts fliessenden starken Extrastromes zeitlich sehr nahe zusammen. Die Verhältnisse liegen bei diesem Wechselstrom so günstig, dass sogar die Nadel trotz grosser Coercitivkraft leicht in Rotation kommt.

Den Curven des Primärstromes ähnlich sind aber auch die Curven der Secundärströme. Hier ist nur der zeitliche Verlauf des Inductionsschliessungsstromes ein kürzerer, der Effect derselben ist daher meist gleich Null; dagegen werden durch den Oeffnungsinductionsstrom die Molecüle des Eisens sehr stark beeinflusst. Derselbe wirkt dann ähnlich wie der Entladungsstrom der Leydener Flasche. Infolge der kürzeren Dauer des Schliessungsstromes wird die Magnetnadel oft gar nicht oder nur sehr gering nach rechts abgelenkt, und es erfolgt daher beim Oeffnen des Stromes die Ummagnetisirung der Nadel zunächst in der Richtung ihrer kleinen Axe. Wie ich schon bei Betrachtung der Entladungen der Leydener Flasche ausführte, hat die Nadel dann wenig Neigung, sich richtig in dem Felde des Stabmagneten einzustellen. Sie kommt daher durch den Secundärstrom von selbst schwerer in Rotation als unter Einfluss des Primärstromes, der die Nadel bei Stromschluss schon hinreichend stark ablenkt, sodass ihre Ummagnetisirung bei Stromöffnung in der Richtung ihrer grossen Axe erfolgen kann. Ist sie aber einmal in Bewegung, so rotirt sie unter Einfluss des Secundärstromes sehr gut weiter. Benutzen wir endlich tertiäre oder quartäre oder noch weiter transformirte Ströme, so sehen wir ebenfalls Rotationen zu stande kommen. Die jedesmalige Drehrichtung des Anker erlaubt es dann gleichzeitig, einen Schluss hinsichtlich der Richtung des stärkeren Stromimpulses zu machen.

Halle, im December 1900.

(Eingegangen 6. December 1900.)

5. *Folgerungen aus den Capillaritätserscheinungen;* *von Albert Einstein.*

Bezeichnen wir mit γ diejenige Menge mechanischer Arbeit, welche wir der Flüssigkeit zuführen müssen, um die freie Oberfläche um die Einheit zu vergrössern, so ist γ nicht etwa die gesamte Energiezunahme des Systems, wie folgender Kreisprocess lehrt. Sei eine bestimmte Flüssigkeitsmenge vorliegend von der (absoluten) Temperatur T_1 und der Oberfläche O_1. Wir vermehren nun isothermisch die Oberfläche O_1 auf O_2, erhöhen die Temperatur auf T_2 (bei constanter Oberfläche), vermindern dann die Oberfläche auf O_1 und kühlen dann die Flüssigkeit wieder auf T_1 ab. Nimmt man nun an, dass dem Körper ausser der ihm vermöge seiner specifischen Wärme zukommenden keine andere Wärmemenge zugeführt wird, so ist bei dem Kreisprocess die Summe der dem Körper zugeführten Wärme gleich der Summe der ihm entnommenen. Es muss also nach dem Princip von der Erhaltung der Energie auch die Summe der zugeführten mechanischen Arbeiten gleich Null sein.

Es gilt also die Gleichung:

$$(O_2 - O_1)\gamma_1 - (O_2 - O_1)\gamma_1 = 0 \quad \text{oder} \quad \gamma_1 = \gamma_2 .$$

Dies widerspricht aber der Erfahrung.

Es bleibt also nichts anderes übrig als anzunehmen, dass mit der Aenderung der Oberfläche auch ein Austausch der Wärme verbunden sei, und dass der Oberfläche eine eigene specifische Wärme zukomme. Bezeichnen wir also mit U die Energie, mit S die Entropie der Oberflächeneinheit der Flüssigkeit, mit s die specifische Wärme der Oberfläche, mit w_0 die zur Bildung der Oberflächeneinheit erforderliche Wärme in mechanischem Maass, so sind die Grössen:

$$d\,U = s\,.\,O\,.\,d\,T + \{\gamma + w_0\}\,d\,O$$

und

$$d\,S = \frac{s\,.\,O\,.\,d\,T}{T} + \frac{w_0}{T}\,d\,O$$

vollständige Differentiale. Es gelten also die Gleichungen:

$$\frac{\partial (s \cdot O)}{\partial O} = \frac{\partial (\gamma + w_0)}{\partial T},$$

$$\frac{\partial}{\partial O}\left(\frac{s\,O}{T}\right) = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{w_0}{T}\right).$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$\gamma + w_0 = \gamma - T\frac{\partial \gamma}{\partial T}.$$

Dies aber ist die gesamte Energie, welche zur Bildung der Einheit der Oberfläche nötig ist.

Bilden wir noch:

$$\frac{d}{d T}(\gamma + w_0) = -T\frac{d^2 \gamma}{d T^2}.$$

Die Experimentaluntersuchungen haben nun ergeben, dass sich stets sehr nahe γ als lineare Function der Temperatur darstellen lässt, d. h.:

Die zur Bildung der Oberflächeneinheit einer Flüssigkeit nötige Energie ist unabhängig von der Temperatur.

Ebenso folgt:

$$s = \frac{d \gamma}{d T} + \frac{d w_0}{d T} = \frac{d \gamma}{d T} - \frac{d \gamma}{d T} - T\frac{d^2 \gamma}{d T^2} = 0,$$

also: Der Oberfläche als solcher ist kein Wärmeinhalt zuzuschreiben, sondern die Energie der Oberfläche ist potentieller Natur. Man sieht schon jetzt, dass

$$\gamma - T\frac{d \gamma}{d T}$$

eine zu stöchiometrischen Untersuchungen sich geeignetere Grösse ist, als das bisher benutzte γ bei Siedetemperatur. Die Thatsache, dass die zur Bildung der Oberflächeneinheit erforderliche Energie kaum mit der Temperatur variirt, lehrt uns aber auch, dass die Configuration der Molecüle in der Oberflächenschicht mit der Temperatur nicht variiren wird (abgesehen von Aenderungen von der Grössenordnung der thermischen Ausdehnung).

Um nun für die Grösse

$$\gamma - T\frac{d \gamma}{d T}$$

eine stöchiometrische Beziehung aufzufinden, ging ich von den einfachsten Annahmen über die Natur der molecularen An-

ziehungskräfte aus, und prüfte deren Consequenzen auf ihre Uebereinstimmung mit dem Experiment hin. Ich liess mich dabei von der Analogie der Gravitationskräfte leiten.

Sei also das relative Potential zweier Molecüle von der Form:

$$P = P_\infty - c_1 \cdot c_2 \cdot \varphi(r),$$

wobei c eine für das betreffende Molecül charakteristische Constante ist, $\varphi(r)$ aber eine vom Wesen der Molecüle unabhängige Function ihrer Entfernung. Wir nehmen ferner an, dass

$$\tfrac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} c_\alpha c_\beta \varphi(r_{\alpha,\beta})$$

der entsprechende Ausdruck für n Molecüle sei. Sind speciell alle Molecüle gleich beschaffen, so geht dieser Ausdruck in

$$\tfrac{1}{2} c^2 \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} \varphi(r_{\alpha,\beta})$$

über. Wir machen ferner noch die Annahme, dass das Potential der Molecularkräfte ebenso gross sei, wie wenn die Materie homogen im Raume verteilt wäre; es ist dies allerdings eine Annahme, von der wir nur angenähert die Richtigkeit erwarten dürfen. Mit ihrer Hülfe verwandelt sich der obige Ausdruck in:

$$P = P_\infty - \tfrac{1}{2} c^2 N^2 \iint d\tau \,.\, d\tau' \varphi(r_{d\tau, d\tau'}),$$

wobei N die Anzahl der Molecüle in der Volumeneinheit ist. Ist das Molecül unserer Flüssigkeit aus mehreren Atomen zusammengesetzt, so soll analog wie bei den Gravitationskräften $c = \sum c_\alpha$ gesetzt werden können, wobei die c_α den Atomen der Elemente charakteristische Zahlen bedeuten. Setzt man noch $1/N = v$, wobei v das Molecularvolum bedeutet, so erhält man die endgültige Formel:

$$P = P_\infty - \tfrac{1}{2} \frac{(\sum c_\alpha)^2}{v^2} \iint d\tau \,.\, d\tau' \varphi(r_{d\tau, d\tau'}).$$

Setzen wir nun noch voraus, dass die Dichte der Flüssigkeit bis zu deren Oberfläche constant ist, was ja durch die Thatsache wahrscheinlich gemacht wird, dass die Energie der Oberfläche von der Temperatur unabhängig ist, so sind wir nun im stande die potentielle Energie der Volumeneinheit im

Inneren der Flüssigkeit und die der Oberflächeneinheit zu berechnen.

Setzen wir nämlich

$$\frac{1}{2}\int\limits_{x=-\infty}^{+\infty}\int\limits_{y=-\infty}^{+\infty}\int\limits_{z=-\infty}^{+\infty} dx\,dy\,dz\,.\,\varphi\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) = K,$$

so ist die potentielle Energie der Volumeneinheit

$$P = P_\infty - K\frac{(\sum c_\alpha)^2}{v^2}.$$

Denken wir uns eine Flüssigkeit vom Volumen V und von der Oberfläche S, so erhalten wir durch Integration

$$P = P_\infty - K\frac{(\sum c_\alpha)^2}{v^2}\,.\,V - K'\frac{(\sum c_\alpha)^2}{v^2}\,.\,O,$$

wobei die Constante K' bedeutet:

$$\int\limits_{x'=0}^{x'=1}\int\limits_{y'=0}^{y'=1}\int\limits_{z'=\infty}^{z'=0}\int\limits_{x=-\infty}^{x=\infty}\int\limits_{y=-\infty}^{y=\infty}\int\limits_{z=0}^{z=\infty} dx.dy.dz.dx'.dy'.dz$$
$$\varphi\,\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}.$$

Da über φ nichts bekannt ist, bekommen wir natürlich keine Beziehung zwischen K und K'.

Dabei ist zunächst im Auge zu behalten, dass wir nicht wissen können, ob das Flüssigkeitsmolecül nicht die n-fache Masse des Gasmolecüles besitzt, doch folgt aus unserer Herleitung, dass dadurch unser Ausdruck der potentiellen Energie der Flüssigkeit nicht geändert wird. Für die potentielle Energie der Oberfläche bekommen wir, auf Grund der eben gemachten Annahme, den Ausdruck:

$$P = K'\frac{(\sum c_\alpha)^2}{v^2} = \gamma - T\frac{d\gamma}{dT},$$

oder

$$\sum c_\alpha = v\,.\sqrt{\gamma - T\frac{d\gamma}{dT}}\,.\,\frac{1}{\sqrt{K'}}.$$

Da die rechts stehende Grösse für Siedetemperatur für viele Stoffe aus den Beobachtungen von R. Schiff berechenbar ist, so bekommen wir reichlichen Stoff zur Bestimmung der Grössen c_α. Ich entnahm das gesamte Material dem Buch

ıllgemeine Chemie von W. Ostwald. Ich gebe hier zu-
ı das Material an, mittels dessen ich das c_a für C, H, O
ler Methode der kleinsten Quadrate berechnete. In der
$c_{a_{ber.}}$ überschriebenen Columne sind die $\sum c_a$ angegeben,
e mit Hülfe der so gewonnenen c_a aus den chemischen
ıln sich ergeben. Isomere Verbindungen wurden zu einem
vereinigt, weil die ihnen zugehörigen Werte der linken
nur unbedeutend voneinander abwichen. Die Einheit
willkürlich gewählt, weil, da K' unbekannt ist, eine ab-
Bestimmung der c_a nicht möglich ist.
ch fand:

$$c_H = -1,6, \quad c_C = 55,0, \quad c_O = 46,8.$$

l	$\sum c_a$	$\sum c_{a_{ber.}}$	Name der Verbindung
	510	524	Citronenterpen
	140	145	Ameisensäure
ı	198	197	Essigsäure
	250	249	Propionsäure
ı	309	301	Buttersäure und Isobuttersäure
$_2$	365	352	Valeriansäure
ı	350	350	Acetanhydrid
$_4$	505	501	Aethyloxalat
ı	494	520	Methylbenzoat
$_2$	553	562	Aethylbenzoat
$_3$	471	454	Acetessigäther
	422	419	Anisol
)	479	470	Phenetol und Methylcresolat
$_2$	519	517	Dimethylresorcin
ı	345	362	Furfurol
)	348	305	Valeraldehyd
O	587	574	Carvol

lan sieht, dass die Abweichungen in fast allen Fällen die
chsfehler wohl kaum übersteigen und keinerlei Gesetz-
ɡkeit zeigen.
lierauf berechnete ich gesondert die Werte für Cl, Br
, welchen Bestimmungen natürlich eine geringere Sicher-
ukommt, und fand:

$$c_{Cl} = 60, \quad c_{Br} = 152, \quad c_J = 198.$$

ch lasse nun in gleicher Weise wie oben das Material
ı:

Formel	$\sum c_a$	$\sum c_{a_{ber.}}$	Name der Verbindung
C_6H_5Cl	385	379	Chlorbenzol
C_7H_7Cl	438	434	Chlortoluol
C_7H_7Cl	450	434	Benzychlorid
C_3H_5OCl	270	270	Epichlorhydrin
C_2OHCl_3	358	335	Chloral
C_7H_5OCl	462	484	Benzoylchlorid
$C_7H_6Cl_2$	492	495	Benzylidenchlorid
Br_2	217	304	Brom
C_2H_5Br	251	254	Aethylbromid
C_3H_7Br	311	306	Propylbromid
C_3H_7Br	311	306	Isopropylbromid
C_3H_5Br	302	309	Allylbromid
C_4H_9Br	353	354	Isobutylbromid
$C_5H_{11}Br$	425	410	Isoamylbromid
C_6H_5Br	411	474	Brombenzol
C_7H_7Br	421	526	o-Bromtoluol
$C_2H_4Br_2$	345	409	Aethylenbromid
$C_3H_6Br_2$	395	461	Propylenbromid
C_2H_5J	288	300	Aethyljodid
C_3H_7J	343	352	Propyljodid
C_3H_7J	357	352	Isopropyljodid
C_3H_5J	338	355	Allyljodid
C_4H_9J	428	403	Isobutyljodid
$C_5H_{11}J$	464	455	Isoamyljodid

Es scheint mir, dass grössere Abweichungen von unserer Theorie bei solchen Stoffen eintreten, welche verhältnismässig grosse Molecularmaasse und kleines Molecularvolum haben.

Wir haben aus unseren Annahmen gefunden, dass die potentielle Energie der Volumeneinheit den Ausdruck besitzt:

$$P = P_x - K\frac{(\sum c_a)^2}{v^2},$$

dabei bedeutet K eine bestimmte Grösse, welche wir aber nicht berechnen können, da es überhaupt erst durch die Wahl der c_a vollkommen definirt wird. Wir können daher $K = 1$ setzen und gewinnen so eine Definition für die absoluten Werte der c_a. Berücksichtigen wir dies von nun an, so erhalten wir für die Grösse des Potentiales, welche dem Aequivalent (Molecül) zukommt, den Ausdruck:

$$P = P_x - K\frac{(\sum c_a)^2}{v},$$

wobei natürlich P_∞ eine andere Constante bedeutet. Nun könnten wir aber das zweite Glied der rechten Seite dieser Gleichung der Differenz $D_m J - A v_d$ gleich setzen — wobei D_m die moleculare Verdampfungswärme (Dampfwärme × Molecularmasse), J das mechanische Aequivalent der Calorie, A den Atmosphärendruck in absolutem Maass und v_d das Molecularvolum des Dampfes ist —, wenn die potentielle Energie des Dampfes Null wäre und wenn für Siedetemperatur der Inhalt an kinetischer Energie beim Uebergang vom flüssigen in den Gaszustand ungeändert bliebe. Die erste dieser Annahmen scheint mir unbedenklich. Da wir aber zu der letzteren Annahme keinen Grund haben, aber auch keine Möglichkeit die fragliche Grösse abzuschätzen, so bleibt uns nichts anderes übrig, als die obige Grösse selbst zur Rechnung zu benutzen.

In die erste Spalte der folgenden Tabelle habe ich die Grössen $\sqrt{D_m' . v}$ im Wärmemaass eingetragen, wobei D_m' die um die äussere Verdampfungsarbeit (in Wärmemaass) verminderte Verdampfungswärme bedeutet. In die zweite setzte ich die Grössen $\sum c_a$, wie sie aus den Capillaritätsversuchen ermittelt sind; in der dritten finden sich die Quotienten beider Werte. Isomere Verbindungen sind wieder zu einer Zeile vereinigt.

Name der Verbindung	Formel	$\sqrt{D_m' . v}$	$\sum c_{a_{\text{ber.}}}$	Quotient
Isobutylpropionat	$C_7H_{14}O_2$	1157	456	2,54
Isoamilacetat	„			
Propylacetat	„			
Isobutylisobutyrat	$C_8H_{16}O_2$	1257	510	2,47
Propylvalerat	„			
Isobutylbutyrat	„			
Isoamylpropionat	„			
Isoamylisobutyrat	$C_9H_{18}O_2$	1367	559	2,45
Isobutylvalerat	„			
Isoamylvalerat	$C_{10}H_{10}O_2$	1464	611	2,51
Benzol	C_6H_6	795	310	2,57
Toluol	C_7H_8	902	372	2,48
Aethylbenzol	C_8H_{10}	1005	424	2,37
m-Xylol	„			
Propylbenzol	C_9H_{12}	1122	475	2,36
Mesitylen	„			
Cymol	$C_{10}H_{14}$	1213	527	2,30
Aethylformiat	$C_3H_6O_2$	719	249	2,89
Methylacetat	„			

er Verbindung	Formel	$\sqrt{D'_m} \, . \, v$	$\sum c_{a_{ber.}}$	Quotient
lacetat	$C_4H_8O_2$	837	301	2,78
ethylpropionat	"			
Propylformiat	"			
Methylisobutyrat	$C_5H_{10}O_2$	882	353	2,50
Isobutylformiat	"			
Aethylpropionat	"			
Propylacetat	"			
Methylbutyrat	"			
Aethylisobutyrat	$C_6H_{12}O_2$	971	405	2,40
Methylvalerat	"			
Isobutylacetat	"			
Aethylbutyrat	"			
Propylpropionat	"			
Isoamylformiat	"			

Trotzdem der in der fünften Columne eingetragene Quotient keineswegs eine Constante ist, sondern vielmehr deutlich von der Constitution der Stoffe abhängt, so können wir das vorliegende Material doch dazu benutzen, diejenige Zahl, wenigstens der Grössenordnung nach, zu ermitteln, mit der unsere c_a multiplicirt werden müssen, damit wir sie in der von uns gewählten absoluten Einheit erhalten. Der gesuchte Multiplicator ergiebt sich im Mittel:

$$2,51 \, . \, \sqrt{4,17 \, . \, 10^7} = 1,62 \, . \, 10^4 \, .$$

Da die vorhergehende Betrachtung zeigt, dass sich bei der Verdampfung die kinetischen Verhältnisse der Molecüle verändern (wenigstens wenn unser Ausdruck für die potentielle Energie richtig ist), unternahm ich es die absolute Grösse c_a noch auf eine andere Weise aufzusuchen. Dabei ging ich von der folgenden Idee aus:

Comprimirt man eine Flüssigkeit isothermisch und ändert sich dabei ihr Wärmeinhalt nicht, was wir nun voraussetzen wollen, so ist die bei der Compression entweichende Wärme gleich der Summe der Compressionsarbeit und der von den Molecularkräften geleisteten Arbeit. Wir können also letztere Arbeit berechnen, wenn wir die bei der Compression entweichende Wärmemenge eruiren können. Dazu aber verhilft uns das Carnot'sche Princip.

Sei nämlich der Zustand der Flüssigkeit durch den Druck p in absoluten Einheiten und die absolute Temperatur T bestimmt; ist nun bei einer unendlich kleinen Zustandsänderung dQ die dem Körper zugeführte Wärme in absolutem Maass, dA die ihm zugeführte mechanische Arbeit, und setzen wir

$$dQ = X dp + S . dT,$$

$$dA = - p . dv = - p \left\{ \frac{\partial v}{\partial p} dp + \frac{\partial v}{\partial T} dT \right\}$$

$$= p . v . \varkappa dp - p . v . \alpha dT,$$

so liefert uns die Bedingung, dass dQ/T und $dQ + dA$ vollständige Differentiale sein müssen, die Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{X}{T}\right) = \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{S}{T}\right)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial T}(X + p\varkappa) = \frac{\partial}{\partial p}(S - p\alpha)$$

hierbei bedeuten, wie man sieht, X die bei isothermischer Compression durch den Druck $p = 1$ dem Körper zugeführte Wärme in mechanischem Maass, S die specifische Wärme bei constantem Druck, $\varkappa$ den Compressibilitätscoefficienten, α den thermischen Ausdehnungscoefficienten. Aus diesen Gleichungen findet man:

$$X dp = - T \left\{ \alpha + p \frac{\partial \alpha}{\partial p} + p \frac{\partial \varkappa}{\partial T} \right\} dp .$$

Nun ist daran zu erinnern, dass der Atmosphärendruck, unter dem sich unsere Körper gewöhnlich finden, für Compressionserscheinungen von Flüssigkeiten unbedenklich als unendlich klein zu betrachten ist; ebenso sind die Compressionen in unseren Experimenten sehr nahe proportional den angewandten Compressionskräften. Die Erscheinungen gehen also so vor sich, wie wenn die Compressionskräfte unendlich klein wären. Berücksichtigt man dies, so geht unsere Gleichung über in:

$$X . dp = - T . \alpha . dp .$$

Wenden wir nun die Voraussetzung an, dass bei isothermischer Compression die kinetische Energie des Systems nicht geändert wird, so erhalten wir die Gleichung

$X . dp$ + Compressionsarbeit + Arbeit der Molecularkräfte = 0.

Ist P das Potential der Molecularkräfte, so ist die letzte Arbeit:

$$\frac{\partial P}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial p} \cdot d p .$$

Setzt man unseren Ausdruck für die Grösse des Potentiales der Molecularkräfte hierin ein und berücksichtigt, dass die Compressionsarbeit von der Ordnung $d p^2$ ist, so erhält man bei Vernachlässigung dieser unendlich kleinen Grösse zweiter Ordnung

$$\frac{T_\alpha}{\varkappa} = \frac{(\sum c_\alpha)^2}{v^2},$$

wobei $\varkappa$ den Compressibilitätscoefficienten in absolutem Maasse bezeichnet. Wir erhalten so abermals ein Mittel, den gesuchten Proportionalitätscoefficienten für die Grössen c_α zu bestimmen. Die Grössen α und $\varkappa$ für die Temperatur des Eises entnahm ich den Tabellen von Landolt und Börnstein. Man erhält so für den gesuchten Factor die Werte:

Xylol	$1{,}71 \cdot 10^4$	Aethylalkohol	$1{,}70 \cdot 10^4$
Cymol	$1{,}71 \cdot 10^4$	Methylalkohol	$1{,}74 \cdot 10^4$
Terpentinöl	$1{,}73 \cdot 10^4$	Propylalkohol	$1{,}82 \cdot 10^4$
Aethyläther	$1{,}70 \cdot 10^4$	Amylalkohol	$2{,}00 \cdot 10^4$

Zunächst ist zu bemerken, dass die beiden durch verschiedene Methoden erlangten Coefficienten recht befriedigend übereinstimmen, trotzdem sie aus ganz verschiedenen Phenomenen hergeleitet sind. Die letzte Tabelle zeigt sehr befriedigende Uebereinstimmung der Werte, nur die kohlenstoffreicheren Alkohole weichen ab. Es ist dies auch zu erwarten, denn aus den Abweichungen, welche die Alkohole von dem thermischen Ausdehnungsgesetz von Mendelejew und von dem stöchiometrischen Capillaritätsgesetz von R. Schiff zeigen, hat man schon früher geschlossen, dass bei diesen Verbindungen mit Temperaturänderungen Aenderungen der Grösse der Flüssigkeitsmolecüle verbunden sind. Es ist also auch zu erwarten, dass bei isothermischer Compression solche moleculare Veränderungen auftreten, sodass für solche Stoffe bei gleicher Temperatur der Wärmeinhalt Function des Volums sein wird.

Zusammenfassend können wir also sagen, dass sich unsere fundamentale Annahme bewährt hat: Jedem Atom entspricht

ı moleculares Anziehungsfeld, welches unabhängig von der ›mperatur und unabhängig von der Art ist, wie das Atom it anderen Atomen chemisch verbunden ist.

Schliesslich ist noch darauf hinzuweisen, dass mit steigen- ›m Atomgewicht im allgemeinen auch die Constanten c_α steigen, ›ch nichts stets und nicht in proportionaler Art. Die Frage, ob ıd wie unsere Kräfte mit den Gravitationskräften verwandt nd, muss also noch vollkommen offen gelassen werden. Es t auch hinzuzufügen, dass die Einführung der Function $\varphi(r)$, elche unabhängig von der Natur der Molecüle sein sollte, nur s Näherungsannahme aufzufassen ist, ebenso die Ersetzung ›r Summen durch Integrale; in der That scheint sich unsere ıeorie für Stoffe von kleinem Atomvolum nicht zu bewähren, e das Beispiel des Wassers darthut. Ueber diese Fragen ıd erst von eingehenden Specialforschungen Aufschlüsse hoffen.

Zürich, den 13. December 1900.

(Eingegangen 16. December 1900.)

6. *Ueber die sogenannten flüssigen Krystalle;*
von G. Tammann.

F. Reinitzer und L. Gattermann stellten Präparate her, die nicht, wie gewöhnlich, zu klaren, sondern zu *trüben* Flüssigkeiten schmelzen. Bringt man eine Schicht dieser trüben Flüssigkeiten zwischen zwei gekreuzte Nicol'sche Prismen, so hellen sie das dunkle Gesichtsfeld auf. O. Lehmann hat diese trüben Flüssigkeiten für flüssige Krystalle erklärt, doch scheint mir noch eine andere Ansicht betreffs des interessantesten Teiles dieser Stoffe, der besonders eingehend studirten Ester des p-Azoxyphenols, haltbar zu sein.

Man kann, wie mir scheint, die trüben Schmelzen des p-Azoxyanisols und p-Azoxyphenetols, die man aus vollkommen klaren Krystallen erhalten kann, als Emulsionen eines braunen Reductionsproductes, das sich bei der Darstellung jener Stoffe aus den Estern des p-Nitrophenols in reichlicher Menge bildet, in dem Schmelzen jener Stoffe betrachten, und die klaren Krystalle als Lösungen jenes braunen Reductionsproductes in den Krystallen. Man hätte es dann hier mit dem bisher nicht bekannten Fall, dass sich ein fremder Stoff in den Krystallen eines anderen Stoffs reichlicher löst als in ihrer Schmelze, zu thun. Diese Auffassung wird zum wenigsten den Haupterscheinungen, die man beim Erwärmen dieser Stoffe beobachtet, gerecht. Es schmelzen die klaren Krystalle zu einer trüben Flüssigkeit, die aus zwei flüssigen Phasen besteht: hauptsächlich aus einer verdünnten Lösung des braunen Stoffs in viel p-Azoxyanisol und aus einer Lösung dieses im braunen Stoff. Steigert man nun die Temperatur weiter, so wird die trübe Flüssigkeit klar, sowie eine Emulsion von Phenol in Wasser bei einer bestimmten Temperatur vollkommen klar wird.

1. Gegen diese Auffassung der trüben Flüssigkeiten als Emulsionen könnte man vor allem anführen, dass sie zwischen gekreuzten Nicols hell erscheinen. Aber Mischungen von Glaspulver und Wasser oder Emulsionen von Phenol und Wasser und andere trübe nicht krystallisirte Medien hellen ebenfalls

das dunkle Gesichtsfeld bei gekreuzter Stellung der Nicol'schen Prismen auf, und zwar um so mehr, je feiner und je zahlreicher die Partikelchen im trüben Medium sind, weil durch die vollkommen unregelmässige Orientirung der vielen Brechungs- und Reflexionsflächen die Polarisationsebenen verschiedener Strahlen um verschieden grosse Winkel gedreht werden.

Allerdings bleibt beim Drehen von Schichten trüber Medien das Gesichtsfeld bei gekreuzten Nicols unverändert hell, während O. Lehmann angiebt, dass die fraglichen trüben Flüssigkeiten deutliche Auslöschungsrichtungen besitzen, und folglich die Structur eines Krystalles besitzen. Das Vorhandensein solcher Auslöschungsrichtungen ist nicht abzuleugnen. Beim Drehen einer Schicht der trüben Schmelze sieht man in der That, dass dunkle Teile des Gesichtsfeldes hell und helle Teile dunkel werden. Merkwürdigerweise ist die Verteilung der hellen und dunklen Felder wenig veränderlich, sie ändert sich bei erheblichen und schnellen Temperaturänderungen nicht, und ändert sich sogar nicht, wenn das Deckgläschen hin und her bewegt wird, wodurch die Flüssigkeit in heftige Bewegung gerät. Daraus folgt, dass der Wechsel der Helligkeit der verschiedenen Felder beim Drehen des Präparates zwischen gekreuzten Nicols nicht durch Doppelbrechung, die der Flüssigkeit, dem sogenannten flüssigen Krystall, eigentümlich ist, bewirkt wird, sondern es haften die die angebliche Doppelbrechung der trüben Flüssigkeit verursachenden Partikelchen an den Flächen des Object- und des Deckgläschens.

O. Lehmann selbst sagt im Capitel „Adsorption flüssiger Krystalle"[1]: „Befinden sich kleine undurchsichtige Stäubchen in der Flüssigkeit (im trüben geschmolzenen p-Azoxyanisol), so geraten sie in Bewegung, wie in jeder anderen Flüssigkeit, ohne dass die Figur im mindesten gestört wird, reiben sie aber auf den Glasflächen, so wird dort die Figur weggenommen."

Eine der trüben Flüssigkeit selbst eigentümliche Doppelbrechung ist also *nicht* erwiesen.

Schliesslich scheinen auch die Erscheinungen, die man beim Klarwerden der trüben Schmelzen sehr deutlich beobachten kann, nicht zu Gunsten einer krystallinischen Beschaffenheit

1) O. Lehmann, Wied. Ann. **41.** p. 528—531. Figg. 1 u. 2. 1890.

der trüben Flüssigkeiten gedeutet werden zu können. Die Grenze zwischen der klaren und trüben Flüssigkeit sieht man bei gekreuzten Nicols entweder in Gestalt einer continuirlichen Curve oder in Form einer Wellenlinie mit spitzen Bergen, über denen sich Punkte befinden. Die letztere Form der Grenze ist bei 200 facher Vergrösserung häufig sehr deutlich zu sehen. Eine gebrochene Grenzlinie aber, die auf die vectorielle Natur der Geschwindigkeit des Wachsens oder der Abnahme der trüben Flüssigkeit deuten würde, konnte nicht bemerkt werden. Bei gekreuzten Nicols durchschneidet die gekrümmte Grenze der hellen Flüssigkeit die hellen und dunklen Felder des Präparates, ohne an ihrer Grenze Knicke zu zeigen.

2. Gegen die Vermutung, dass die trübe Schmelze des p-Azoxyanisols eine Emulsion ist, könnte man ferner noch anführen, dass R. Schenck[1]) angeblich eine sprungweite Aenderung des Volumens beim Klarwerden der Schmelze gefunden hat. Aus den Daten von R. Schenck folgen aber für die trübe Flüssigkeit Ausdehnungscoefficienten, die mit steigender Temperatur stark zunehmen, sodass es wohl möglich ist, dass die Isotherme dieser Flüssigkeit dem Wachstypus angehört, sie sich also bei genauerer Durchmessung als eine continuirliche Curve, welche bei der Temperatur des Klarwerdens mit einem Knick in die Isotherme der klaren Flüssigkeit übergeht, erweisen wird. Beim Cholesterylbenzoat ist die gefundene Volumenvergrösserung von 0,0004 ccm pro 1 g von der Grösse der Versuchsfehler, also nicht erwiesen. Die Erniedrigung der Temperatur des Klarwerdens durch Zusätze anderer Stoffe lässt sich als eine Folge der vermehrten Löslichkeit des emulsionirten Stoffes, verursacht durch den Zusatz, zwanglos deuten. Auch dem Verständnis der Erhöhung der Temperatur des Klarwerdens durch Drucksteigerung stehen keine Schwierigkeiten entgegen.

3. Sind die sogenannten flüssigen Krystalle wirklich mechanische Gemenge zweier Flüssigkeiten, so muss es auch möglich sein, dieselben voneinander zu trennen und successive den Schmelzpunkt der festen Krystalle etwas zu erhöhen und die Temperatur des Klarwerdens erheblich zu erniedrigen, bis beide

---

1) R. Schenck, Zeitschr. f. phys. Chem. 25. p. 341 u. 342. 1898.

zusammenfallen, oder die genügend gereinigten Krystalle unmittelbar zu klaren Flüssigkeiten schmelzen. Zur Aufklärung hierüber wurden einige Versuche angestellt, aus denen mir die Möglichkeit jener Trennung zu folgen scheint, doch ist dieselbe nicht vollständig durchgeführt worden.

Das zu diesen Versuchen angewandte p-Azoxyanisol war aus käuflichem p-Nitrophenetol nach der Vorschrift von R. Schenck (l. c.) von Hrn. A. Bogojawlensky dargestellt und durch 6 maliges Umkrystallisiren aus Aethylalkohol gereinigt, es schmolz bei 116°, und bei 135° wurde die Schmelze klar. R. Schenk fand die Punkte 114° und 134,1° und G. A. Hulett 118,3° und 135,9°.

Schmilzt man etwas grössere Mengen von p-Azoxyanisol (gegen 20 g), so bemerkt man, dass, wenn beim Abkühlen die klare Flüssigkeit sich trübt, aus derselben sich makroskopische schwarzbraune Tröpfchen abscheiden, die schnell zu Boden fallen, und beim Erwärmen sich wieder lösen. Sorgt man dafür, dass die schwarzen Tröpfchen in den untersten Teil des zu einer Spitze ausgezogenen Schmelzrohres fallen, so haben sich nach 3 maligem Klarwerden und Abkühlen gegen 0,05 g des braunschwarzen Stoffes ausgeschieden, wodurch die trübe Schmelze eine etwas heller gelbe Farbe erhalten hat, und die Temperatur des Klarwerdens um 0,2° gesunken ist. Bei weiteren Wiederholungen des Erwärmens und Abkühlens finden nur sehr geringe Abscheidungen statt.

Darauf wurde die trübe Schmelze durch eine scharf getrocknete, bacteriendichte, Pukall'sche Thonzelle dreimal filtrirt, wodurch die Farbe des Filtrates bedeutend heller gelb wurde, und die Temperatur des Klarwerdens um 0,5° sank. Weitere 3 malige Filtration blieb ohne Einfluss auf die Eigenschaften des Präparates, ebenso zwei Minuten langes Centrifugiren der trüben Schmelze. Mehrfaches Umkrystallisiren aus der Schmelze, ebenso vielfaches Umkrystallisiren aus Aethylalkohol, Chloroform und Eisessig waren, weil offenbar der braune Stoff immer wieder in die vollkommen klaren Krystalle mit eingeht, ohne Einfluss auf die Temperatur des Klarwerdens.

Es blieb also nur noch übrig die Destillation zu versuchen, dieselbe wurde von Hrn. T. Rotarski mit folgenden Resultaten ausgeführt.

Destillirt man unter dem Druck von 2 – 4 mm und 170—180°, so erhält man in 20 Stunden aus 10 g des Stoffs 0,5 g eines Destillates von hellgelber Farbe, dessen Schmelzpunkt sich nicht wesentlich geändert hatte, das aber schon bei 132,5° klar wurde, während der Rückstand sich bei 134,8° klärte.

Um ebensoviel änderte sich die Temperatur des Klarwerdens bei der Destillation mit überhitztem Wasserdampf. Diese wurde in einem ganz aus Glas gefertigten Apparat ausgeführt. Ein langes, vielfach gebogenes Glasrohr führte den Wasserdampf durch die Schmelze, die sich in einem weiteren Rohr befand. Das Ganze tauchte in ein Glycerinbad. Die bei folgenden Badtemperaturen erhaltenen Destillate wurden bei folgenden Temperaturen klar, während die ursprüngliche Schmelze bei 135° klar wurde.

Bad-temperatur	Temperatur des Klarwerdens
127—130°	132,2°
140—150	133,2
155—160	133,6
165—170	133,7

Ferner wurden 1,5 g des Destillates zwischen 127 – 130° nochmals bei derselben Temperatur destillirt, 0,6 g des Destillates wurden bei 131,2 – 131,6° klar, während der Rückstand bei 134 – 134,4° klar wurde. Schliesslich wurden 0,5 g des letzten Destillates nochmals bei derselben Temperatur destillirt, 0,3 g dieses Destillates wurden bei 128,5° klar, während der Rückstand bei 134° klar wurde.

Wäre eine Verseifung des Esters oder eine andere Zersetzung desselben eingetreten, so wäre aller Wahrscheinlichkeit nach die Temperatur des Klarwerdens sowohl im Destillat als auch im Rückstande erniedrigt worden, ausserdem wären wohl auch die Temperaturen des Klarwerdens der Destillate bei verschiedenen Temperaturen verschiedener ausgefallen, und zwar wäre die Temperatur des Klarwerdens um so mehr gefallen, bei je höherer Temperatur die Destillation von sich ging, auch würden dann die Resultate bei der Destillation im Vacuum und mit Wasserdampf nicht übereinstimmen. Es ist wohl anzunehmen, dass die Erniedrigung der Temperatur des Klar-

werdens um 6,5° bei der Destillation mit überhitztem Wasserdampf durch Befreiung des p-Azoxyanisols vom braunen Stoff verursacht wurde. Bevor man aber betreffs der Natur der sogenannten flüssigen Krystalle zu einem endgültigen Schluss kommt, hätte man noch zu beweisen, dass sich die Temperatur des Klarwerdens der Destillate bei mehrfacher Krystallisation nicht ändert. Es wird das nicht schwierig sein, wenn man die Versuche, die in kleinem Maassstabe angestellt sehr zeitraubend sind (bei 130° destilliren in 12 Stunden 0,3 g p-Azoxyanisol), in grösseren Apparaten ausführt. Sollte es gelingen auf diesem Wege p-Azoxyanisol, das sofort zu einer klaren Flüssigkeit schmilzt, herzustellen, so hätte die künstliche Herstellung von sogenannten flüssigen Krystallen desselben von beliebigen Schmelzpunkten zwischen 118—135° keinerlei Schwierigkeiten.

4. Auch die trübe Schmelze des Cholesterylbenzoats hat O. Lehmann für einen flüssigen Krystall erklärt. Nach den mikroskopischen Befunden O. Lehmann's und anderer, als auch nach dem sonstigen Verhalten des Stoffs, scheinen mir Zweifel an der chemischen Homogenität der untersuchten Präparate nicht zurückzuweisen zu sein. Vor allem differiren die Schmelzpunkte der verschiedenen Präparate sehr erheblich. Reinitzer fand den Schmelzpunkt zu 146,6° und die Trübung der Schmelze verschwand bei 180,6°. G. Quincke sah die Trübung bei seinem von H. Landolt erhaltenen Präparat schon bei 159° verschwinden. Ein Präparat, das aus Cholesterin von E. Merck hergestellt wurde, schmolz bei 145° und wurde zwischen 162—167° klar, indem die Trübung sich, trotz gleichmässiger Badtemperatur, an verschiedenen Stellen verschieden lange erhielt. Die grosse Verschiedenheit in dem Verhalten beim Schmelzen verschiedener Präparate rührt wohl daher, dass mit dem Namen Cholesterin Stoffe verschiedenen Ursprunges: aus der Galle, dem Wollfett etc., bezeichnet werden, die offenbar untereinander nicht identisch sind. Dazu kommt noch, dass das Cholesterin optisch activ ist, also in mehreren schwer zu trennenden Isomeren vorkommen kann. Will man chemisch homogene Stoffe untersuchen, so eignet sich hierzu am wenigsten das Cholesterylbenzoat.

In der Schmelze meines Präparates sieht man bei genügend geringer Dicke der Schicht, bei gekreuzten Nicols und 200facher Ver-

grösserung sehr deutlich helle Sphärokrystalle mit dem schwarzen Kreuz in einer dunklen, also isotropen Flüssigkeit schwimmen. Bilder, die ganz ähnlich sind der Fig. 4, Taf. III[1]), wurden bei dickeren Schichten des Präparates gesehen. Schon G. Quincke[2]) hat in seinem Präparat „helle Stellen auf dunklem Grunde" gesehen. Gegen die Ansicht G. Quincke's, dass es sich hier um Krystalle, die in einer Flüssigkeit schwimmen, handelt, hat sich O. Lehmann[3]) mit der Versicherung, dass die ursprünglichen Krystalle, die beim Erwärmen die trübe Schmelze gaben, vollkommen klar waren, gewandt. Ein klarer Mischkrystall kann aber beim Schmelzen in eine Flüssigkeit und Krystalle anderer Zusammensetzung zerfallen.

Bei dem lebhaften Interesse, das die trüben Schmelzen für sich in Anspruch genommen haben, ist wohl zu erwarten, dass die Frage nach der chemischen Homogenität derselben bald vonseiten derer, die sich bisher mit diesen Flüssigkeiten beschäftigt haben, durch weitere Versuche zum endgültigen Abschluss gebracht werden wird.

1) O. Lehmann, Zeitschr. f. phys. Chem. **4**. p. 189. 1889.
2) G. Quincke, Wied. Ann. **53**. p. 613. 1894.
3) O. Lehmann, Wied. Ann. **56**. p. 774. 1895.

(Eingegangen 27. December 1900.)

7. *Ueber einige Versuche mit Becquerel- und mit Röntgenstrahlen;* *von F. Himstedt.*

(Aus den Ber. d. Naturf. Gesellsch. zu Freiburg i. Br. XI. p. 126. 1900.)

Hr. Giesel hatte die Freundlichkeit, mir eins seiner wirksamen Radiumpräparate zu leihen. Ich habe bei Gelegenheit zweier Vorträge einem grösseren Auditorium mit Hülfe dieses Präparates sehr bequem zeigen können: 1. das Leuchten der Substanz, 2. die Erregung des Baryum-Platinocyanür-Schirmes auch dann, wenn das Radium in eine Schachtel aus 0,5 mm dickem Eisenblech eingeschlossen war[1]), 3. die Erregung der Phosphorescenz von Sidot-Blende sowohl wie von anderen Substanzen, 4. die Einwirkung auf das Elektroskop durch die Wände der Eisenschachtel hindurch auf eine Entfernung von über 5 m, 5. den Einfluss auf die Funkenstrecke einer Elektrisirmaschine. Für diesen Versuch wurde bei einer Voss'schen Influenzmaschine die Funkenstrecke auf ca. 6 cm gestellt und der treibende Motor so regulirt, dass gerade noch Funken übergingen. Brachte man das Radium nun dicht unter die Kugeln der Funkenstrecke, so hörten die Funken auf. Die Wirkung liess sich viel leichter demonstriren, als die Kugel der Kathode, wie dies Elster und Geitel[2]) angegeben haben, durch eine grössere Scheibe ersetzt wurde. Bei einem Scheibendurchmesser von 30 cm konnte man die Maschine so schnell laufen lassen wie überhaupt möglich, wobei in der Secunde 2—3 Funken von 8 cm Länge übersprangen. Sobald das

1) Im Dunkelzimmer, mit gut ausgeruhtem Auge, konnte man die Fluorescenzerregung des Schirmes durch eine 1 cm dicke Bleischicht noch sehr gut sehen.

2) J. Elster u. H. Geitel, Wied. Ann. **69**. p. 673. 1899.

Präparat in die Nähe der Funkenstrecke gebracht wurde, hörten die Funken sofort auf.

Im Gegensatz zu den Herren Elster und Geitel glaube ich bei der Gelegenheit feststellen zu sollen, dass Röntgenstrahlen dieselbe Wirkung hervorbringen können. Mit einer Focusröhre, die durch ein 50 cm-Inductorium mit Wehneltunterbrecher gespeist wurde, habe ich die Wirkung noch bei 4 m Entfernung der Funkenstrecke von der Röhre absolut sicher demonstriren können. Die Röhre war dabei in einen lichtdicht schliessenden Kasten eingeschlossen. Da mir bei diesen Versuchen, welche ich schon im vorigen Sommer in der Vorlesung gezeigt habe, aufgefallen war, dass, wenn die Elektrisirmaschine dicht bei der Röhre stand, sodass die ganze Maschine von kräftigen *X*-Strahlen getroffen wurde, dann stets nach Abstellung des Inductoriums eine gewisse Zeit verging (2—10 Secunden), ehe die Elektrisirmaschine wieder Funken gab, so schien es mir von vornherein sehr unwahrscheinlich, dass, wie die Herren Elster und Geitel vermutet haben, der Mangel an Continuität in der Strahlung der mit einem Inductorium getriebenen Röhre Schuld daran sein sollte, dass die genannten Autoren keine Wirkung der Röntgenstrahlen auf die Funkenstrecke beobachten konnten. Ich habe das Inductorium mit einem Foucaultunterbrecher von zwei Unterbrechungen in der Secunde benutzt, und damit die Wirkung auf die Funkenstrecke stets sicher erhalten. Vielleicht war die von den Herren Elster und Geitel benutzte Röhre nur zu schwach.

Des weiteren habe ich mit dem Giesel'schen Radium die magnetische Ablenkung der Becquerelstrahlen zeigen können, sodass die Erscheinung auf 3 m Entfernung noch gut gesehen werden konnte. Das Präparat lag in einem ganz flachen Bleikästchen von 5 mm Wandstärke, dessen Deckel in der Mitte eine dickwandige Bleiröhre von 1 cm Durchmesser und ca. 5 cm Länge trug. Auf diese, die zwischen den Polen des Elektromagneten hindurchging, wurde der Röntgenschirm gelegt, auf dem dann ein scharf begrenzter kreisrunder Fleck entstand. Beim Schliessen des Stromes im Elektromagneten konnte dieser Fleck vollkommen zum Verschwinden gebracht werden. Beim

langsamen Schwächen des Stromes sah man den Fleck von der Seite her wieder in seine alte Lage kommen.

Man hat, soviel mir bekannt, den Energieaufwand für die beständige Strahlung des Radiums herzuleiten gesucht aus einem langsam verlaufenden chemischen Processe. Es schien mir deshalb von besonderem Interesse, den Einfluss tiefer Temperaturen auf die Radioactivität des Präparates zu untersuchen. Die Herren Hagenbach und Kahlbaum in Basel hatten die Freundlichkeit, die hierzu nötige flüssige Luft herstellen zu lassen und selbst an den Beobachtungen teil zu nehmen. Es konnte keine Abnahme, weder in der Leuchtkraft, noch in der Erregung des Fluorescenzschirmes beobachtet werden. Belichtete Balmain'sche Leuchtfarbe, mit der ein Controlversuch ausgeführt wurde, erschien bei der Temperatur der flüssigen Luft vollkommen dunkel.

Um den Einfluss der Abkühlung auf die Fähigkeit des Radiums, das Elektroskop zu entladen, zu untersuchen, wurde die folgende Anordnung benutzt. Der Knopf eines Exner'schen Elektroskopes war durch einen Draht verbunden mit einer isolirten horizontal aufgestellten Metallplatte von 6 cm Durchmesser. Unter dieser wurde ein in Watte verpacktes Becherglas aufgestellt, in welches das in eine Glasröhre eingeschlossene Radium gebracht werden konnte. Es wurde beobachtet die Zeit, während welcher das Elektroskop von 2000 auf 1000 Volt entladen wurde. Bei Zimmertemperatur gaben hierfür drei Versuche übereinstimmend 31 Secunden. Nachdem jetzt das Becherglas mit flüssiger Luft gefüllt und genügend lange gewartet war, ergaben sich 33, 35, 34, 35 Secunden. Hinterher ergaben die Versuche in Zimmertemperatur wieder 31 Secunden.

Aus dieser Differenz von ca. 3 Secunden, deren thatsächliches Vorhandensein durch eine neue Versuchsreihe festgestellt wurde, darf man jedoch noch nicht den Schluss ziehen, dass die Abkühlung auf eine tiefe Temperatur die Radioactivität entsprechend vermindert hätte. Man darf nicht ausser acht lassen, dass bei der gewählten Versuchsanordnung die Strahlen vom Radium zum Elektroskope das eine Mal durch gasförmige, das zweite Mal durch flüssige Luft gehen, und dass letztere, entsprechend ihrer bedeutend grösseren Dichte, auch stärkere

Absorption hervorrufen kann. Um hiervon unabhängig zu sein, wurde das Becherglas einmal gefüllt mit Alkohol von Zimmertemperatur, das zweite Mal mit Alkohol, der bis an seinen Erstarrungspunkt abgekühlt war. Es ergab sich in beiden Fällen die gleiche Entladungsdauer von 36 Secunden. Dieselben Versuche sind wiederholt, immer mit dem gleichen Erfolge angestellt, indem die Abkühlung durch feste CO_2 in Aether bewirkt wurde.[1])

Es ist bekannt, dass, wenn man das Präparat, in lichtdichtes Papier eingeschlossen, auf das im Dunkelzimmer gut ausgeruhte geschlossene Auge legt, man eine Lichtempfindung wahrnimmt, bei der man das Gefühl hat, als sei das ganze Auge mit Licht erfüllt. Ueberraschend ist dabei, wie schnell das Auge für diese Lichtempfindung ermüdet. Ich habe mir zwei ganz gleiche Päckchen aus lichtdichtem Papier hergestellt, das eine mit dem Radium, das andere mit einer entsprechenden Menge Sand gefüllt. Legt man einem Menschen mehrmals hintereinander auf die beiden Augen die beiden Päckchen, sie ohne sein Wissen wiederholt vertauschend, so sind manche Menschen nach 10—15 maliger Wiederholung des Versuches wohl noch im stande anzugeben, dass sie eine Lichtempfindung haben, vermögen aber nicht mehr anzugeben, auf welchem Auge das wirksame Päckchen mit dem Radium liegt. Nach etwa 30 maliger Wiederholung des Versuches vermag nach meiner Erfahrung kein Mensch mehr anzugeben, auf welches Auge das Radium, auf welches der Sand gelegt ist. Man wird zur Erklärung der Lichtempfindung jawohl annehmen müssen, dass die Netzhaut oder auch die Linse bez. der Glaskörper des Auges zur Fluorescenz erregt wird[2]), vielleicht ist die erwähnte schnelle Ermüdung daraus zu erklären, dass die Fluorescenz nicht momentan verschwindet, und deshalb die Contraste geringer werden.

---

1) Kurze Zeit nachdem die Versuche am 27. März abgeschlossen waren, erfuhren wir, dass Hr. und Frau Curie schon vor uns ähnliche Versuche mit dem gleichen Erfolge ausgeführt hatten.

2) Ueber diesbezügliche Versuche mit Becquerel- und mit Röntgenstrahlen, die ich inzwischen zusammen mit Hrn. Nagel angestellt habe, soll in Kürze berichtet werden.

Da die Becquerelstrahlen durch undurchsichtige Substanzen hindurchgehen, so war es von vornherein sehr wahrscheinlich, dass Blinde, deren Sehvermögen dadurch verloren gegangen ist, dass die Hornhaut oder die Linse des Auges getrübt ist, trotzdem unter der Einwirkung der Becquerelstrahlen eine Lichtempfindung haben würden. Versuche an einer grösseren Anzahl von Personen haben dies durchaus bestätigt.

Zum Schlusse möchte ich noch erwähnen, dass es mir nicht gelungen ist, irgend eine Wirkung des Radiums auf den Cohärer nachzuweisen, dagegen habe ich ohne Schwierigkeiten zeigen können, dass der Widerstand der Selenzelle durch die Einwirkung der Becquerelstrahlen herabgesetzt wird. Bei diesen Versuchen war das Radium in eine mehrfache Hülle lichtdichten photographischen Papieres eingeschlossen, bei einigen Versuchen befand es sich auch in einer Eisenschachtel von 0,5 mm Wandstärke, sodass die Wirkung sichtbarer Strahlen mit voller Sicherheit ausgeschlossen war. Es wurde hierauf mit grosser Sorgfalt geachtet, weil durch Vorversuche festgestellt war, dass alle phosphorescirenden Substanzen den Widerstand der Selenzelle bei directer Bestrahlung herabzusetzen vermögen, durch lichtdichtes Papier hindurch jedoch keinerlei Wirkung ausüben. Die Widerstandsverminderung der Selenzelle durch das Radium betrug, wenn letzteres durch eine doppelte Hülle lichtdichten Papiers und eine ca. 1 cm dicke Luftschicht hindurch wirkte, ca. 1 Proc. und liess sich mit der Wheatstone'schen Brücke sehr sicher messen.

Ich habe bei dieser Gelegenheit dann weiter constatirt, dass Röntgenstrahlen sehr energisch auf die Selenzelle wirken. Ich konnte den Widerstand der Zelle durch Röntgenstrahlen um mehr als 50 Proc. vermindern. Ich hoffe, dass sich hieraus eine Methode ergeben wird, welche in bequemer Weise die Intensität der Röntgenstrahlen zu messen, resp. die Strahlung verschiedener Röhren unter verschiedenen Umständen zu vergleichen gestattet. Ebenso wie die Röntgenstrahlen vermögen nach meinen Versuchen aber auch die ultravioletten Strahlen den Widerstand der Selenzelle zu verkleinern, dagegen nicht die ultraroten Strahlen. Es liegt bei der übereinstimmenden Wirkung der ultravioletten, der Röntgen- und der Becquerel-

strahlen die Vermutung nahe, dass die Widerstandsverminderung des Selens eine indirecte sei, indem direct durch die Wirkung jener Strahlen eine Fluorescenz oder Phosphorescenz des Selens hervorgerufen werde, und dieses dann erst sozusagen unter der Wirkung seiner eigenen Strahlen seinen Widerstand ändere. Ich habe jedoch auch bei den sorgfältigsten Beobachtungen im Dunkelzimmer keine Fluorescenz oder Phosphorescenz des Selens beobachten können.

Freiburg i. Br., 15. April 1900.

(Eingegangen 7. Januar 1901.)

8. *Ueber die Einwirkung der Becquerel- und der Röntgenstrahlen auf das Auge; von F. Himstedt und W. A. Nagel.*

(Aus den Ber. d. Naturf. Gesellsch. in Freiburg i. B. XI. p. 139. 1901.)

Hr. Giesel[1]) hat zuerst darauf aufmerksam gemacht, dass, wenn man ein Radiumpräparat, in lichtdichtes Papier eingeschlossen, auf das Auge legt, man die Empfindung hat, als sei das ganze Auge mit schwachem Licht angefüllt. Als wir Gelegenheit hatten, mit einem besonders wirksamen Präparate, das Hr. Giesel dem einen von uns freundlichst geliehen hatte, diesen interessanten Versuch zu wiederholen, schien es uns der Mühe wert, näher zu untersuchen, in welcher Weise diese Wirkung zu stande kommt.

Verschiedene Möglichkeiten mussten in Betracht gezogen werden. Es konnte sich um directe Erregung des Sehnerven bez. seiner Endausbreitung im Auge handeln; da die Becquerelstrahlen bekanntlich Knochen und Weichteile durchdringen, steht ihnen der Weg zum Sehnerven ja auch frei, wenn das sie aussendende Radiumpräparat seitlich *neben* das Auge gehalten wird. Da die Becquerelstrahlen aber auch im stande sind, in den verschiedensten Substanzen Fluorescenz zu erregen, war zu erwägen, inwieweit dieser Umstand ihre „Sichtbarkeit" bedingen konnte. Endlich musste auch daran gedacht werden, ob nicht die Lichtempfindung auf dem Umweg über eine Erregung des Ciliarmuskels, also durch Erzeugung des Accommodationsphosphens, zu stande komme. So unwahrscheinlich dies von vornherein war, musste doch bei einer Substanz von so eigentümlicher physikalischer Wirkung, wie sie das Radium zeigt, auch an die Möglichkeit aussergewöhnlicher physiologischer Wirkungen gedacht werden. An das Accommodationsphosphen zu denken, lag um so näher, als bei Auflegen des Radiums auf die geschlossenen Augenlider thatsächlich die Lichtempfindung

1) F. Giesel, Naturforscherversammlung München 1899.

an den Grenzen des Gesichtsfeldes stärker ist, als in dessen Mitte. Da indessen die Lichtempfindung nach Auflegen des Präparates längere Zeit bestehen bleibt, auch von einer Erregungswirkung anderen glatten Muskeln gegenüber nichts zu bemerken ist, konnte von der Heranziehung des Accommodationsphosphens zur Erklärung der Reizwirkung füglich abgesehen werden. Auch für die Annahme einer directen Erregung des Sehnerven lag kein Anhalt vor; die sensiblen Nerven der Haut werden von den Becquerelstrahlen jedenfalls nicht erregt. Um so mehr sprechen jedoch die Thatsachen für die zweite der erwähnten Möglichkeiten, nämlich für die Auslösung der Lichtempfindung durch Fluorescenzerregung im Auge. Eine solche beobachteten wir in der That an den Augen von Hund, Katze und Frosch.

Bei diesen Versuchen haben wir das Präparat in ein Metallkästchen eingeschlossen, dessen Deckel eine 1 cm grosse Oeffnung besass, die mit schwarzem photographischen Papier doppelt beklebt war. Auf dieses Papier wurden die einzelnen Teile der Augen gelegt. Im Dunkelzimmer mit gut adaptirtem Auge liess sich nun sehr deutlich erkennen, dass alle Teile des Auges, Hornhaut, Linse, Glaskörper, Retina, fluorescirten, und zwar nach unserer Schätzung angenähert gleich stark. Aus diesem Umstande, dass alle Teile des Auges zur Fluorescenz kommen, erklärt sich offenbar in sehr einfacher Weise, dass man nur eine ganz unbestimmte Lichtempfindung hat und man nicht im stande ist, auf einem bestimmten Teile des Gesichtsfeldes einen auch nur annähernd scharf abgegrenzten Lichteindruck hervorzurufen. Bringt man zwischen das Präparat und das Auge eine Bleiplatte von 1 cm Dicke, durch welche hindurch die Strahlen nicht mehr wahrnehmbar auf das Auge wirken, und bringt in dieser Platte verschieden geformte Oeffnungen an, etwa ein kleines rundes Loch oder einen schmalen Spalt oder ein Kreuz, so ist in allen Fällen die Wirkung auf das Auge die gleiche. Man ist ganz ausser stande, die Gestalt der benutzten Oeffnung zu erkennen, man hat stets nur die Empfindung, als sei das ganze Auge voll Licht, sofern nur die Oeffnung in der Bleiplatte genügend gross ist, um eine zur Erregung überhaupt ausreichende Einwirkung des Radiums zu gestatten.

Es geht hieraus hervor, dass, wenn eine directe Erregung des Sehepithels durch die Strahlen überhaupt erfolgt, diese jedenfalls ganz bedeutend zurücktreten muss hinter der indirecten Erregung von seiten der durch den Einfluss des Radiums selbstleuchtend gewordenen dioptrischen Medien, Linse und Glaskörper. Diese Fluorescenz muss, wie sich zugleich ergiebt, auch an Wirksamkeit diejenige der Netzhaut übertreffen (die ja nachweislich auch vorhanden ist).

Auffallend und bisher unerklärt ist die folgende Thatsache. Hält man das Radiumpräparat auf der temporalen Seite gegen das Auge, so hat man in ausgesprochenster Weise das Maximum der Lichtempfindung auf der temporalen Seite des Gesichtsfeldes, mit anderen Worten: man hat den Eindruck, als ob sich ungefähr in der Gegend, wo das Radiumpräparat liegt, eine Lichtquelle befände. Wir kommen auf diese eigentümliche Thatsache, die sich auch bei Einwirkung von Röntgenstrahlen beobachten lässt, weiter unten zurück.

Eine ganz ähnliche Empfindung wie bei dem Auflegen von Radium auf das Auge hat man, wenn ultraviolette Strahlen in dasselbe fallen. Wir haben, um die Wirkungen dieser beiden Strahlenarten miteinander vergleichen zu können, genau dieselben Versuche wie mit Becquerelstrahlen auch mit ultravioletten Strahlen ausgeführt. Um solche möglichst rein, d. h. möglichst frei von beigemischtem diffusem sichtbarem Lichte zu erhalten, wurde folgende im wesentlichen schon von Helmholtz[1]) benutzte Anordnung getroffen. Das aus dem 2 mm breiten Spalte einer elektrischen Projectionslampe, die mit Quarzlinse versehen, austretende Lichtbündel wird durch ein erstes Quarzprisma geschickt und das entstehende Spectrum auf der Wand eines schwarzen, lichtdicht geschlossenen Digestoriums, in welchem die Bogenlampe aufgestellt war, aufgefangen. Ein 5 mm breiter Spalt lässt einen Teil des ultravioletten Spectrums austreten, der mittels Quarzlinse auf ein zweites Quarzprisma geworfen wird. Das von diesem Prisma gelieferte Spectrum zeigt noch ein gut sichtbares Farbenband, herrührend von dem Eigenlichte, das vom ersten Prisma durch den Spalt getreten ist. Es wurde wieder das sichtbare Spectrum zurück-

1) H. v. Helmholtz, Pogg. Ann. **94.** p. 205. 1855.

gehalten und durch einen 5 mm-Spalt wieder nur ein Teil des ultravioletten Spectrums hindurchgelassen. Wurden diese Strahlen jetzt wieder mit Hülfe einer Quarzlinse durch ein drittes Quarzprisma hindurch geschickt, so waren in dem aufgefangenen Spectrum soeben noch Farben zu erkennen. Es wurde abermals das sichtbare Spectrum abgeblendet und durch einen 5 mm-Spalt ein Teil des ultravioletten hindurchgelassen. Diese Strahlen fielen auf einen in 1 m Entfernung vom letzten Spalte aufgestellten Silberspiegel, welcher unter 45° geneigt, die Strahlen so reflectirte, dass sie durch eine Spaltöffnung in einen Kasten einfielen. Der Beobachter konnte von der Rückseite her seinen Kopf in diesen Kasten hineinstecken und durch ein übergedecktes Tuch gegen alles seitliche Licht schützen. Die ganze Aufstellung befand sich natürlich im Dunkelzimmer. Trotz dieser wiederholten Dispersion mit Hülfe von den Quarzprismen ist es uns nicht gelungen, alle sichtbaren Strahlen zu beseitigen. Das Auge des Beobachters konnte, durch den Spalt des Kastens nach dem Spiegel sehend, in diesem die eine Fläche des schwach leuchtenden letzten Prismas erkennen, hatte aber ausserdem den Eindruck, dass noch anderes Licht im Auge sei. Dass es sich hier um zwei verschiedene Arten von Lichtwirkung im Auge handelt, liess sich deutlich zur Anschauung bringen, indem eine 3 mm dicke Glasplatte vor den Spalt des Digestoriums gehalten wurde. Das Sehen des sichtbare Strahlen aussendenden Prismas wurde dadurch in keiner Weise geändert, während die unbestimmte Empfindung des das ganze Auge erfüllenden Lichtes sofort aufhörte. Wir gewannen aus diesen Versuchen die Ueberzeugung, dass die ultravioletten Strahlen in derselben Weise auf die Augenmedien wirken müssen wie die Becquerelstrahlen, d. h. dadurch, dass sie durch Fluorescenzerregung in Linse und Glaskörper eine diffuse Lichtquelle im Auge selbst schaffen. Dass daneben die ultravioletten Strahlen möglicherweise noch auf anderem Wege Lichtempfindung auslösen, sei es durch Fluorescenzerregung in der Netzhaut oder durch directe Erregung des Sehepithels, soll nicht bestritten werden. Das erstere ist sogar recht wahrscheinlich, da die isolirte Netzhaut von Tieraugen, wie wir in sogleich näher zu beschreibenden Versuchen festgestellt haben, thatsächlich fluorescirt. Dafür aber, dass die ultravioletten Strahlen das Seh-

epithel, Stäbchen bez. Zapfen *direct* erregen, kennen wir keinen hinreichenden Beweis. Um wieder die Wirkung der ultravioletten Strahlen auf die einzelnen Teile des Auges untersuchen zu können, wurde in der vorhin beschriebenen Versuchsanordnung der Silberspiegel so gedreht, dass die auf ihn treffenden Strahlen vertical nach unten durch eine Spaltöffnung in den Holzkasten einfielen. Der Beobachter steckte wieder den Kopf, mit dem Tuche umhüllt, in den Kasten und konnte so, ganz frei von allen Störungen, das Präparat beobachten, das auf eine Unterlage von schwarzem photographischen Papier gelegt wurde.[1])

Es zeigte sich, dass genau wie bei den Becquerelstrahlen alle einzelnen Teile des Auges zur Fluorescenz erregt wurden, und zwar schien es uns, als ob die Linse am stärksten fluorescirte, jedoch dürften quantitative Angaben hier sehr schwer sein, da Volumen und Grösse der Oberfläche bei den einzelnen Teilen sehr verschieden sind und deshalb das subjective Urteil stark beeinflussen können.

Es lag jetzt nahe, mit der Wirkung dieser beiden Arten von „unsichtbaren“ Strahlen, die der Röntgenstrahlen zu vergleichen. Die Röntgenröhre, mit einem Funkeninductor von 50 cm Schlagweite und Wehneltunterbrecher getrieben, lieferte überaus kräftige Strahlen und war eingeschlossen in einen vollkommen lichtdicht schliessenden Holzkasten. Vor denselben wurden vier aufeinander gelegte Bleiplatten je von 2 mm Dicke gestellt, die eine Oeffnung von 2 cm Durchmesser hatten, vor welche das Auge gebracht werden konnte.

Wir waren überrascht von der Wirkung auf unsere Augen. Der Effect der Röntgenstrahlen ist dem der Becquerelstrahlen,

---

1) H. v. Helmholtz schreibt über seine diesbezüglichen Versuche (Pogg. Ann. **94**. p. 210. 1855): „Hier (nämlich im ultravioletten Teile des Spectrums) zeigte nun auch die Netzhaut, zwischen zwei Glastafeln gelegt, ihre Fluorescenz deutlich, schwächer zwar als Papier, Leinwand und Elfenbein, aber stärker als Porzellan.“ Es muss nach unseren Erfahrungen ausserordentlich schwer gewesen sein, bei der zwischen Glasplatten liegenden Netzhaut mit Sicherheit die Fluorescenz festzustellen, denn Glas absorbirt diese Strahlen sehr stark und zeigt nach unseren Beobachtungen bedeutend stärkere Fluorescenz als die Netzhaut. Wir haben ganz sichere Beobachtungen erst dann machen können, als wir alle Präparate auf schwarzes photographisches Papier legten.

wenn keine complicirenden Bedingungen in den Versuch eingeführt werden, zunächst sehr ähnlich: in beiden Fällen die starke Erhellung der Gesichtsfeldperipherie, die Lichtempfindung qualitativ übereinstimmend und hier wie dort der zwingende Eindruck grösster Helligkeit auf jener Seite des Auges, auf welcher sich thatsächlich der Entstehungsort der erregenden Strahlen befindet. Bei der hohen Unterbrechungsfrequenz des Wehnelt'schen Unterbrechers war natürlich auch die durch die Röntgenstrahlen erzeugte Empfindung eine stetige.

Genauere Untersuchung ergab jedoch sofort einen wesentlichen Unterschied in der Wirkungsweise beider Strahlengattungen.

Als wir die oben erwähnten Bleiplatten mit verschieden geformten Oeffnungen vor das Auge hielten, hatten wir nicht mehr die Empfindung, als sei das ganze Auge voll Licht, sondern wir nahmen bei richtiger Haltung der Platten im Auge wahr: einen runden hellen Fleck bei Platte *I* (die eine Bohrung von 1,5 mm Durchmesser hatte), eine helle horizontale oder verticale Linie bei Platte *II* (je nachdem wir den Spalt horizontal oder vertical hielten), ein hellleuchtendes Kreuz bei Platte *III*. Wir konnten weiter durch Bewegung der Platten mit vollster Sicherheit constatiren, dass der Lichtreiz nur da entstand, wo die Retina von den Röntgenstrahlen getroffen wurde. Hielt man den Schirm mit der kleinen runden Oeffnung so, dass die Strahlen in der Richtung *I* (vgl. die Fig. 1) in das Auge einfielen, dessen Retina durch *a b c* angedeutet sein soll, so sah man nur einen hellen Fleck. Fielen die Strahlen in der Richtung *II* ein, so entstanden zwei helle Flecke, rechts bei *c* und links bei *a*. Fielen endlich die Strahlen wie *III* ein, sodass sie die Retina sozusagen tangential trafen, so hatte man eine helle Linie im Auge. Entsprechende Versuche haben wir mit der kreuzförmigen Oeffnung angestellt und stets genau diejenige leuchtende Figur erhalten, die sich durch geometrische Construction vorher bestimmen liess.

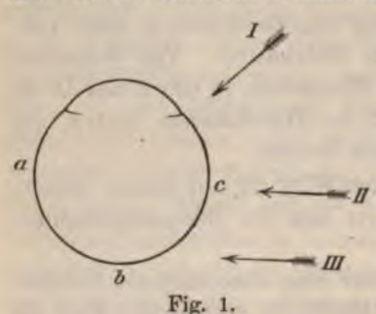


Fig. 1.

Als wir diese Versuche anstellten, die sich ganz naturgemäss an die mit den Becquerel- und den ultravioletten Strahlen anschlossen, hatten wir übersehen, dass ganz ähnliche Versuche schon vor uns von Dorn und Brandes[1]), sowie von Röntgen selbst ausgeführt waren. Wir haben so erst nachträglich gesehen, dass wir durch die vorstehenden Beobachtungen nur die Versuche der genannten Forscher wiederholt und bestätigt haben. Letzteres verdient besonders hervorgehoben zu werden, da, wie wir ebenfalls erst nachträglich gesehen haben, die Beobachtungen Dorn's von anderer Seite[2]) angezweifelt worden sind.

Wir haben vorhin schon erwähnt, dass bei seitlicher Bestrahlung des Auges mit Röntgen- oder Becquerelstrahlen die grösste Helligkeit auf *der* Seite empfunden wird, auf welcher sich die Röntgenröhre bez. das Radiumpräparat thatsächlich befindet. Dies ist sehr auffallend. Treten Röntgenstrahlen beispielsweise in das rechte Auge von der temporalen Seite und in frontaler Richtung ein, so durchsetzen sie zuerst die temporalen Teile der Netzhautperipherie, dann den Glaskörper und schliesslich den nasalen Teil der Netzhaut. Da nun Erregung des temporalen Netzhautbezirkes eine Lichtempfindung bewirkt, die wir durch den Knotenpunkt nach aussen projiciren, also nasal (im vorliegenden Falle nach links hin) sehen, und da andererseits die Strahlen beim Passiren des Glaskörpers eine zwar geringe, aber immerhin nachweisbare Absorption erfahren, wäre zu erwarten, dass wir die grösste Helligkeit nasal, also links sehen, entsprechend dem gereizten temporalen Netzhautbezirk. Da nun, wie erwähnt, das Gegenteil der Fall ist, mussten wir an die Möglichkeit denken, dass die abnorme Einfallsrichtung der Strahlen von Bedeutung sei, indem Strahlen, die von der Sclera her in die Netzhaut fallen, etwa minder stark erregend wirken, als solche von normaler Einfallsrichtung, die vom Glaskörper aus in die Netzhaut treten. Diese Erklärung war indessen sofort abzulehnen auf Grund der Thatsache, dass die genannte genauere Erscheinung auch bei Einwirkung der Becquerelstrahlen zu beobachten ist. Bei diesen

1) E. Dorn u. G. Brandes, Wied. Ann. **60.** p. 478. 1897; E. Dorn, Wied. Ann. **64.** p. 620. 1897 und **66.** p. 1171. 1898.

2) v. Cowl u. Levy-Dorn, Archiv für Physiologie 1897.

liegt ja, wie erwähnt, kein Grund zur Annahme directer Netzhautreizung vor, die Lichtempfindung ist vielmehr Folge der Fluorescenz des Glaskörpers; diese ist nun wohl zweifellos intensiver auf der dem Radium zugekehrten Seite, es müsste also auch die gleichseitige Netzhautseite intensiveres Licht (und zwar von normaler Einfallsrichtung) bekommen. Trotzdem ist der subjective Eindruck der umgekehrte.

Wir versuchten nun, durch circumskripte Reizung einzelner Netzhautpartien der Sache auf den Grund zu kommen. Hält man neben das Auge eine dicke Bleiplatte mit einem Loch von einigen Millimeter Durchmesser und lässt durch dieses Röntgenstrahlen durchtreten, so kann man, wie oben beschrieben, ein fast parallelstrahliges Büschel quer durch das Auge treten lassen. Die beiden kreisförmigen hellen Scheiben, die man nun als Erfolg des zweimaligen Durchtritts durch die Netzhaut sieht, sind ungleich hell, und zwar ist bei diesem Versuch, wie theoretisch zu construiren, der nasal liegende Fleck heller als der temporale. Dies Ergebnis ist leicht begreiflich: das die Temporalseite des Auges treffende Strahlenbündel reizt beim Passiren der Netzhaut diese stärker, als wenn es nach dem Durchdringen des Glaskörpers etwas abgeschwächt die Netzhaut zum zweiten Male passirt. Verschoben wir die Bleiplatte neben dem Auge, so konnten wir successive die einzelnen Partien der Netzhaut isolirt reizen, fanden aber überall das gleiche Verhalten: stärkere Reizwirkung auf der der Röhre zugewendeten Netzhautseite. Dieser Versuch giebt also für die erwähnte paradoxe Localisation der Stelle grösster Helligkeit bei freier Einwirkung der Röntgenstrahlen (ohne Bleidiaphragmen) nicht nur keine Erklärung, sondern macht sie eher noch rätselhafter.

Eine Reihe weiterer Versuche stellten wir nun zur Aufklärung über das Wesen der Reizwirkung der Röntgenstrahlen an. Zunächst prüften wir, ob bei den einzelnen Teilen von Tieraugen Fluorescenz nachweisbar sei.

Der Kasten mit der Röntgenröhre wurde so aufgestellt, dass die Röntgenstrahlen durch die Oeffnung in dem erwähnten 8 mm dicken Bleischirm hindurch senkrecht von oben in einen Pappkasten hineinfielen, auf dessen Boden die Präparate gelegt werden konnten. Der Beobachter blickte von der Seite in den

Kasten hinein. Weder bei der Hornhaut, noch bei Glaskörper oder Linse konnten wir eine Spur von Fluorescenz wahrnehmen (was nach der Möglichkeit so scharf umgrenzter Netzhautreizung auch nicht zu erwarten war).

Bei der Netzhaut glauben wir eine Spur von Fluorescenz, an der Grenze der Wahrnehmbarkeit liegend, beobachtet zu haben.[1]) Purpurhaltige Netzhäute fluorescirten ebenso schwach. Wir haben auch darauf geachtet, ob das lebende menschliche Auge fluorescirt, jedoch mit gänzlich negativem Erfolg. Das beobachtete Auge wurde dabei der lichtdicht eingeschlossenen Röntgenröhre möglichst genähert, sodass die Strahlen seitlich einfielen. Der Beobachter, durch dicke Bleiplatten gegen die Röntgenstrahlen geschützt, sah in das bestrahlte Auge hinein; doch selbst bei guter Dunkeladaptation war, wie gesagt, kein Fluorescenzschimmer sichtbar.

Es wäre natürlich voreilig, wollte man hieraus den Schluss ziehen, bei der Wahrnehmung der Röntgenstrahlen im menschlichen Auge spiele die Fluorescenz der Netzhaut nicht mit. Bedenkt man, wie ausserordentlich nahe die eventuell fluorescirenden Teile den percipirenden Teilen, Stäbchen und Zapfen liegen müssen (wofern nicht gar diese selbst fluoresciren), so ist ohne weiteres klar, dass eine so geringe Intensität der Fluorescenz subjectiv wahrgenommen werden könnte, die objectiv an der Netzhaut des intacten menschlichen Auges nicht erkennbar ist, zumal bei den doch immerhin ungünstigen Bedingungen der Untersuchung im letzteren Falle.

Das eine kann jedenfalls mit voller Bestimmtheit gesagt werden, dass sowohl die Wahrnehmung der Röntgenstrahlen, wie auch der Becquerelstrahlen und des ultravioletten Lichtes ganz überwiegend, wo nicht ausschliesslich mittels der *Stäbchen* der Netzhaut erfolgt. Dabei mag es, wie gesagt, unentschieden bleiben, ob diese von jenen Strahlen direct erregt werden, oder ob sich dazwischen eine Fluorescenzerregung einschieben muss. Auf die Stäbchenerregung weist schon die Qualität der Lichtempfindung hin, die genau mit derjenigen des Dämmerungssehens übereinstimmt. Ferner ist Dunkel-

---

1) E. Dorn u. G. Brandes, Wied. Ann. **60**. p. 488. 1897 haben eine solche nicht beobachten können.

adaptation Voraussetzung für irgend welche Reizwirkung der in Rede stehenden drei Strahlengattungen. Das helladaptirte (auch nur an mittlere Tageshelligkeit adaptirte) Auge wird durch sie nicht erregt. Bezeichnend ist auch die rasche Ermüdung; die Intensität der Lichtempfindung unter der Einwirkung von Röntgen- oder Becquerelstrahlen lässt schon nach kurzer Zeit merklich nach. Wichtig ist endlich der verschiedene Grad von Erregbarkeit in den einzelnen Netzhautpartien, die starke Helligkeitsempfindung in der Netzhautperipherie, die geringe Erregbarkeit der centralen Partien. Diesen Unterschied bringt man sich am deutlichsten zur Anschauung, indem man, wie oben beschrieben, durch Bleidiaphragmen ein schmales Strahlenbüschel (von Röntgenstrahlen) ausschneidet und mit diesen successive die einzelnen Regionen der gut dunkeladaptirten Netzhaut „abtastet". Es lag nahe, zu versuchen, ob die Fovea centralis als ein nur Zapfen, aber keine Stäbchen enthaltender Netzhautteil durch Röntgenstrahlen reizbar sei. Volle Klarheit hierüber haben wir nicht erreicht, da der Ausführung eines einwandfreien Versuches sich grosse praktische Schwierigkeiten entgegenstellen; mit einem Strahlenbüschel von so kleinem Querschnitt, wie er dem Durchmesser der Fovea centralis entsprechen würde, ist sehr unbequem zu experimentiren.

Lässt man aber die Röntgenstrahlen durch ein in der einen Dimension ausgedehnteres Bleidiaphragma, also durch einen schmalen Schlitz in der Bleiplatte ins Auge treten, so ist die Beobachtung in anderer Hinsicht unzuverlässig. Betrachtet man gleichzeitig, während die Röntgenstrahlen durch den Schlitz hindurch einen schmalen Streifen der Netzhaut reizen, ein kleines dunkelrotglühendes Fixirzeichen (Platindrahtschlinge), so kann man es leicht dahin bringen, dass der Lichtstreif durch den Fixirpunkt geht. Man sieht (übrigens auch, wenn das Fixirzeichen beseitigt wird) deutlich, dass der Lichtstreifen im Centrum des Gesichtsfeldes bedeutend weniger hell ist als in der Peripherie, aber eine wirkliche Unterbrechung am Fixirpunkt ist nicht mit Sicherheit zu erkennen.

Dabei ist aber zu bedenken, dass genau das gleiche auch bei andersartigem Lichtreize gilt. Betrachtet man im Dunkelzimmer einen Lichtstreifen, dessen Helligkeit sicher unter der fovealen Schwelle liegt, so ist der Eindruck genau so, wie eben

an dem durch Röntgenstrahlen erzeugten Lichtstreif beschrieben: an der Stelle des Fixirpunktes ist keine Unterbrechung des Streifens zu sehen, sondern nur wie bei dem Versuch mit Röntgenstrahlen eine Schwächung. Es beruht dies auf der Ergänzung unterbrochener Linien, die unser Auge ja bekanntlich auch unter anderen Umständen auszuführen im stande ist.

Einen strengen Beweis dafür, dass die Zapfen unfähig sind, durch Röntgenstrahlen erregt zu werden, können wir also nicht geben; sicherlich tritt aber ihre Erregung, wenn überhaupt vorhanden, hinter der Stäbchenerregung ganz bedeutend zurück.[1])

Wir haben auch untersucht, ob durch Röntgenstrahlen eine Bleichung des Sehpurpurs in Frosch- und Fischnetzhäuten nachweislich erfolgt, erhielten aber trotz der sehr starken Wirksamkeit der verwendeten Röhre und einer eine Stunde dauernden Einwirkung kein anderes Resultat, als seiner Zeit Fuchs und Kreidl[2]), d. h. ein negatives. Das ist keineswegs überraschend und steht durchaus nicht in Widerspruch mit den Thatsachen der Stäbchenerregung durch die Strahlen. Wir haben purpurhaltige Froschnetzhäute eine Stunde lang einem (gemischten) Licht ausgesetzt, dessen Intensität sogar merklich über der Schwelle des fovealen Sehens lag. Es war keine Purpurbleichung eingetreten, wie der Vergleich mit einigen zur Controle vollkommen verdunkelt gehaltenen Netzhäuten zeigte.

Endlich ist es uns auch gelungen, einen rein objectiven Beweis für die Wirkung der Röntgenstrahlen auf das Auge zu erbringen. Wir haben hierzu die von Holmgren zuerst ausführlich untersuchten Actionsströme des Froschauges benutzt.

---

1) Wir sind erst nachträglich darauf aufmerksam geworden, dass Hr. Dorn in ganz ähnlicher Weise versucht hat festzustellen, ob die Reizung durch *X*-Strahlen in der macula lutea ausbleibt oder nicht. Nach den Untersuchungen von v. Kries und Nagel (Zeitschr. f. Psychologie und Physiologie der Sinnesorgane **23.** p. 161. 1900) ist aber die macula lutea sicher nicht in ihrer ganzen Ausdehnung adaptationsfrei, und es lässt sich deshalb unseres Erachtens aus diesen Versuchen des Hrn. Dorn kein Aufschluss erwarten darüber, ob die Zapfen durch Röntgenstrahlen erregt werden können oder nicht.

2) Fuchs u. Kreidl, Centralbl. f. Physiologie **10.** Nr. 9. Vgl. auch Gatti, l. c. **11.** Nr. 15; E. Dorn u. G. Brandes, Wied. Ann. **60.** p. 490. 1897.

Legt man an die vordere und an die hintere Bulbushälfte eines dunkel adaptirten Auges je eine unpolarisirbare Elektrode, am besten eine sogenannte Thonelektrode in Schreibfederform, so beobachtet man in einem mit den Elektroden verbundenen Schliessungskreise einen Strom, der bei den benutzten Froschaugen im Drahte stets von der vorderen zur hinteren Bulbushälfte fliesst, wie zuerst Du Bois-Reymond[1]) gefunden hat. Der Strom nimmt in den ersten Minuten nach dem Tode des Frosches ziemlich schnell ab, nachher wird die Abnahme immer geringer und verläuft mehrere Stunden lang so regelmässig, dass man bei graphischer Darstellung vollkommen regelmässige Curven erhält. Wir haben nach dem Compensationsverfahren von Du Bois-Reymond die auftretenden elektromotorischen Kräfte bestimmt und gefunden, dass bei Fröschen, die vor der Tötung 2—3 Stunden im Dunkeln gewesen waren, deren Augen bei schwachem roten Lichte herauspräparirt und an die Elektroden gelegt, dann aber sofort wieder in einen lichtdicht verschlossenen Kasten gebracht waren, diese elektromotorische Kraft zwischen 0,056 und 0,0172 Volt betrug. Während der Dauer eines Versuches, die zwischen 1 und 2 Stunden variirte, trocknete das Präparat etwas ein und vergrösserte dadurch auch in messbarer Weise seinen Widerstand. Um hiervon unabhängig zu sein, haben wir alle Beobachtungen nach der Compensationsmethode ausgeführt. Nebenstehende Fig. 2 giebt das Schema der Versuchsanordnung.

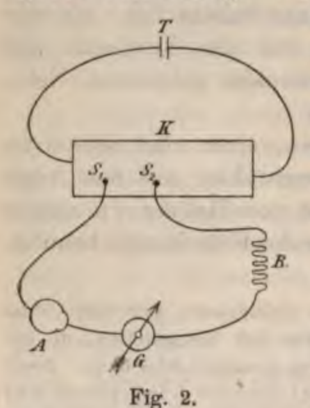


Fig. 2.

T war ein Accumulator, *K* ein Widerstandskasten von im ganzen 40000 Ohm. Durch Versetzen des Stöpsels S_{II} wurde diejenige Potentialdifferenz aufgesucht, welche der im Auge *A* auftretenden das Gleichgewicht hielt. *G* war ein hochempfindliches d'Arsonvalgalvanometer, *R* ein Zusatzwiderstand, der zwischen 10000

1) Du Bois-Reymond, Untersuchungen über tier. Elektricität (I) 2. p. 256. Berlin 1849.

1 100000 Ohm variirt werden konnte. In Fig. 2 nicht :eichnet sind zwei Stromwender, von denen der eine vor dem cumulator *T*, der zweite vor dem Galvanometer *G* lag.

Hat man die elektromotorische Kraft eines im Dunkeln indlichen Präparates compensirt und lässt jetzt Licht in s Auge fallen, so erhält man einen Ausschlag, der eine Ver-isserung der ursprünglich vorhandenen elektromotorischen aft anzeigt. Das Anwachsen der elektromotorischen Kraft an 10—60 Secunden dauern, dann findet trotz fortgesetzter lichtung wieder eine Abnahme statt. Wird in diesem Augen-cke die Belichtung unterbrochen, so tritt momentan eine

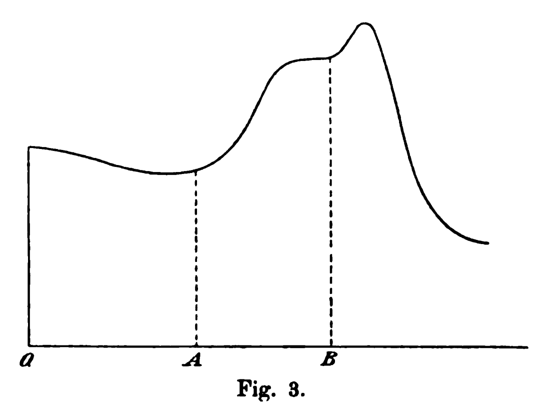


Fig. 3.

ermalige Vergrösserung der elektromotorischen Kraft ein, an ein schnelles Zurückgehen auf den der Dunkelheit ent-'echenden Wert. Wenn wir als Abscissen die Zeit, als dinaten die Grössen der elektromotorischen Kräfte auftragen, giebt die vorstehende Curve (Fig. 3) den typischen Verlauf eines rsuches, wie er übrigens schon von Holmgren beobachtet

Von *O* bis *A* befindet sich das Präparat im Dunkeln, ı *A* bis *B* fällt Licht darauf, im Augenblick *B* wird wieder 'dunkelt.

Um untersuchen zu können, ob die Röntgenstrahlen eine aliche Wirkung hervorriefen, musste zuerst dafür gesorgt rden, dass eine elektrische Wirkung der Röhre bez. des luctoriums auf das Präparat und die Galvanometerleitungen ht stattfand. Zu dem Zwecke wurde das Präparat in einen :chkasten eingesetzt, der oben durch einen Schieber aus

dünnem Aluminiumblech verschlossen und zur Erde abgeleitet war. Die hineinführenden Zuleitungsdrähte waren in zwei je 4 m lange zur Erde abgeleitete Bleiröhren gesteckt. Wurde das Auge durch ein Trockenelement ersetzt, so konnte man sich überzeugen, dass der Betrieb der Röhre nicht die allergeringste Bewegung am Galvanometer hervorrief. Wurde das Präparat eingesetzt und der Kastendeckel mit intensivem Lichte beleuchtet, blieb ebenfalls das Galvanometer in Ruhe, also ein Beweis, dass weder Inductionswirkungen noch sichtbare Lichtstrahlen bei geschlossenem Kasten auf das Präparat wirken konnten.

Liess man aber jetzt Röntgenstrahlen durch den Deckel aus Aluminiumblech hindurchgehen, so war der *Verlauf der Erscheinung genau der gleiche wie bei Belichtung mit sichtbaren Strahlen:* Vergrösserung der elektromotorischen Kraft bis zu einem bestimmten Werte, abermalige Vergrösserung beim Abstellen der Röhre. Also genau wie auf der oben gegebenen Curve dargestellt.

Dazwischenhalten einer 2 mm dicken Bleiplatte zwischen die Röhre und den Kasten bewirkte eine derartige Schwächung der Wirkung, dass die Erscheinung mit unseren Apparaten gerade noch wahrnehmbar war. Zwei derartige Platten hoben die Wirkung ganz auf. Die Empfindlichkeit eines Präparates für Röntgenstrahlen lief parallel mit der für Lichtstrahlen.

In der folgenden Tabelle geben wir für 8 Froschaugen unter *R* die durch eine 30 Secunden lange Bestrahlung mit Röntgenstrahlen hervorgebrachte Vermehrung der elektromotorischen Kraft in zehntausendstel Volt, unter *L* diejenige Vermehrung welche eintrat, wenn an die Stelle der Röntgenröhre eine 16 kerzige Glühlampe gebracht wurde und von dieser 10 Secunden lang Licht durch eine 1 cm dicke Wasserschicht in das Versuchsauge fiel. Die Entfernung Glühlampe-Präparat betrug ca. 30 cm. Die Wasserschicht wurde bei allen Versuchen mit Licht eingeschaltet, nachdem sich gezeigt hatte, dass die Präparate sehr empfindlich gegen Wärmestrahlen waren.

	1	2	3	4	5	6	7	8
R	1,0	5,5	6,7	2,8	2,0	1,3	1,4	3,5
L	3,5	14,0	22,0	7,5	7,3	4,0	5,1	12,0

Wurde ein Präparat mehrere Minuten hindurch mit intensivem Lichte bestrahlt, so war es hiernach längere Zeit (bis zu 5 Minuten) unempfindlich gegen schwächere Lichtreize, gleichfalls aber auch gegen Reizung mit Röntgenstrahlen. Trat die Empfindlichkeit für Licht wieder ein, so ebenfalls die für Röntgenstrahlen.

In ganz derselben Weise haben wir auch den Einfluss der ultravioletten Strahlen untersucht. Da wir diese Strahlen nicht absolut trennen konnten von den letzten Spuren von sichtbaren Strahlen, die bei der oben geschilderten Anordnung von dem letzten Prisma diffus nach allen Richtungen und deshalb auch mit durch den Spalt treten, so verfuhren wir so, dass wir die Wirkung bestimmten, welche das Einschieben bez. Fortnehmen einer 3 mm dicken Glasplatte in den Weg der Strahlen zwischen letztem und vorletztem Prisma verursachte.

Wie vorauszusehen, erhielten wir durch die ultravioletten Strahlen genau dieselbe Wirkung, wie durch die sichtbaren. Dass nicht etwa eine Schwächung der sichtbaren Strahlen durch die eingeschobene Glasplatte die beobachtete Wirkung hervorgebracht hatte, konnte leicht constatirt werden, indem eines der Quarzprismen durch ein Glasprisma ersetzt wurde. Das Einschieben der Glasplatte blieb jetzt wirkungslos, da schon durch das Glasprisma die wirksamen ultravioletten Strahlen fortgenommen waren.

Bei diesen Versuchen haben wir nur ganz unverletzte Froschaugen verwendet, keine isolirten Netzhäute. Es bleibt daher zunächst unentschieden, ob die ultravioletten Strahlen die Netzhaut direct erregen, oder ob die Fluorescenz von Glaskörper und Linse dabei im Spiel ist. Bei den Versuchen mit Röntgenstrahlen hatten wir letztere Möglichkeit dadurch ausgeschlossen, dass wir Actionsströme auch von isolirten hinteren Bulbushälften (ohne Glaskörper) erhielten.

Es wäre noch denkbar gewesen, dass die Wirkung der Röntgenstrahlen auf das Auge dadurch entstanden wäre, dass die an der vorderen Bulbushälfte anliegende Thonelektrode durch die Röntgenstrahlen zur Fluorescenz gebracht wäre und dann das Fluorescenzlicht auf das Auge gewirkt hätte. Wir haben uns überzeugt, dass der feuchte Thon nicht die geringste Fluorescenz bei Röntgenbestrahlung zeigte und dass an der

Wirkung nichts geändert wurde, als wir die Thonelektroden mit schwarzem photographischen Papier umhüllten, das durch Anfeuchten mit Kochsalzlösung leitend gemacht war.

Eine Einwirkung der Becquerelstrahlen auf die Retinaströme nachzuweisen ist uns nicht gelungen, doch ist zu bemerken, dass uns für diese Versuche nicht das starke Präparat von Hrn. Giesel, sondern nur das schwache käufliche Radiumpräparat von de Haën zur Verfügung stand.

Freiburg i. B., October 1900.

(Eingegangen 7. Januar 1901.)

9. *Ueber das Gesetz der Energieverteilung im Normalspectrum; von Max Planck.*

(In anderer Form mitgeteilt in der Deutschen Physikalischen Gesellschaft, Sitzung vom 19. October und vom 14. December 1900, Verhandlungen 2. p. 202 und p. 237. 1900.)

Einleitung.

Die neueren Spectralmessungen von O. Lummer und E. Pringsheim[1]) und noch auffälliger diejenigen von H. Rubens und F. Kurlbaum[2]), welche zugleich ein früher von H. Beckmann[3]) erhaltenes Resultat bestätigten, haben gezeigt, dass das zuerst von W. Wien aus molecularkinetischen Betrachtungen und später von mir aus der Theorie der elektromagnetischen Strahlung abgeleitete Gesetz der Energieverteilung im Normalspectrum keine allgemeine Gültigkeit besitzt.

Die Theorie bedarf also in jedem Falle einer Verbesserung, und ich will im Folgenden den Versuch machen, eine solche auf der Grundlage der von mir entwickelten Theorie der elektromagnetischen Strahlung durchzuführen. Dazu wird es vor allem nötig sein, in der Reihe der Schlussfolgerungen, welche zum Wien'schen Energieverteilungsgesetz führten, dasjenige Glied ausfindig zu machen, welches einer Abänderung fähig ist; sodann aber wird es sich darum handeln, dieses Glied aus der Reihe zu entfernen und einen geeigneten Ersatz dafür zu schaffen.

Dass die physikalischen Grundlagen der elektromagnetischen Strahlungstheorie, einschliesslich der Hypothese der „natürlichen Strahlung", auch einer geschärften Kritik gegenüber Stand halten, habe ich in meinem letzten Aufsatz[4]) über diesen

---

1) O. Lummer u. E. Pringsheim, Verhandl. der Deutsch. Physikal. Gesellsch. 2. p. 163. 1900.

2) H. Rubens und F. Kurlbaum, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin vom 25. October 1900, p. 929.

3) H. Beckmann, Inaug.-Dissertation, Tübingen 1898. Vgl. auch H. Rubens, Wied. Ann. 69. p. 582. 1899.

4) M. Planck, Ann. d. Phys. 1. p. 719. 1900.

Gegenstand dargelegt; und da auch die Rechnungen meines Wissens keinen Fehler enthalten, so bleibt auch der Satz bestehen, dass das Gesetz der Energieverteilung im Normalspectrum vollkommen bestimmt ist, wenn es gelingt, die Entropie S eines bestrahlten, monochromatisch schwingenden Resonators als Function seiner Schwingungsenergie U zu berechnen. Denn dann erhält man aus der Beziehung $dS/dU = 1/\vartheta$ die Abhängigkeit der Energie U von der Temperatur ϑ, und da andererseits die Energie U durch eine einfache Beziehung[1]) mit der Strahlungsdichte der entsprechenden Schwingungszahl verknüpft ist, auch die Abhängigkeit dieser Strahlungsdichte von der Temperatur. Die normale Energieverteilung ist dann diejenige, bei welcher die Strahlungsdichten aller verschiedenen Schwingungszahlen die nämliche Temperatur besitzen.

Somit reducirt sich das ganze Problem auf die eine Aufgabe, S als Function von U zu bestimmen, und der Lösung dieser Aufgabe ist auch der wesentlichste Teil der folgenden Untersuchung gewidmet. In meiner ersten Abhandlung über diesen Gegenstand hatte ich S direct durch Definition, ohne weitere Begründung, als einen einfachen Ausdruck von U hingestellt, und mich damit begnügt nachzuweisen, dass diese Form der Entropie allen Anforderungen, welche die Thermodynamik an sie stellt, Genüge leistet. Ich glaubte damals, dass sie auch die einzige ihrer Art sei, und dass somit das Wien'sche Gesetz, welches aus ihr folgt, notwendig allgemeine Gültigkeit besitze. Bei einer späteren näheren Untersuchung[2]) zeigte sich mir indessen, dass es auch noch andere Ausdrücke geben muss, welche dasselbe leisten, und dass es deshalb jedenfalls noch einer weiteren Bedingung bedarf, um S eindeutig berechnen zu können. Eine solche Bedingung glaubte ich gefunden zu haben in dem mir damals unmittelbar plausibel scheinenden Satz, dass bei einer unendlich kleinen irreversibeln Aenderung eines nahezu im thermischen Gleichgewicht befindlichen Systems von N gleichbeschaffenen, im nämlichen stationären Strahlungsfeld befindlichen Resonatoren die damit verbundene Vermehrung ihrer Gesamtentropie $S_N = NS$

1) Vgl. unten Gleichung (8).

2) M. Planck, l. c. p. 730 ff.

nur abhängt von ihrer Gesamtenergie $U_N = N U$ und deren Aenderungen, nicht aber von der Energie U der einzelnen Resonatoren. Dieser Satz führt wiederum mit Notwendigkeit zum Wien'schen Energieverteilungsgesetz. Da nun aber letzteres durch die Erfahrung nicht bestätigt wird, so ist man zu dem Schlusse gezwungen, dass auch jener Satz in seiner Allgemeinheit nicht richtig sein kann und daher aus der Theorie zu entfernen ist.[1])

Es muss also nun eine andere Bedingung eingeführt werden, welche die Berechnung von S gestattet, und um dies zu bewerkstelligen, ist ein näheres Eingehen auf die Bedeutung des Entropiebegriffes notwendig. Für die Richtung des dabei einzuschlagenden Gedankenganges giebt der Hinblick auf die Unhaltbarkeit der früher gemachten Voraussetzung einen Fingerzeig. Im Folgenden wird nun ein Weg beschrieben, auf dem sich ein neuer einfacher Ausdruck der Entropie und damit auch eine neue Strahlungsformel ergiebt, welche mit keiner der bisher festgestellten Thatsachen in Widerspruch zu stehen scheint.

I. Berechnung der Entropie eines Resonators als Function seiner Energie.

§ 1. Entropie bedingt Unordnung, und diese Unordnung beruht nach der elektromagnetischen Strahlungstheorie bei den monochromatischen Schwingungen eines Resonators, auch wenn er sich in einem dauernd stationären Strahlungsfelde befindet, in der Unregelmässigkeit, mit der er beständig seine Amplitude und seine Phase wechselt, sofern man Zeitepochen betrachtet, welche gross sind gegen die Zeit einer Schwingung, aber klein gegen die Zeit einer Messung. Wäre Amplitude und Phase absolut constant, also die Schwingungen vollkommen homogen, so könnte keine Entropie existiren und die Schwingungsenergie müsste vollkommen frei in Arbeit verwandelbar sein. Die constante Energie U eines einzelnen stationär schwingenden Resonators ist danach nur als ein zeitlicher Mittelwert aufzufassen, oder, was ganz auf dasselbe hinauskommt, als der gleichzeitige Mittelwert der Energien einer grossen Anzahl N

1) Man vergleiche hierzu die Kritiken, die dieser Satz bereits gefunden hat: von W. Wien (Rapport für den Pariser Congress 2. p. 40. 1900) und von O. Lummer (l. c. 2. p. 92. 1900).

von gleichbeschaffenen Resonatoren, die sich in dem nämlichen stationären Strahlungsfelde befinden, weit genug voneinander entfernt, um sich nicht gegenseitig direct zu beeinflussen. In diesem Sinne wollen wir künftig von der mittleren Energie U eines einzelnen Resonators sprechen. Dann entspricht der gesamten Energie

$$U_N = N\,U \tag{1}$$

eines solchen Systems von N Resonatoren eine gewisse Gesamtentropie

$$S_N = N\,S \tag{2}$$

desselben Systems, wobei S die mittlere Entropie eines einzelnen Resonators darstellt, und diese Entropie S_N beruht auf der Unordnung, mit der sich die gesamte Energie U_N auf die einzelnen Resonatoren verteilt.

§ 2. Wir setzen nun die Entropie S_N des Systems, bis auf eine willkürlich bleibende additive Constante, proportional dem Logarithmus der Wahrscheinlichkeit W dafür, dass die N Resonatoren insgesamt die Energie U_N besitzen, also:

$$S_N = k \log W + \text{const.} \tag{3}$$

Diese Festsetzung kommt nach meiner Meinung im Grunde auf eine Definition der genannten Wahrscheinlichkeit W hinaus; denn wir besitzen in den Voraussetzungen, welche der elektromagnetischen Theorie der Strahlung zu Grunde liegen, gar keinen Anhaltspunkt, um von einer solchen Wahrscheinlichkeit in einem bestimmten Sinne zu reden. Für die Zweckmässigkeit der so getroffenen Festsetzung lässt sich von vornherein ihre Einfachheit und ihre nahe Verwandtschaft mit einem Satze der kinetischen Gastheorie[1]) anführen.

§ 3. Es kommt nun darauf an, die Wahrscheinlichkeit W dafür zu finden, dass die N Resonatoren insgesamt die Schwingungsenergie U_N besitzen. Hierzu ist es notwendig, U_N nicht als eine stetige, unbeschränkt teilbare, sondern als eine discrete, aus einer ganzen Zahl von endlichen gleichen Teilen zusammengesetzte Grösse aufzufassen. Nennen wir einen solchen Teil ein Energieelement ε, so ist mithin zu setzen:

$$U_N = P\,.\,\varepsilon, \tag{4}$$

---

1) L. Boltzmann, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien (II) 76. p. 428. 1877.

wobei P eine ganze, im allgemeinen grosse Zahl bedeutet, während wir den Wert von ε noch dahingestellt sein lassen.

Nun ist einleuchtend, dass die Verteilung der P Energieelemente auf die N Resonatoren nur auf eine endliche ganz bestimmte Anzahl von Arten erfolgen kann. Jede solche Art der Verteilung nennen wir nach einem von L. Boltzmann für einen ähnlichen Begriff gebrauchten Ausdruck eine „Complexion". Bezeichnet man die Resonatoren mit den Ziffern 1, 2, 3 . . . N, schreibt diese der Reihe nach nebeneinander und setzt unter jeden Resonator die Anzahl der bei irgend einer willkürlich vorgenommenen Verteilung auf ihn entfallenden Energieelemente, so erhält man für jede Complexion ein Symbol von folgender Form:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
7	38	11	0	9	2	20	4	4	5

Hier ist $N = 10$, $P = 100$ angenommen. Die Anzahl $\mathfrak{R}$ aller möglichen Complexionen ist offenbar gleich der Anzahl aller möglichen Ziffernbilder, die man auf diese Weise, bei bestimmtem N und P, für die untere Reihe erhalten kann. Der Deutlichkeit halber sei noch bemerkt, dass zwei Complexionen als verschieden anzusehen sind, wenn die entsprechenden Ziffernbilder dieselben Ziffern, aber in verschiedener Anordnung, enthalten.

Aus der Combinationslehre ergiebt sich so die Anzahl aller möglichen Complexionen zu

$$\mathfrak{R} = \frac{N.(N+1).(N+2)\ldots(N+P-1)}{1\,.\;\;2\;\;.\;\;3\;\;\ldots\;\;P} = \frac{(N+P-1)!}{(N-1)!\;P!}.$$

Nun ist nach dem Stirling'schen Satze in erster Annäherung:

$$N! = N^N,$$

folglich in entsprechender Annäherung

$$\mathfrak{R} = \frac{(N+P)^{N+P}}{N^N\,.\,P^P}.$$

§ 4. Die Hypothese, welche wir jetzt der weiteren Rechnung zu Grunde legen wollen, lautet folgendermaassen: Die Wahrscheinlichkeit W dafür, dass die N Resonatoren insgesamt die Schwingungsenergie U_N besitzen, ist proportional der An-

zahl $\mathfrak{R}$ aller bei der Verteilung der Energie U_N auf die N Resonatoren möglichen Complexionen; oder mit anderen Worten: irgend eine bestimmte Complexion ist ebenso wahrscheinlich, wie irgend eine andere bestimmte Complexion. Ob diese Hypothese in der Natur wirklich zutrifft, kann in letzter Linie nur durch die Erfahrung geprüft werden. Dafür wird es aber umgekehrt möglich sein, falls die Erfahrung einmal zu ihren Gunsten entschieden haben sollte, aus der Gültigkeit dieser Hypothese weitere Schlüsse zu ziehen auf die speciellere Natur der Resonatorschwingungen, nämlich auf den Charakter der dabei auftretenden „indifferenten und ihrer Grösse nach vergleichbaren ursprünglichen Spielräume", in der Ausdrucksweise von J. v. Kries.[1]) Bei dem jetzigen Stande der Frage dürfte allerdings ein weiteres Beschreiten dieses Gedankenganges noch verfrüht erscheinen.

§ 5. Nach der eingeführten Hypothese in Verbindung mit Gleichung (3) ist die Entropie des betrachteten Systems von Resonatoren bei passender Bestimmung der additiven Constanten:

$$(5)\qquad \begin{cases} S_N = k \log \mathfrak{R} \\ \quad\;\; = k\{(N+P)\log(N+P) - N\log N - P\log P\} \end{cases}$$

und mit Berücksichtigung von (4) und (1):

$$S_N = k\,N\left\{\left(1+\frac{U}{\varepsilon}\right)\log\left(1+\frac{U}{\varepsilon}\right) - \frac{U}{\varepsilon}\log\frac{U}{\varepsilon}\right\}.$$

Also nach (2) die Entropie S eines Resonators als Function seiner Energie U:

$$(6)\qquad S = k\left\{\left(1+\frac{U}{\varepsilon}\right)\log\left(1+\frac{U}{\varepsilon}\right) - \frac{U}{\varepsilon}\log\frac{U}{\varepsilon}\right\}.$$

II. Einführung des Wien'schen Verschiebungsgesetzes.

§ 6. Nächst dem Kirchhoff'schen Satz von der Proportionalität des Emissions- und des Absorptionsvermögens bildet das von W. Wien[2]) entdeckte und nach ihm benannte

---

1) Joh. v. Kries, Die Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung p. 36. Freiburg 1886.

2) W. Wien, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin vom 9. Febr. 1893. p. 55.

sogenannte Verschiebungsgesetz, welches das Stefan-Boltzmann'sche Gesetz der Abhängigkeit der Gesamtstrahlung von der Temperatur als specielle Anwendung mit umfasst, in dem fest begründeten Fundament der Theorie der Wärmestrahlung den wertvollsten Bestandteil. Es lautet in der ihm von M. Thiesen[1]) gegebenen Fassung:

$$E . d\lambda = \vartheta^5 \psi(\lambda \vartheta) . d\lambda,$$

wo λ die Wellenlänge, $E d\lambda$ die räumliche Dichte der dem Spectralbezirk λ bis $\lambda + d\lambda$ angehörenden „schwarzen" Strahlung[2]), ϑ die Temperatur, und $\psi(x)$ eine gewisse Function des einzigen Arguments x bezeichnet.

§ 7. Wir wollen nun untersuchen, was das Wien'sche Verschiebungsgesetz über die Abhängigkeit der Entropie S unseres Resonators von seiner Energie U und seiner Eigenperiode aussagt, und zwar gleich in dem allgemeinen Falle, dass der Resonator sich in einem beliebigen diathermanen Medium befindet. Zu diesem Zwecke verallgemeinern wir zunächst die Thiesen'sche Form des Gesetzes auf die Strahlung in einem beliebigen diathermanen Medium mit der Lichtfortpflanzungsgeschwindigkeit c. Da wir nicht die Gesamtstrahlung, sondern monochromatische Strahlung zu betrachten haben, so wird es beim Vergleich verschiedener diathermaner Medien nötig, statt der Wellenlänge λ die Schwingungszahl ν einzuführen.

Bezeichnen wir also die räumliche Dichte der dem Spectralbezirk ν bis $\nu + d\nu$ angehörenden strahlenden Energie mit $\mathfrak{u}\, d\nu$, so ist zu schreiben: $\mathfrak{u}\, d\nu$ statt $E d\lambda$: c/ν statt λ, und $c\, d\nu/\nu^2$ statt $d\lambda$. Dadurch ergiebt sich:

$$\mathfrak{u} = \vartheta^5 \cdot \frac{c}{\nu^2} \cdot \psi\left(\frac{c\,\vartheta}{\nu}\right).$$

Nun ist nach dem bekannten Kirchhoff-Clausius'schen Gesetz die von einer schwarzen Fläche pro Zeiteinheit in ein diathermanes Medium emittirte Energie von bestimmter Temperatur ϑ und bestimmter Schwingungszahl ν umgekehrt pro-

1) M. Thiesen, Verhandl. d. Deutsch. Phys. Gesellsch. **2.** p. 66. 1900.

2) Man könnte vielleicht noch passender von einer „weissen" Strahlung sprechen, in sachgemässer Verallgemeinerung dessen, was man schon jetzt unter vollkommen weissem Licht versteht.

portional dem Quadrate c^2 der Fortpflanzungsgeschwindigkeit; also ist die räumliche Energiedichte u umgekehrt proportional c^3, und wir erhalten:

$$\mathfrak{u} = \frac{\vartheta^5}{\nu^2 c^3} f\left(\frac{\vartheta}{\nu}\right),$$

wobei die Constanten der Function f von c unabhängig sind.

Statt dessen können wir auch schreiben, wenn f jedesmal, auch im Folgenden, eine neue Function eines einzigen Arguments bezeichnet:

$$\mathfrak{u} = \frac{\nu^3}{c^3} f\left(\frac{\vartheta}{\nu}\right) \tag{7}$$

und ersehen unter anderem daraus, wie bekannt, dass die in dem Cubus einer Wellenlänge enthaltene strahlende Energie von bestimmter Temperatur und Schwingungszahl: $\mathfrak{u}\lambda^3$ für alle diathermanen Medien dieselbe ist.

§ 8. Um nun von der räumlichen Strahlungsdichte u zur Energie U eines in dem Strahlungsfelde befindlichen, stationär mitschwingenden Resonators mit der nämlichen Schwingungszahl ν überzugehen, benutzen wir die in Gleichung (34) meiner Abhandlung über irreversible Strahlungsvorgänge [1]) ausgedrückte Beziehung:

$$\mathfrak{K} = \frac{\nu^2}{c^2} U$$

($\mathfrak{K}$ ist die Intensität eines monochromatischen, geradlinig polarisirten Strahles), welche zusammen mit der bekannten Gleichung:

$$\mathfrak{u} = \frac{8\pi\,\mathfrak{K}}{c}$$

die Beziehung liefert:

$$\mathfrak{u} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} U. \tag{8}$$

Hieraus und aus (7) folgt:

$$U = \nu f\left(\frac{\vartheta}{\nu}\right),$$

wo nun c überhaupt nicht mehr vorkommt. Statt dessen können wir auch schreiben:

$$\vartheta = \nu f\left(\frac{U}{\nu}\right).$$

1) M. Planck, Ann. d. Phys. 1. p. 99. 1900.

§ 9. Endlich führen wir auch noch die Entropie S des Resonators ein, indem wir setzen:

$$\frac{1}{\vartheta} = \frac{dS}{dU}. \tag{9}$$

Dann ergiebt sich:

$$\frac{dS}{dU} = \frac{1}{\nu} f\left(\frac{U}{\nu}\right)$$

und integrirt:

$$S = f\left(\frac{U}{\nu}\right), \tag{10}$$

d. h. die Entropie des in einem beliebigen diathermanen Medium schwingenden Resonators ist von der einzigen Variabeln U/ν abhängig und enthält ausserdem nur universelle Constante. Dies ist die einfachste mir bekannte Fassung des Wien'schen Verschiebungsgesetzes.

§ 10. Wenden wir das Wien'sche Verschiebungsgesetz in der letzten Fassung auf den Ausdruck (6) der Entropie S an, so erkennen wir, dass das Energieelement ε proportional der Schwingungszahl ν sein muss, also:

$$\varepsilon = h \cdot \nu$$

und somit:

$$S = k\left\{\left(1 + \frac{U}{h\nu}\right)\log\left(1 + \frac{U}{h\nu}\right) - \frac{U}{h\nu}\log\frac{U}{h\nu}\right\}.$$

Hierbei sind h und k universelle Constante.

Durch Substitution in (9) erhält man:

$$\frac{1}{\vartheta} = \frac{k}{h\nu}\log\left(1 + \frac{h\nu}{U}\right),$$

$$U = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k\vartheta}} - 1} \tag{11}$$

und aus (8) folgt dann das gesuchte Energieverteilungsgesetz:

$$u = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k\vartheta}} - 1} \tag{12}$$

oder auch, wenn man mit den in § 7 angegebenen Substitutionen statt der Schwingungszahl ν wieder die Wellenlänge λ einführt:

$$E = \frac{8\pi c h}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{ch}{k\lambda\vartheta}} - 1}. \tag{13}$$

Die Ausdrücke für die Intensität und für die Entropie der im diathermanen Medium fortschreitenden Strahlung, sowie den Satz der Vermehrung der gesamten Entropie bei nichtstationären Strahlungsvorgängen denke ich an anderer Stelle abzuleiten.

III. Zahlenwerte.

§ 11. Die Werte der beiden Naturconstanten h und k lassen sich mit Hülfe der vorliegenden Messungen ziemlich genau berechnen. F. Kurlbaum[1]) hat gefunden, dass, wenn man mit S_t die gesamte Energie bezeichnet, die von 1 qcm eines auf t^0 C. befindlichen schwarzen Körpers in 1 sec in die Luft gestrahlt wird:

$$S_{100} - S_0 = 0{,}0731 \frac{\text{Watt}}{\text{cm}^2} = 7{,}31 \,.\, 10^5 \frac{\text{erg}}{\text{cm}^2 \text{sec}}.$$

Daraus ergiebt sich die räumliche Dichte der gesamten Strahlungsenergie in der Luft bei der absoluten Temperatur 1:

$$\frac{4 \,.\, 7{,}31 \,.\, 10^5}{3 \,.\, 10^{10} \,.\, (373^4 - 273^4)} = 7{,}061 \,.\, 10^{-15} \frac{\text{erg}}{\text{cm}^3 \text{grad}^4}.$$

Andererseits ist nach (12) die räumliche Dichte der gesamten strahlenden Energie für $\vartheta = 1$:

$$u = \int_0^\infty \mathfrak{u}\, d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^\infty \frac{\nu^3 d\nu}{e^{\frac{h\nu}{k}} - 1}$$

$$= \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^\infty \nu^3 \left(e^{-\frac{h\nu}{k}} + e^{-\frac{2h\nu}{k}} + e^{-\frac{3h\nu}{k}} + \dots\right) d\nu$$

und durch gliedweise Integration:

$$u = \frac{8\pi h}{c^3} \cdot 6 \left(\frac{k}{h}\right)^4 \left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots\right)$$

$$= \frac{48\pi k^4}{c^3 h^3} \cdot 1{,}0823.$$

Setzt man dies $= 7{,}061 \,.\, 10^{-15}$, so ergiebt sich, da $c = 3 \,.\, 10^{10}$.

$$\frac{k^4}{h^3} = 1{,}1682 \,.\, 10^{15}. \tag{14}$$

1) F. Kurlbaum, Wied. Ann. **65.** p. 759. 1898.



§ 12. O. Lummer und E. Pringsheim[1]) haben das Product $\lambda_m \vartheta$, wo λ_m die Wellenlänge des Maximums von E in Luft bei der Temperatur ϑ bedeutet, zu $2940\,\mu\,.\,\text{grad}$ bestimmt. Also in absolutem Maass:

$$\lambda_m \vartheta = 0{,}294\ \text{cm}\,.\,\text{grad}\,.$$

Andererseits folgt aus (13), wenn man den Differentialquotienten von E nach λ gleich Null setzt, wodurch $\lambda = \lambda_m$ wird:

$$\left(1 - \frac{c\,h}{5\,k\,\lambda_m \vartheta}\right) . \, e^{\frac{c h}{k \lambda_m \vartheta}} = 1$$

und aus dieser transcendenten Gleichung:

$$\lambda_m \vartheta = \frac{c\,h}{4{,}9651\,.\,k}\,.$$

Folglich:

$$\frac{h}{k} = \frac{4{,}9651\,.\,0{,}294}{3\,.\,10^{10}} = 4{,}866\,.\,10^{-11}\,.$$

Hieraus und aus (14) ergeben sich die Werte der Naturconstanten:

(15) $$h = 6{,}55\,.\,10^{-27}\ \text{erg}\,.\,\text{sec}\,,$$

(16) $$k = 1{,}346\,.\,10^{-16}\ \frac{\text{erg}}{\text{grad}}\,.$$

Das sind dieselben Zahlen, welche ich in meiner früheren Mitteilung angegeben habe.

1) O. Lummer und E. Pringsheim, Verhandl. der Deutschen Physikal. Gesellsch. 2. p. 176. 1900.

(Eingegangen 7. Januar 1901.)

10. *Ueber die Elementarquanta der Materie und der Elektricität; von Max Planck.*

(Aus den Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft, 2. p. 244. 1900, mitgeteilt vom Verfasser.)

In seiner grundlegenden Abhandlung „Ueber die Beziehung zwischen dem zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie und der Wahrscheinlichkeitsrechnung bez. den Sätzen über das Wärmegleichgewicht" hat Hr. L. Boltzmann[1]) die Entropie eines im Gleichgewicht befindlichen einatomigen Gases dargestellt durch den Logarithmus der Wahrscheinlichkeit des Zustandes, indem er die Beziehung[2]) nachwies:

$$\int \frac{d\,Q}{T} = \tfrac{2}{3}\Omega = \tfrac{2}{3}\log \mathfrak{P}.$$

Hier bedeutet $d\,Q$ die von aussen zugeführte Wärme in mechanischem Maasse, T die mittlere lebendige Kraft eines Atoms, und $\Omega = \log \mathfrak{P}$ den natürlichen Logarithmus der durch die Anzahl $\mathfrak{P}$ der möglichen „Complexionen" gemessenen Wahrscheinlichkeit der stationären Geschwindigkeitsverteilung unter den Atomen.

Nun ist, wenn m die Masse eines g-Atoms, ω das Verhältnis der Masse eines wirklichen Atoms zu der Masse eines g-Atoms, und $\overline{c^2}$ das mittlere Quadrat der Geschwindigkeit bezeichnet:

$$T = \tfrac{1}{2}\,\omega\, m\, \overline{c^2},$$

ferner:

$$\overline{c^2} = \frac{3\,R\,\vartheta}{m},$$

wobei R die sogenannte absolute Gasconstante ($8{,}31 \,.\, 10^7$ für $O = 16$), ϑ die Temperatur bedeutet; folglich die Entropie des Gases:

$$\int \frac{d\,Q}{\vartheta} = \omega\, R \log \mathfrak{P}.$$

1) L. Boltzmann, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien (II) 76. p. 373. 1877.

2) l. c. p. 428.

Andererseits hat sich in der von mir entwickelten elektromagnetischen Theorie der Wärmestrahlung für die Entropie einer grossen Anzahl von unabhängig schwingenden, in einem stationären Strahlungsfelde befindlichen linearen Resonatoren der folgende Ausdruck[1]) ergeben:

$$k \log \mathfrak{R},$$

wo $\mathfrak{R}$ die Anzahl der möglichen Complexionen, k die Zahl $1,346 \,.\, 10^{-16}$ [erg : grad][2]) bedeutet.

Der hier auftretende Zusammenhang zwischen Entropie und Wahrscheinlichkeit hat wohl nur dann einen physikalischen Sinn, wenn er allgemein gilt, nicht nur für die Geschwindigkeiten der Atome und die Schwingungen der Resonatoren einzeln, sondern auch für beide Vorgänge zusammengenommen. Wenn also in dem Gase auch strahlende Resonatoren vorhanden sind, so ist danach die Entropie des ganzen Systems proportional dem Logarithmus der Zahl aller möglicher Complexionen, Geschwindigkeiten und Strahlung zusammengenommen. Da aber nach der elektromagnetischen Theorie der Strahlung die Geschwindigkeiten der Atome vollkommen unabhängig sind von der Verteilung der strahlenden Energie, so ist die Gesamtzahl der Complexionen einfach gleich dem Producte der auf die Geschwindigkeiten und der auf die Strahlung bezüglichen Zahlen, mithin die Gesamtentropie, wenn f einen Proportionalitätsfactor bedeutet:

$$f \log (\mathfrak{P} \mathfrak{R}) = f \log \mathfrak{P} + f \log \mathfrak{R}.$$

Der erste Summand ist die kinetische, der zweite die Strahlungsentropie. Durch Vergleichung mit den vorigen Ausdrücken erhält man hieraus:

$$f = \omega R = k,$$

oder

$$\omega = \frac{k}{R} = 1,62 \,.\, 10^{-24},$$

d. h. ein wirkliches Molecül ist das $1,62 \,.\, 10^{-24}$ fache eines g-Molecüles, oder: ein Wasserstoffatom wiegt $1,64 \,.\, 10^{-24}$ g, da H = 1,01, oder: auf ein g-Molecül eines jeden Stoffes gehen

1) M. Planck, vgl. die vorhergehende Abhandlung, Gleichung (5).
2) l. c. Gleichung (16).

$1/\omega = 6{,}175 \,.\, 10^{23}$ wirkliche Molecüle. Hr. O. E. Meyer[1]) berechnet diese Zahl auf $640 \,.\, 10^{21}$, also nahe übereinstimmend.

Die Loschmidt'sche Constante $\mathfrak{N}$, d. h. die Anzahl Gasmolecüle in 1 ccm bei 0° C. und 1 Atm. Druck ist:

$$\mathfrak{N} = \frac{1013200}{R \,.\, 273 \,.\, \omega} = 2{,}76 \,.\, 10^{19}.$$

Hr. Drude[2]) findet $\mathfrak{N} = 2{,}1 \,.\, 10^{19}$.

Die Boltzmann-Drude'sche Constante α, d. h. die mittlere lebendige Kraft eines Atomes bei der absoluten Temperatur 1 ist:

$$\alpha = \tfrac{3}{2}\,\omega\, R = \tfrac{3}{2}\, k = 2{,}02 \,.\, 10^{-16}.$$

Hr. Drude[3]) findet $\alpha = 2{,}65 \,.\, 10^{-16}$.

Das Elementarquantum der Elektricität e, d. h. die elektrische Ladung eines positiven einwertigen Ions oder Elektrons ist, wenn ε die bekannte Ladung eines einwertigen g-Ions bedeutet:

$$e = \varepsilon\, \omega = 4{,}69 \,.\, 10^{-10} \text{ elektrostatisch.}$$

Hr. F. Richarz[4]) findet $1{,}29 \,.\, 10^{-10}$, Hr. J. J. Thomson[5]) neuerdings $6{,}5 \,.\, 10^{-10}$.

Alle diese Beziehungen beanspruchen, wenn die Theorie überhaupt richtig ist, nicht annähernde, sondern absolute Gültigkeit. Daher fällt die Genauigkeit der berechneten Zahlen wesentlich mit derjenigen der relativ unsichersten, der Strahlungsconstanten k, zusammen, und übertrifft somit bei weitem alle bisherigen Bestimmungen dieser Grössen. Ihre Prüfung durch directere Methoden wird eine ebenso wichtige wie notwendige Aufgabe der weiteren Forschung sein.

1) O. E. Meyer, Die kinetische Theorie der Gase, 2. Aufl. p. 337. 1899.

2) P. Drude, Ann. d. Phys. 1. p. 578. 1900.

3) l. c.

4) F. Richarz, Wied. Ann. 52. p. 397. 1894.

5) J. J. Thomson, Phil. Mag. (5) 46. p. 528. 1898.

(Eingegangen 9. Januar 1901.)



11. *Zur Festigkeitslehre;*
von W. Voigt.

Der Entwickelung der allgemeinen *Principien* der Festigkeitslehre ist die ausserordentliche praktische Bedeutung der *Anwendungen* dieser Disciplin nicht förderlich gewesen. Das Bedürfnis ging auf angenäherte Regeln und ungefähre Zahlen, die eine Anwendung auf theoretisch complicirte Umstände gestatteten, und hier genügte die Aufstellung und Verwertung von Hypothesen, die mit wirklich wissenschaftlicher Schärfe nie geprüft waren. Erst neuerdings hat man sich hier und da einer Kritik der Grundlagen der technischen Festigkeitslehre zugewandt; aber auch hier ist an gewisse fundamentale Annahmen, die der Prüfung ernstlich bedürfen, kaum gerührt worden. Ich will die ersten beiden Abschnitte dieser Arbeit ihrer Erörterung widmen und mich sodann der Besprechung derjenigen Theorie der Festigkeit zuwenden, die, wie es scheint, jetzt in der Technik die meiste Anwendung findet.

1. Einwände gegen eines der Fundamente der älteren Festigkeitstheorien.

Die *erste* der meist stillschweigend eingeführten Grundannahmen der gebräuchlichen Festigkeitslehre geht dahin, dass *die Erscheinungen der Festigkeit überhaupt durch dem Material individuelle Constanten darstellbar seien.* Es liegen indessen gewisse Beobachtungen vor, die hiermit bedenklich im Widerspruch zu stehen scheinen; von ihnen will ich an dieser Stelle nur diejenigen erwähnen, die auf meine Veranlassung im hiesigen Institut angestellt worden sind und die ich daher genau zu beurteilen vermag.

Eine erste Reihe[1]) bezog sich auf die Zerreissungsfestigkeit von krystallisirtem Steinsalz. Hier hat sich unter anderem gezeigt, dass prismatische Präparate, die aus einem Spaltungsstücke mit ihrer Axe parallel einer Würfelkante ausgeschnitten

1) A. Sella u. W. Voigt, Wied. Ann. 48. p. 636. 1893.

sind, Festigkeiten besitzen, d. h. Grenzspannungen $\bar{p}$ ertragen, die in hohem Maasse von der Orientirung der Seitenflächen gegen die Krystallaxen, bez. gegen die Spaltungsflächen abhängen (vgl. Fig. 1). Die ertragene Grenzspannung ist ein Minimum, wenn die Seitenflächen den Spaltflächen parallel sind (Fall I), sie wächst mit wachsendem Neigungswinkel (Fall II) und erreicht ein Maximum, wenn derselbe 45° erreicht (Fall III). Das Verhältnis des Minimalwertes zu dem Maximalwert ist 1,6.

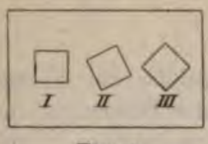


Fig. 1.

Bei *gleicher* Orientirung liefern aber Präparate von verschieden grossen Querschnitten merklich gleiche Festigkeiten. Analoge Resultate wurden bei anderen Orientirungen der Prismenaxe gegen den Krystall gefunden. Ebenso lieferte die Untersuchung der Biegungsfestigkeit von Prismen der beiden Orientirungen I und III für das Verhältnis der Grenzspannungen den Wert 1,6.

Wäre die Festigkeit eine reine Eigenschaft des *Materiales*, so müssten Prismen von gleicher Orientirung der Längsaxe bei gleichem Querschnitt auch gleiche Grenzspannungen ertragen; denn sie sind in die gleiche Zahl von gleichwertigen Elementarfäden zerlegbar. In welcher Richtung ich die Erklärung der genannten Resultate suche — ohne die Aufstellung einer abschliessenden Deutung damit zu behaupten —, mag im wesentlichen mit den Worten der betreffenden Publication[1] hier eingefügt werden, wobei bezüglich der Erörterung der gegen diesen Erklärungsversuch etwa zu erhebenden Bedenken auf das Original selbst verwiesen werden muss.

Die Oberflächenschicht eines festen Körpers besitzt in jedem Falle gemäss den wirkenden Molecularkräften eine andere Constitution, als die inneren Teile, und man muss bei krystallinischen Medien, nachdem die Elasticitätsbeobachtungen eine Abhängigkeit der Molecularkräfte von der Richtung ergeben haben, offenbar annehmen, dass diese Schicht ihre Natur mit der Orientirung der Grenzfläche wechselt. Ihre Dicke muss gegen die Dicke der gewöhnlich benutzten Beobachtungsobjecte *unmerklich* sein, da die Elasticitätsbeobachtungen den Resultaten einer Theorie genau entsprechen, die jene singu-

1) l. c. p. 654.

lären Oberflächenschichten *nicht* in Rechnung setzt. Aber diese unmerklich dünne, in ihrem Verhalten nach innen zu stetig in den normalen Zustand der Materie übergehende Schicht kann trotzdem die Tragfähigkeit eines Cylinders stark beeinflussen, wenn sie die Eigenschaft hat, bei einer geringeren Dehnung zu zerreissen, als ein Faden im Innern; denn der bei einer gewissen Dehnung entstehende Sprung in der Oberflächenschicht bedeutet in mehrfacher Hinsicht eine Schwächung des bezüglichen Querschnittes und wird sich im allgemeinen über denselben ausbreiten. Die Eigenschaft, welche die Tragfähigkeit bedingt, würde hiernach, wenigstens beim krystallisirten Steinsalz, nicht eine *Volumen-*, sondern eine *Flächen*festigkeit sein.

Dass singuläre Einwirkungen der Oberflächenbeschaffenheit keineswegs auf Präparate aus Krystallen beschränkt sind, ergiebt sich aus einer anderen hier angestellten Versuchsreihe[1]), die sich auf die Drehungs-, Biegungs- und Drillungsfestigkeit von gezogenen cylindrischen Glasstäben bezog. Bei derselben fand sich, dass die Festigkeit der Stäbe bei einer leichten Aetzung der Oberfläche mit Hülfe von Flusssäure ganz ausserordentlich zunimmt. Die folgenden mittleren Werte der Grenzspannungen $\bar{p}$ in Atmosphären (1 Atm. = 1 kg pro cm^2) mögen dies belegen:

	Dehnung	Biegung	Drillung
ungeätzt	1190	1350	1210
geätzt	1780	2750	2030

Diese Zahlen bedürfen keines Commentares. Nur eine Bemerkung sei hinzugefügt. Auch bei technischen Festigkeitsbestimmungen wird gelegentlich von einem singulären Verhalten der Oberflächenschicht gesprochen; aber es wird darunter offenbar etwas ganz anderes verstanden, als das im Vorstehenden Erörterte. Das beweist am einfachsten die wiederholt ausgesprochene Vorstellung, dass man durch Vergrösserung des Querschnittes den Einfluss der Oberflächenschicht bis zur Unmerklichkeit herabdrücken könnte. Unsere Resultate sind mit einer solchen Vorstellung nicht vereinbar.[2])

1) C. Brodmann, Gött. Nachr. 1894. p. 44ff.

2) A. Sella u. W. Voigt, l. c.

Ziehe ich aus dem Vorstehenden die Consequenz, so scheint mir, dass man bei Versuchen über die *Grundgesetze* der Festigkeitslehre sich vorerst bemühen sollte, die Complication, die durch die Oberflächenfestigkeit in das Problem kommt, *nach Möglichkeit zu vermeiden*, was dadurch geschehen dürfte, dass man nur mit Präparaten arbeitet, die aus grossen, möglichst homogenen Blöcken der Substanz herausgeschnitten sind. Alle die zahllosen Messungen, die sich auf gegossene, geschmiedete, gezogene Metallstücke oder auf gepresste Cementpräparate beziehen, werden nach dem oben Gesagten für die Prüfung irgend welcher hypothetischer *Grundgesetze* erst dann brauchbar, wenn die Einflusslosigkeit der speciellen Oberflächenbeschaffenheit durch besondere Versuche erwiesen ist.

Mit dem Vorstehenden hängt ein anderer Umstand einigermaassen zusammen. Es wird zwar hier und da, aber keineswegs allenthalben, klar ausgesprochen, dass die Festigkeitsversuche mit ductilen Materialien keine dem Material ohne weiteres als individuell zuzusprechenden Zahlen liefern. Sie ergeben vielmehr nur Eigenschaften des bereits durch die ausgeübten Spannungen *veränderten* Materiales, die im allgemeinen keinerlei Anwendung auf eine *andere* Inanspruchnahme gestatten, weil bei jener das Material vor der Zertrennung in einer *anderen* Weise dauernd verändert ist. Um daher nicht das so schwierige Problem in unrationeller Weise noch weiter zu compliciren, sollte man für die Entscheidung der noch ganz unklaren *principiellen* Fragen nur mit Materialien arbeiten, die sich bis zum Moment der Zertrennung nicht in merklicher Weise dauernd deformiren.

2. Einwände gegen ein zweites Fundament der älteren Festigkeitstheorien.

Die *zweite* noch kaum angezweifelte Annahme der gebräuchlichen Festigkeitslehre geht dahin, dass man *die Gesetze der Festigkeit homogen deformirter Körper ohne weiteres auf die Raumelemente inhomogen deformirter Körper anwenden dürfte.* Diese Annahme ist der Elasticitätstheorie entlehnt und dort durch zahlreiche Beobachtungsergebnisse befriedigend bestätigt. *Selbstverständlich* ist sie in keiner Weise; die Festigkeit könnte an sich sehr wohl, ausser von den Deformationen oder den

Spannungen selbst, auch von deren örtlicher Veränderlichkeit abhängen. Und mir scheint, dass die Beobachtungen eine solche Auffassung deutlich genug nahe legen.

Die Abweichungen zwischen Dehnungs- und Biegungsfestigkeit sind allbekannt, und es ist nur ein Notbehelf, wenn man sie durch secundäre Einflüsse zu erklären sucht. Es sei erlaubt, wieder auf die im hiesigen Institut an krystallisirtem Steinsalz angestellten Beobachtungen Bezug zu nehmen, die an einem völlig homogenen und spannungsfreien Material vorgenommen sind, das überdies für die elastische Biegung bis zum Moment des Brechens äusserst genau dem Hooke'schen Gesetz folgt.[1]) Dabei sei bemerkt, dass nach der Theorie der Krystallelasticität sich die Stäbe von den oben erwähnten Orientirungen I und III (vgl. Fig. 1) isotropen Präparaten bei Biegung und Dehnung wesentlich gleich verhalten.

Diese Beobachtungen lieferten mit einer Genauigkeit, welche die bei isotropen Körpern zu erzielende erheblich übertrifft, für die Präparate der Gattungen I und III die Grenzspannungen $\bar{p}$ in Atmosphären:

	Dehnung	Biegung
I	57,1	119,0
III	91,7	190,0;

trotzdem dass die einzelnen Fadenelemente eines gebogenen Stabes sich nach der Theorie in merklich demselben Spannungszustande befinden, wie wenn jedes einzelne für sich allein gedehnt würde, findet sich $\bar{p}$ bei der Biegung rund doppelt so gross, wie bei der Dehnung. Die oben mitgeteilten, auf Glasstäbe bezüglichen Zahlen stimmen dem Sinne nach mit den vorstehenden überein.

Es scheint mir, dass auch derartige Resultate eine wichtige Mahnung in Bezug auf die Beobachtungen enthalten, die zum Zwecke der Ableitung eines Elementargesetzes der Festigkeit angestellt werden. Man sollte wohl, um klare Grundlagen zu schaffen, vor allen Dingen mit der Erforschung der Festigkeit *homogen* deformirter Körper weiter zu kommen versuchen.

1) W. Voigt, Pogg. Ann. Erg.-Bd. 7. p. 47. 1875. Es scheint mir übrigens, dass die Festigkeitsversuche des Hrn. Grübler an rotirenden Scheiben (Zeitschr. des Ver. deutscher Ing. 43. p. 1294. 1899) für die obigen Behauptungen eine neue Stütze liefern.

Erst wenn hier ein allgemeines Grundgesetz gefunden ist, wird man Beobachtungen über Festigkeit bei *inhomogener* Deformation richtig verstehen und theoretisch verwerten können. In Bezug hierauf sei an folgendes erinnert. Da der Spannungszustand eines homogen deformirten Körpers durch die Werte der drei aufeinander normalen Hauptspannungen erschöpfend bestimmt wird, so lässt sich das allgemeine Gesetz der Festigkeit homogen deformirter Körper finden, wenn es gelingt, rechtwinklige Prismen durch beliebig variirende Druck- und Zugkräfte gegen ihre drei Flächenpaare zu zertrümmern.

3. Beobachtungen über Festigkeit bei homogener Deformation.

So einfach das hierdurch gestellte wichtige Problem auch scheint, so schwierig ist dessen befriedigende Lösung, denn wir besitzen nur wenige und meist unvollkommene Mittel, um auf eine ebene Fläche einen wirklich gleichförmigen Zug oder Druck auszuüben. Vollkommen entspricht der Anforderung nur der hydrostatische Druck einer die betreffende Fläche berührenden Flüssigkeit. Die gebräuchliche Art des Vorgehens bei Druckversuchen, das prismatische Präparat zwischen Platten eines nahezu starren Materiales zu pressen, halte ich trotz der von Hrn. Föppl[1]) erzielten Verbesserung durch Anbringung eines Schmiermittels jedenfalls immer dann für bedenklich, wenn man den Moment der Zertrümmerung nach dem Eintreten der ersten Sprünge abschätzt. Die Herren Winkelmann und Schott[2]) haben beobachtet, dass die von ihnen benutzten Glaspräparate nach dem (ziemlich unregelmässigen) Auftreten der ersten Sprünge, obwohl dadurch erheblich geschwächt, noch *vergrösserte* Drucke aushielten und schliesslich mit lautem Knall in Staub nach allen Seiten hin auseinander geschleudert wurden. Ich schliesse hieraus, dass jene Methode keinen befriedigend homogenen Spannungszustand liefert, und dass jedenfalls die ersten Sprünge durchaus von den Ungleichförmigkeiten der Spannungen herrühren. Trotzdem wird man

1) A. Föppl, Mitt. aus dem mech.-techn. Laboratorium der techn. Hochsch. in München, 27. Heft. 1900.

2) A. Winkelmann u. O. Schott, Sitzungsber. d. Naturf.-Ges. in Jena vom 15. Dec. 1893; Wied. Ann. **51**. p. 697. 1894.

sie bei Berücksichtigung der verschiedenen vorstehend besprochenen Erfahrungen ihrer grossen Bequemlichkeit halber immer wieder anwenden, wenn es nicht gelingt, eine Anordnung zu finden, die gestattet, auf einzelne Flächenpaare *hydrostatische* Drucke auszuüben.

Principiell scheint mir auch die Methode der Anwendung wert, bei der in der Mitte leicht verjüngte Stäbe von gegen den Querschnitt erheblicher Länge (vgl. Fig. 2), durch eine geeignete Führung am Umknicken verhindert, mit einer beliebigen mechanischen Vorrichtung comprimirt werden. Gewisse Beobachtungen über die Elasticität von Stäben haben mir gezeigt, dass ungleichförmige Drucke sich schon auf einem verhältnismässig kurzen Wege ausgleichen; diese Erfahrungen überzeugen mich davon, dass bei der beschriebenen Anordnung bei gar nicht so bedeutender Länge des Präparates die Drucke sich über den mittelsten, am stärksten in Anspruch genommenen Querschnitt nahezu gleichmässig verteilen, vielleicht gleichförmiger, als bei dem oben erörterten gebräuchlichen Druckverfahren.

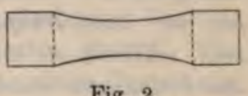


Fig. 2.

Nur bei Krystallen, welche Gleitflächen besitzen, ist diese Anordnung unter Umständen unzulässig. Liegen die Gleitflächen gegen die Axenrichtung des Präparates geneigt, so tritt bereits bei ziemlich niedrigen Drucken ein Umspringen mittlerer Schichten in die Zwillingslage ein, die das ganze Präparat dauernd deformirt und somit unbrauchbar macht.

Beiläufig will ich bemerken, dass ich die principiellen Bedenken, die neuerdings hier und da gegen die Anwendung von Präparaten der in Fig. 2 dargestellten Form zu Zerreissversuchen erhoben werden, in der Hauptsache für unbegründet halte. *Wenn man nur die höchst wesentliche Fehlerquelle nichtcentrischer Einspannung bez. Inanspruchnahme vermeidet*[1]), die zu Biegungen des Präparates Veranlassung giebt und die Festigkeit zu klein erscheinen lässt, ist gegen das Verfahren wenig einzuwenden. Ich habe mich wiederholt bei Steinsalzpräparaten davon überzeugt, dass ihr optisches Verhalten im polarisirten Licht bei den Zerreissversuchen ein

1) A. Sella u. W. Voigt, Wied. Ann. **48**. p. 638. 1893.

ganz gleichmässiges war, und die Spannungen sich also sehr gleichmässig über die mittleren Querschnitte verteilten. —

Die letzten Reihen der hier angestellten Beobachtungen über Festigkeit[1]) entsprechen dem oben formulirten, bescheiden beschränkten Problem. Es handelte sich bei ihnen darum, an Präparaten grösster Homogenität und wohldefinirter Oberflächenbeschaffenheit eine homogene Deformation neuer Art bezüglich der Festigkeit zu untersuchen, nämlich eine solche, *bei der zwei Hauptspannungen einander gleich vorgeschrieben sind, während die dritte so lange gesteigert wird, bis der Zerfall des Präparates eintritt.* Die Präparate von der in Fig. 2 dargestellten Form wurden zu dem Zwecke einem Längszug unterworfen, während sie einmal in der Atmosphäre, sodann in einem Recipienten mit hochgespanntem Gase aufgehangen waren. Da der Druck im letzteren Falle bei dem Mangel einer starken Druckpumpe einfach durch eine Bombe mit flüssiger Kohlensäure hervorgebracht wurde, so standen grössere Werte als ca. 55 Atm. nicht zur Verfügung. Demgemäss mussten für die Präparate Materialien gewählt werden, die eine Zerreissungsfestigkeit (bez. eine sie charakterisirende Grenzspannung $\bar{p}$) in der freien Luft von einer diese Zahl nicht allzuweit übertreffenden Grösse besassen; im anderen Falle hätte sich der Einfluss des äusseren seitlichen Druckes auf die Grenzspannung jedenfalls unter den Beobachtungsfehlern versteckt.

Nach vergeblichen Versuchen, *Glassorten* von ähnlich geringer Festigkeit zu erhalten, entschloss ich mich, die ersten Beobachtungen mit prismatischen Steinsalzpräparaten vorzunehmen, die, wenn mit ihren Prismenkanten parallel zu den Krystallaxen orientirt, sich elastisch wie isotrope Körper verhielten. Später sind die Versuche mit einem künstlichen „dichten Gestein", einer durch sehr vorsichtiges Zusammenschmelzen von Stearin- und Palmitinsäure erhaltenen überaus dichten und feinkörnigen Mischung wiederholt worden. Letzterer Körper bot den Vorteil bequemer Bearbeitung auf der Drehbank und daneben so geringer Festigkeit, dass er in dem Recipienten bei ca. 42 Atm. Aussendruck bereits zerrissen

1) W. Voigt, Wied. Ann. **53**. p. 43. 1894; **67**. p. 452. 1899.

wurde, bevor noch die angewandte äussere longitudinale Spannung den Gasdruck überwunden hatte, d. h. also bei Einwirkung eines grösseren Druckes auf die Mantel-, eines kleineren auf die Grundflächen.

Die beiden Beobachtungsreihen ergaben mit einem für Festigkeitsbestimmungen recht erheblichen Grad der Sicherheit das wohl kaum zu erwartende Resultat, dass bei den Versuchen unter niedrigem und unter hohem Gasdruck das Zerreissen bei demselben Ueberschuss der longitudinalen über die transversale innere Spannung des Präparates eintritt. Die Trennungsflächen waren saubere, merklich ebene *Querschnitte* der Präparate, bei dem Steinsalz hochglänzende Spaltungsflächen.

Die alten Kriterien für den Moment des Zerreissens, die einen bestimmten Wert der *Grenzspannung* oder der *Grenzdehnung normal zur Trennungsfläche* einnehmen, werden durch diese Beobachtungen für homogene Deformationen entscheidend widerlegt. Es ist geltend gemacht worden, dass die Beobachtungen mit einer anderen älteren Auffassung des Zerreissungsvorganges vereinbar wären, welche *die maximale tangentiale oder Schubspannung* als maassgebend für die Zerlegung betrachtet. Diese Schubspannung ist in der That mit der Differenz der longitudinalen und der transversalen Hauptspannung proportional, die sich bei unseren Beobachtungen constant fand, aber sie wirkt gegen eine Ebene, *die unter 45° gegen den Querschnitt des Präparates geneigt ist.* Ich kann mir demgemäss physikalisch nicht vorstellen, wie diese Schubkraft den Zerfall *nach einem Querschnitte*, z. B. nach einer glänzenden Spaltungsfläche bewirken sollte. Die Uebereinstimmung erscheint mir deshalb mehr als zufällig; *in der That tritt sie bei einer anderen unten zu beschreibenden Versuchsanordnung nicht ein.*

Die im hiesigen Institut durchgeführten Untersuchungen haben eine Reihe interessanter Beobachtungen des Hrn. Föppl[1] veranlasst, die das im Eingang formulirte Problem gleichfalls zum Gegenstand haben. Bei diesen sind Gesteinspräparate, insbesondere gepresste Cementwürfel durch Druck auf ein oder

1) A. Föppl, l. c.

auf zwei Flächenpaare zertrümmert worden, unter Anwendung des alten Verfahrens der Druckausübung, allerdings mit der wichtigen Verbesserung der Anwendung eines Schmiermittels. Diese Versuche, bei denen der Moment des Zerfalles nach dem Eintreten der ersten Sprünge abgeschätzt wurde, ergaben im ersten und im zweiten Falle nahezu den gleichen Grenzdruck — nach Hrn. Föppl's Bezeichnung die „*Druck*festigkeit“ gleich der „*Umschlingungs*festigkeit“ —, also ein Resultat, das mit dem hier erhaltenen nicht übereinstimmt. In der That würde die Uebertragung unserer Resultate auf die Föppl'schen Beobachtungen einen *kleineren* Wert der Umschlingungsfestigkeit verlangen, da diese sich der Zugfestigkeit gleich finden müsste, die Zugfestigkeit aber stets erheblich (bei Cement 3—5 mal) kleiner ist, als die Druckfestigkeit.

Die Bedenken, die ich gegen die ganze Anordnung habe, ergeben sich aus dem Vorstehenden; ich halte aber keineswegs für wahrscheinlich, dass ihre Berücksichtigung eine Uebereinstimmung zwischen den Föppl'schen Resultaten und den unsrigen bewirken würde. Bei der ungemein geringen Zahl der für die Grundfragen der Theorie brauchbaren Beobachtungen wäre jeder Versuch, dem von uns in zwei speciellen Fällen festgestellten Gesetz eine *allgemeine* Bedeutung beizulegen, verfrüht.

4. Der Mohr'schen Regel erster Teil.

Aus dem bisher Entwickelten ergiebt sich von selbst, dass ich Versuchen, wie dem kürzlich von Hrn. Mohr[1]) erneuten, mit einem einzigen Gesetz das ganze Bereich der Festigkeitserscheinungen für spröde und für ductile Körper, für homogene und für inhomogene Deformationen zu umfassen, mit schweren principiellen Bedenken nahetrete. Nach meiner Ueberzeugung sind wir noch weit davon entfernt, einen klaren Einblick in die hier vorliegenden complicirten Erscheinungen zu haben. Es fehlt an sicheren empirischen Grundlagen sowohl für die Aufstellung, als für die Prüfung eines Elementargesetzes; die ungeheure Masse von mehr zufälligen, nämlich nicht nach einheitlichen Gesichtspunkten erzielten und sich

1) O. Mohr, Zeitschr. des Ver. deutscher Ing. **44**. p. 1524. 1900.

vielfältig widersprechenden Resultaten ist ein *gefährlicher* Besitz und kann in ausserordentlich verschiedenem Sinne verwertet werden. Demgemäss vermag ich auch auf die Uebereinstimmung gewisser einzelner Beobachtungsthatsachen mit der neuen Mohr'schen Regel — der ich den beanspruchten Namen einer *Theorie* aus später darzulegenden Gründen nicht zu geben vermag — ein entscheidendes Gewicht nicht zu legen, und dies um so weniger, als dieselbe gelegentlich etwas gewaltsam hergestellt ist und anderen, durchaus sicheren Thatsachen gegenüber durchaus fehlt.

Wenn ich im Folgenden die Mohr'sche Regel einer Analyse unterziehe, so folge ich dabei einer von technischer Seite gegebenen Anregung, wobei meine eigene Meinung über die Originalität der Mohr'schen Entwickelungen, welche in jedem Falle das Interesse des Physikers verdienen, und über den Fortschritt, der unzweifelhaft darin liegt, dass in denselben nicht nur die *Parameter*, sondern auch die *Form* des Festigkeitsgesetzes als mit dem Material wechselnd zugelassen werden, sich dieser Anregung gleichsinnig verband. Ich halte mich dabei nicht bei den eleganten geometrischen Constructionen auf, durch die Hr. Mohr den Spannungszustand eines Volumenelementes in einer ebenen Figur wiedergiebt, sondern versuche, das, was ich die Mohr'sche Regel nenne, nämlich das vorgeschlagene neue allgemeine Elementargesetz der Festigkeit für sich allein so darzustellen, wie es nach meiner Ansicht der Physiker auffassen muss. Dabei lasse ich im Gegensatz zu Hrn. Mohr jede Bezugnahme auf die Erscheinungen der Elasticitätsgrenze beiseite; die betreffenden Vorgänge erscheinen mir der strengen Fassung gar zu wenig fähig, wie schon die hier und da zu findende Definition jener Grenze durch die erste auftretende „grössere" bleibende Deformation deutlich zeigt.

Hr. Mohr geht unter stillschweigender Beibehaltung der unter 1. und 2. erörterten Annahmen von den zwei fundamentalen Hypothesen aus, dass 1. *die Bedingung des Zerfalles nur abhängt von den gegen die Trennungsfläche wirkenden Drucken oder Spannungen*, und dass 2. *diese Trennungsfläche stets auf der Ebene der grössten und der kleinsten Hauptspannung normal steht, also der mittleren Hauptspannung parallel ist*, woraus dann

sogleich folgt, dass *die Bedingung des Zerfalles von der mittleren Hauptspannung unabhängig ist.*

Es giebt nach der letzteren Annahme jederzeit *zwei* einander gleichwertige Trennungsflächen, die symmetrisch zu den extremen Hauptspannungen liegen, ausgenommen den Fall der Hauptebenen selber. Sind zwei der Hauptspannungen einander gleich, so wird die Zahl der gleichwertigen Trennungsebenen im allgemeinen *unendlich.*

Nach den obigen Grundsätzen ist der Spannungszustand in der Trennungsfläche allein durch die in der Ebene der grössten und der kleinsten Hauptspannung liegende normale und tangentiale Spannung σ und τ bestimmbar. Dabei scheint mir Hr. Mohr diesen beiden Kräften bei dem Vorgang des Zerfalles eine wesentlich verschiedene Rolle beizulegen. Die tangentiale Spannung stellt sich bei ihm als die in erster Linie wirksame dar, deren Wirkungsgrad durch die normale nur *modificirt* wird. So formulirt er seine fundamentale Annahme in den Worten: „Die Schubspannung in der Gleitfläche erreicht an der Grenze (d. h. derjenigen der Elasticität oder der Festigkeit) einen von der Normalspannung und von der Materialbeschaffenheit abhängigen grössten Wert". Der Zerfall erscheint hier also als ein *Abschieben* längs der Trennungsfläche, bewirkt durch die gegen dieselbe wirkende *Schubkraft.*

Wie dem auch sei, jedenfalls lässt sich der *erste Teil der Mohr'schen Regel* in die Annahme fassen, dass es *für jede Substanz eine Beziehung zwischen der Normal- und der Tangentialspannung* σ *und* τ *gegen die Grenzfläche, also eine Gleichung*

$$f(\sigma, \tau) = 0$$

giebt, welche nur der Substanz individuelle Parameter enthält und für den Moment des Zerfalles charakteristisch ist, derart, dass für alle Wertpaare, welche

$$f(\sigma, \tau) > 0$$

machen, das Bestehen des Zusammenhanges unmöglich wird. Die Function $f(\sigma, \tau)$ ist dabei aus Beobachtungen zu erschliessen, und Hr. Mohr versucht dies für ein gewisses Wertbereich von σ und τ wirklich zu thun, worauf unten einzugehen sein wird.

5. Der Mohr'schen Regel zweiter Teil.

Der *zweite* Teil der Mohr'schen Regel bezieht sich auf *die Grösse der für den Zerfall maassgebenden Hauptspannungen und die Lage der Trennungsfläche gegen deren Richtungen.* Dieser Teil ist eine notwendige Ergänzung des vorigen, da jener zwar über die Verhältnisse *in* der Trennungsfläche etwas aussagt, aber für ein beliebig gegebenes vollständiges Spannungssystem die Lage der Trennungsfläche und damit die gegen dieselbe wirkenden Spannungen noch ganz unbestimmt lässt.

Es wird ein Coordinatensystem $\sigma\,\tau$ mit dem Anfangspunkt o eingeführt, in dem positive σ Zug-, negative Druckspannungen repräsentiren sollen; die Formel $f(\sigma, \tau) = 0$ stellt dann eine Curve (*Hüllcurve* nach Hrn. Mohr) dar, der nach gewissen Ueberlegungen eine ungefähr parabolische Gestalt (vgl. Fig. 3) beigelegt wird; die möglichen Wertpaare σ, τ liegen im Innenraum. Ein Punkt p der Hüllcurve giebt ein Wertpaar σ, τ, bei dem der Zerfall des Materiales eintritt.

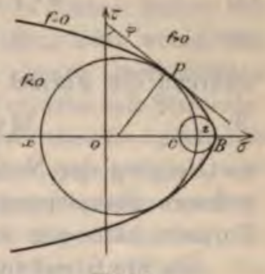


Fig. 3.

Es soll dann der Winkel φ, den die Tangente an der Hüllcurve in p mit der $-\tau$-Axe einschliesst (vgl. Fig. 3), *die gegenseitige Neigung der beiden mit dem Spannungssystem gleich vereinbaren Trennungsflächen darstellen, $\frac{1}{2}\varphi = \psi$ aber ihre Neigung gegen die kleinste Hauptspannung* (Druck als negative Spannung gerechnet). ψ ist hiernach auch der Winkel zwischen der *Normalen* auf einer der möglichen Trennungsflächen und der Richtung der *grössten* Hauptspannung.

Die dem Punkt p, bez. dem Wertpaar σ, τ entsprechenden Werte der grössten und der kleinsten Hauptspannung sollen sich auf folgende Weise ergeben.

Man errichte in p ein Lot auf der Hüllcurve und beschreibe um dessen Schnittpunkt mit der σ-Axe einen Kreis (den zu p gehörigen *Hauptkreis* nach Hrn. Mohr), der die Curve in p berührt, und die σ-Axe in den Punkten x und z schneidet. *Dann soll die Strecke $\overline{oz}$ die grösste, $\overline{ox}$ die kleinste Hauptspannung in dem betrachteten Körperelement darstellen;* die

mittlere Hauptspannung bleibt, als nach den früheren Annahmen ohne Einfluss auf den Vorgang, unbestimmt.

Die vorstehend beschriebenen Regeln haben in ihrer geometrischen Eleganz etwas ungemein Bestechendes; leider giebt ihnen der Verfasser keinerlei physikalische Deutung und mir ist es nicht gelungen, einen *physikalischen* Gedanken darin zu finden. Ihr analytischer Ausdruck ist natürlich sofort angebbar. Stellt σ_3 die grösste, σ_1 die kleinste Hauptspannung dar, und wird gemäss dem Früheren die Grenzcurve durch eine Gleichung zwischen σ und τ bestimmt, so gilt ersichtlich nach der oben erörterten Construction

$$(1) \qquad 2\tau\sqrt{1+(d\tau/d\sigma)^2} = \sigma_3 - \sigma_1,$$

$$(2) \qquad 2(\sigma + \tau\, d\tau/ds) = \sigma_3 + \sigma_1,$$

während die Formel

$$3) \qquad \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg} 2\psi = -d\sigma/d\tau$$

die Neigung der Normalen auf der Trennungsfläche gegen die grössere Hauptspannung bestimmt. Die Anwendung dieser Formeln hätte nun folgendermaassen zu geschehen.

Da die Gleichung $f(\sigma, \tau) = 0$ der Grenzcurve als bekannt zu denken ist, so kann man die linken Seiten der Formeln (1) und (2) durch σ (oder durch τ) allein ausdrücken und dann σ (oder τ) aus den beiden Gleichungen eliminiren. Hierdurch erhält man dann diejenige Beziehung zwischen der kleinsten und der grössten Hauptspannung, welche nach der Mohr'schen Regel der Grenzcurve entspricht, also den Moment des Zerfalles charakterisirt.

Nimmt man beispielsweise die kleinste Spannung σ_1 als gegeben an, so gestattet diese Gleichung den zugehörigen Wert der grössten Spannung σ_3 zu finden, der den Zerfall bewirkt. Die betreffende Formel ist schon bei den einfachsten Annahmen über die Function $f(\sigma, \tau)$ sehr complicirt.

Ist so das zu σ_1 gehörige σ_3 gefunden, so hat man aus einer der beiden Gleichungen (1) und (2) unter Zuhülfenahme der Formel $f(\sigma, \tau) = 0$ das dem Wertpaar σ_1, σ_3 zugehörige σ oder τ zu berechnen und für dieses $d\sigma/d\tau$ zu bilden, das nach (3) die Lage der Trennungsfläche bestimmt. Auch diese Operation wird schon in einfachen Fällen sehr umständlich.

Dies ist natürlich kein principieller Einwand gegen die Regel. Solange es aber nicht gelingt, alle diese Beziehungen physikalisch zu deuten, vermag ich das von Hrn. Mohr aufgestellte Gesetz als eine *Theorie* der Festigkeit nicht anzusehen.

6. Einwände allgemeiner Art.

Es mag erlaubt sein, schon hier ein allgemeines Bedenken einzuschalten. Dass nur die gegen die *Trennungsfläche* wirkenden Drucke oder Spannungen den Zerfall bedingen, erscheint auf den ersten Blick ausserordentlich plausibel. Aber gewisse Beobachtungen scheinen damit doch nicht vereinbar zu sein.

Die gewöhnlichen Zerreissversuche von Stäben liefern bei vielen Substanzen Trennungsflächen, die ganz oder wenigstens in ihren primär entstandenen Teilen mit ebenen Querschnitten zusammenfallen; die hier ausgeführten Versuche mit Steinsalzstäben ergaben, wie oben gesagt, sogar *absolut ebene hochglänzende* Spaltflächen. Nach Symmetrie wirken aber gegen diese Querschnitte nur die zu ihnen normalen Längsspannungen der Präparate; wenn also, wie wir in zwei Fällen zeigen konnten, und wie jedenfalls noch in vielen anderen Fällen stattfindet, die Zerreissungsfestigkeit derartiger Objecte im höchsten Maasse von den Querdrucken abhängig ist, denen dieselben ausgesetzt sind, so liegt hier ein auffallender Widerspruch mit den Grundannahmen vor, auf denen die Mohr'sche Regel beruht.

Hr. Mohr sucht diesen Widerspruch dadurch zu entkräften, dass er den in den genannten Fällen factisch beobachteten Bruchflächen *die Eigenschaft der theoretischen Trennungsflächen abspricht.*

Uns interessirt insbesondere der Fall des Zerreissens spröder Körper von cylindrischer Form, über deren Querschnitt die Spannungen als merklich gleichförmig verteilt angenommen werden dürfen. Hier sind bei ringsum gleichförmiger Einwirkung auf die Mantelflächen die beiden transversalen Hauptspannungen einander gleich, und da die Normale auf der Trennungsfläche nach der Mohr'schen Regel in der Ebene durch die grösste und die kleinste Hauptspannung liegen und mit der grösseren von ihnen den durch (3) bestimmten Winkel ψ (der weder 0^0 noch 90^0 werden kann) einschliessen

soll, so giebt die Regel unendlich viele Trennungsflächen als möglich, deren Normalen einen Kreiskegel um die ausgezeichnete Hauptspannung als Axe erfüllen.

Hr. Mohr bezeichnet es nun als eine Consequenz seiner Theorie, dass in diesem Falle, wo unendlich viele mögliche Bruchflächen vorhanden sind, *keine* von ihnen, sondern anstatt ihrer die zu der ausgezeichneten Hauptspannung normale Ebene factische Trennungsfläche wird.

Ich halte eine solche Schlussweise: *bei unendlich vielen gleichwertigen Möglichkeiten tritt keine von ihnen ein*, für principiell unhaltbar und ohne Analogon in der Physik. Um sich das Bedenkliche derselben klar zu machen, genügt im Grunde die Ueberlegung, was nach derselben bei einer allmählichen Erreichung des Zustandes zweier gleicher Hauptspannungen für ein seltsamer unstetiger Grenzübergang stattfinden müsste, der zur Folge hätte, dass bei unendlich kleinen Abweichungen — und solche sind in der Wirklichkeit stets vorhanden — *nicht* jene normal zur ausgezeichneten Hauptspannung gelegene Trennungsfläche, sondern eine um einen endlichen Winkel dagegen geneigte eintreten müsste.

Wenn man die geschilderte Schlussweise aber trotzdem anwenden wollte, so müsste man sie wenigstens *consequent* anwenden. Zunächst ist nicht einzusehen, warum jene Abweichung von der Theorie nicht schon bei *zwei* gleichwertigen Möglichkeiten eintreten soll. Und sodann liegen im Grunde die unzählig vielen gleichwertigen Möglichkeiten selbst dann vor, wenn die *Orientirung* der Grenzfläche durch die Mohr'sche Regel *eindeutig* bestimmt ist, nämlich hinsichtlich der *Lage* der Fläche innerhalb des Präparates. Letztere ist in der That bei den hier speciell vorausgesetzten, wie bei den meisten anderen Festigkeitsversuchen gänzlich unbestimmt.

Ich meine: wie bei unendlich vielen gleichwertigen *Lagen* der theoretischen Trennungsflächen in Wirklichkeit diejenige eintritt, die durch zufällige locale Schwächen des Materiales bestimmt ist, so muss dasselbe auch im Falle unendlich vieler gleichwertiger *Orientirungen* geschehen. Ein streng homogener und streng homogen deformirter spröder Körper kann überhaupt nicht nach einzelnen Flächen zerbrechen, sondern muss bei Erreichung der Festigkeitsgrenze in unendlich viele Teile, von

je nach den Umständen verschiedenem Charakter, also praktisch in Staub zerfallen, wie das u. a. bei den Jenenser Versuchen über die Druckfestigkeit des Glases eingetreten ist.

Auf die weitere Frage, ob denn wenigstens die etwas gewaltsam eingeführte *neue* Bruchfläche in Wirklichkeit *immer so auftritt, wie die corrigirte Regel sie verlangt*, wird bei Besprechung specieller Beobachtungsresultate einzugehen sein.

7. Die Mohr'sche Hüllcurve und ihre Verwendung.

Ich wende mich nun der Betrachtung der Hülfsmittel zu, die Hr. Mohr zur Ableitung der Gestalt der von ihm eingeführten Hüllcurve $f(\sigma, \tau) = 0$ von der Gleichung benutzt.

Er nimmt als wahrscheinlich an — was man gewiss zugestehen wird — dass *jeder Körper durch einen allseitig gleichen Zug — er heisse* $\bar{\varkappa}$ *— zerrissen werden kann*, und schliesst daraus, dass die Curve, die nach ihrer Bedeutung zwei zur σ-Axe symmetrische Teile besitzen muss, in einem Punkte B der Fig. 3, wobei $\overline{oB} = \bar{\varkappa}$ ist, die σ-Axe *vertical schneiden* müsste.

Offenbar liegt hier ein Fehler vor. Ein solcher Verlauf entspricht nicht dem vorausgesetzten Zustand; die Mohr'sche Construction führt bei dieser Curvenform für den Punkt B *nicht* auf einen verschwindend kleinen Hauptkreis (wie er der Gleichheit der extremen Hauptspannungen entsprechen würde), sondern auf den Krümmungskreis der Hüllcurve im Punkte B; sie liefert also eine grösste Spannung $\overline{oB}$, eine kleinste $\overline{oC}$. Um das gewünschte Resultat zu geben, müsste die Curve in B die σ-Axe unter einem anderen Winkel, als 90^0 treffen, wahrscheinlich wohl, da ein plötzliches Abbrechen nicht verständlich wäre, sie *tangiren* (vgl. Fig. 4); das Gebiet $f(\sigma, \tau) < 0$ würde also dort in eine Spitze auslaufen. Mit dieser Modification wollen wir die Mohr'sche Festlegung eines ersten Punktes der Hüllcurve acceptiren.

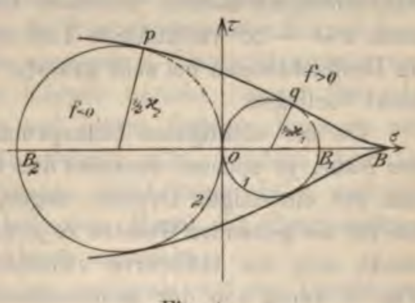


Fig. 4.

Zwei weitere Punkte erhält Hr. Mohr durch Heranziehung der absolut grössten Spannungen σ gleich $+\varkappa_1$ und $-\varkappa_2$, welche der Körper *bei einseitigem Zug* und *bei einseitigem Druck* aushält. Da bei diesen Vorgängen je eine Hauptspannung gleich $+\varkappa_1$ oder $-\varkappa_2$ ist, die anderen beiden aber hiergegen sehr klein, praktisch gleich Null sind, so muss die Hüllcurve zwei Kreise (1) und (2) mit den Radien $\frac{1}{2}\varkappa_1$ und $\frac{1}{2}\varkappa_2$ tangiren, welche die τ-Axe im Coordinatenanfang von rechts und von links her berühren (vgl. Fig. 4).

Für den Verlauf der Hüllcurve nach der Seite von $\sigma = -\infty$ betrachtet Hr. Mohr als maassgebend, dass ein Körper *durch allseitig gleichen Druck* wahrscheinlich *nicht* zertrümmert werden kann. Hieraus würde sich nach dem oben Gesagten nur ergeben, dass das Gebiet $f(\sigma, \tau) < 0$ den Punkt $\sigma = -\infty, \tau = 0$ enthalten muss. Hr. Mohr vermutet weiter, dass unter hohem Druck alle Körper ein derartig plastisches Verhalten annehmen möchten, dass ihr Zerfall bei beliebig hoher Normalspannung σ nur von der Tangentialspannung τ abhängen würde, und schliesst daraus, dass die Hüllcurve mit unendlich abnehmendem σ sich zwei Parallelen zur σ-Axe von innen her asymptotisch nähern wird. Erinnert man sich, dass in flüssigen Körpern im Zustande des Gleichgewichtes tangentiale Spannungen überhaupt nicht bestehen können, so wird man ein derartiges dauerndes Wachsen der Schubspannung τ mit wachsender Erweichung des Körpers nicht gerade für wahrscheinlich halten. Indessen kommt für das Weitere jener nach $\sigma = -\infty$ verlaufende Teil der Curve nicht in Betracht, da Beobachtungen bei sehr grossen negativen Hauptspannungen nicht vorliegen.

Da die wichtigsten Inanspruchnahmen der Materialien in der Nähe, ja speciell *zwischen* den Fällen des einseitigen Zuges und des einseitigen Druckes liegen, so verfährt Hr. Mohr, um die für sie geltenden Gesetze zu gewinnen, folgendermaassen. Er denkt sich die Hüllcurve zwischen den Punkten p und q in Fig. 4 wenig von der gemeinsamen Tangente an den beiden gezeichneten Hauptkreisen abweichend und erhält in Annäherung ein Stück der unbestimmten Curve, *indem er dafür direct jene gemeinsame Tangente einsetzt.*

Von diesem Curvenstück macht er dann die folgenden

Anwendungen. Ein Kreis um den O-Punkt, welcher die Hüllcurve berührt, entspricht dem Falle zweier entgegengesetzt gleicher extremer Hauptspannungen $\pm \varkappa_3$, wobei $\varkappa_3$ durch die Länge des Lotes $\overline{o r'}$ angegeben wird. Der Schnittpunkt der Hüllcurve mit der τ-Axe gehört dem Falle zu, dass gegen die Grenzfläche nur eine tangentiale Spannung wirkt, und die Strecke $\overline{o s'} = \varkappa_4$ repräsentirt den Wert dieser Spannung, welcher den Zerfall bedingt.

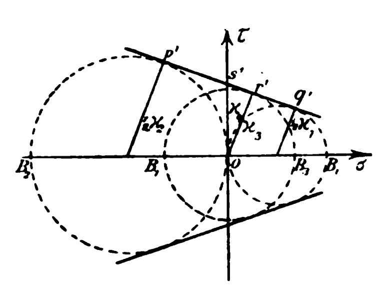


Fig. 5.

Für $\varkappa_3$ und $\varkappa_4$ folgt dann das Wertsystem

$$(4) \qquad \varkappa_3 = \frac{\varkappa_1 \varkappa_2}{\varkappa_1 + \varkappa_2}, \qquad \varkappa_4 = \tfrac{1}{2} \sqrt{\varkappa_1 \varkappa_2};$$

ausserdem findet sich der Winkel $\psi = \frac{1}{2} \varphi$ zwischen der Trennungsfläche und der kleinsten Hauptspannung constant; für ihn gilt

$$(5) \qquad \cos \varphi = \frac{\varkappa_2 - \varkappa_1}{\varkappa_2 + \varkappa_1}, \quad \text{also} \quad \sin^2 \psi = \frac{\varkappa_1}{\varkappa_1 + \varkappa_2}.$$

8. Die Mohr'sche Regel und die Thatsachen.

Was die numerische Vergleichung der Mohr'schen Regel mit der Erfahrung angeht, so beschränke ich mich hier gemäss früher Gesagtem nur auf das Gebiet der Festigkeit spröder Körper, lasse also alles, was sich auf die sogenannte Elasticitätsgrenze und auf die Festigkeit ductiler Körper bezieht, ausser Betracht, — nicht, weil ich einzelne auf jenem Gebiete liegende auffallende Bestätigungen totschweigen will, sondern weil ich auf diesem Gebiet keine eigenen Erfahrungen habe und weil zur Widerlegung der Mohr'schen Regel die Beschränkung auf jene eine Erscheinungsklasse ausreicht.

Hier möchte ich zunächst nochmals auf die Unzulässigkeit hinweisen, den Fall der *inhomogenen* Deformationen mit dem der *homogenen* zusammenzuwerfen. Dem früher dargethanen *grossen* Widerspruch zwischen Biegungs- und Dehnungsfestigkeit ordnet sich jetzt nach Aufstellung der dafür

geltenden Gesetze ein nicht viel kleinerer der letzteren mit der Drillungsfestigkeit zu. Nach der ersten Formel (4), die auf den Fall der Drillung eines Kreiscylinders Anwendung findet, müsste die Grenzspannung $\varkappa_3$ bei der Drillung *kleiner* sein, als die bei der Dehnung $\varkappa_1$; die p. 569 besprochenen Beobachtungen von Brodmann an geätztem, d. h. von der Oberflächenschicht befreitem Glas ergaben sie nicht unerheblich *grösser*. Andere Beobachtungen geben ähnliche Resultate. Wenn daneben sich einzelne Uebereinstimmungen finden, wie die von Hrn. Mohr herangezogene bei Gusseisen, so wird dadurch die Thatsache, dass sich bei der Anwendung seiner Regel auf *inhomogene* Deformationen Widersprüche mit der Erfahrung ergeben, nicht beseitigt.

Was nun schliesslich die wenigen untersuchten Fälle *homogener* Deformationen betrifft, die eine Verwertung zur Prüfung der Regel gestatten, so bieten die p. 575 beschriebenen Föppl'schen Versuche über Druck- und über Umschlingungsfestigkeit unzweifelhaft eine teilweise Bestätigung derselben, insofern die zwei Beobachtungen angesehen werden können als angestellt bei *gleichen extremen* Hauptspannungen, während die *mittlere* Hauptspannung *einmal* der *grössten*, *einmal* der *kleinsten* gleich war. Hier verlangt die Mohr'sche Regel factisch gleiche Grenzspannungen.

Dagegen kann ich bezüglich der Lage der Trennungsflächen nur die p. 582 erörterten Einwände in noch verstärktem Maasse von neuem erheben; denn die auch in ziemlich bedenklicher Weise *modificirte* Regel entspricht nur im Falle der Umschlingungsfestigkeit, *nicht* im Falle der Druckfestigkeit der Erfahrung. Einseitig gepresste cylindrische Präparate zerfallen nicht nach Ebenen normal zur ausgezeichneten Hauptspannung, sondern nach Flächen, die ganz anders verlaufen und viel eher die ausgezeichnete Druckrichtung *in sich zu enthalten scheinen*. Es scheint mir daher, dass die Mohr'sche Regel zwar mit dem wirklichen Verhältnis der Grenzdrucke bei den Föppl'schen Beobachtungen übereinstimmt, aber die Lagen der Trennungsflächen nicht richtig angiebt.

Ich komme schliesslich zu dem Verhältnis der Mohr'schen Regel zu den hier in Göttingen angestellten Beobachtungen über Festigkeit bei homogener Deformation. Dass die

dabei gefundenen Resultate mit der Regel schwer zu vereinigen sind, ist ohne weiteres klar. Anknüpfend an die Darstellung in Fig. 5 würden die Beobachtungen auf je zwei *gleich*grosse auf der positiven und der negativen Seite der σ-Axe liegende Hauptkreise führen, die von den bez. Grenzcurven $f(\sigma, \tau) = 0$ tangirt werden müssten. Die Hüllcurve müsste hiernach in dem betreffenden Bereich ungefähr horizontal verlaufen, die Bruchfläche demgemäss unter etwa 45° gegen den Querschnitt des Präparates geneigt liegen. Ueber den Widerspruch des letzteren mit der Wirklichkeit ist oben wiederholt gesprochen worden; dass auch unter Beiseitelassung dieses Punktes wegen der die Zugfestigkeit im allgemeinen weit übertreffenden Druckfestigkeit ein nahezu horizontaler Verlauf der „Hüllcurve" in der Nähe der τ-Axe wenig wahrscheinlich ist, ergiebt sich aus dem p. 582 im Anschluss an die Darlegungen des Hrn. Mohr über den Verlauf der Curve im ganzen Gesagten.

Hr. Mohr sucht den Widerspruch dadurch zu beseitigen, dass er das Stearin-Palmitinsäure-Präparat (das er einigermaassen mit Unrecht „Stearin" nennt) als „ohne Zweifel" *plastisch* bezeichnet und bezüglich des Steinsalzes vermutet, „dass das ungleichförmige Eindringen der hochgepressten Kohlensäure in die Poren des Versuchskörpers einen störenden Einfluss ausgeübt hätte." Beide Argumentationen scheinen mir wenig glücklich.

Was die erste angeht, so handelt es sich nach dem p. 574 Gesagten nicht *darum*, ob der Körper unter *irgend welchen* Umständen plastisch *wird*, sondern *darum*, ob er unter den *wirklich angewendeten* Drucken plastisch *ist*. Davon, dass unser „Stearin" bei den Versuchen keine nennenswerten dauernden Deformationen erlitt, haben wir uns selbstverständlich vor Anstellung der grossen Beobachtungsreihen überzeugt. Um eine zahlenmässige Darstellung der Verhältnisse zu geben, teile ich die Werte der Durchmesser vor und nach der Zerreissung mit, die auf Veranlassung der Mohr'schen Arbeit neuerdings an einem Präparat gemessen sind, das genau nach dem früheren Verfahren angefertigt war. Dem Wert 5,55 mm *vor* dem Zerreissen entsprach 5,54 mm *nach* dem Zerreissen; der Unterschied fällt in das Bereich der Beobachtungsfehler.

Um den Versuch Hrn. Mohr's, diese Beobachtungsreihe seiner Regel zu unterwerfen, definitiv zurückzuweisen, habe ich einige orientirende Beobachtungen über die *Druckfestigkeit* des benutzten Materiales angestellt. Würfelförmige Präparate von 10—12 mm Kantenlänge wurden mit einer Kreissäge aus dem Gusskuchen herausgeschnitten, mit Hülfe von Messer und Sandpapier geglättet und darauf mittels einer Hebelvorrichtung zwischen geschmierten Hartgummiplatten zerdrückt. Eine (plastische) Deformation konnte bei stetig wachsender Belastung nicht wahrgenommen werden; als ein Druck von rund 60 Atm. erreicht war, zerfielen die Präparate plötzlich in unzählige Bruchstücke, die, soweit sie von den inneren Teilen herrührten, einem feinen Sande glichen.

Der hiermit festgestellte Wert der Druckfestigkeit ist nun aber mit der Mohr'schen Regel völlig unvereinbar. Die oben beschriebenen Zerreissversuche hatten für die Grenzspannung bei 1 Atm. äusserem Druck den Wert 13,5 Atm., bei 41,3 Atm. äusserem Druck den Wert $-26{,}7$ Atm. ergeben. Die drei Beobachtungen führen also bei der Mohr'schen Construction zu den drei in Fig. 6 mit 1, 2, 3 bezeichneten Hauptkreisen, von denen 1 und 2 nahezu den in Fig. 4 mit gleichen Zahlen bezeichneten entsprechen. Dabei ist $\overline{oa} = 13{,}5$, $\overline{ob} = 1{,}0$, $\overline{oc} = 26{,}7$, $\overline{od} = 41{,}3$, e stellt das Centrum des Kreises 2 vom Radius 30,0 dar.

Die Mohr'sche Regel verlangt, dass die gemeinsame Tangente $\overline{pq}$ an den Kreisen 1 und 2 den Kreis 3 tangiren soll. Die Fig. 6 zeigt, dass dies auch nicht entfernt stattfindet, und dass der Ausweg, durch eine besondere Form der Grenzcurve $f(\sigma, \tau) = 0$ die Regel zu retten, a limine abzuweisen ist, *da ja der Hauptkreis 3 vollständig innerhalb des Hauptkreises 2 liegt.*

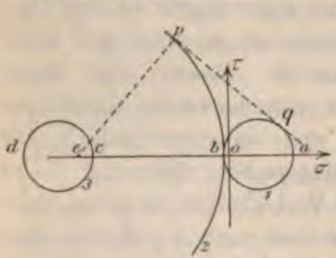


Fig. 6.

Beiläufig sei darauf aufmerksam gemacht, dass der erhaltene Wert der Druckfestigkeit, wie schon p. 575 angedeutet, die Vermutung widerlegt, es wäre ein bestimmter Wert der maximalen Tangentialspannung für den Zerfall maassgebend.

Denn diese Spannung hat sich bei den Druckversuchen 4 bis 5 mal so gross ergeben, wie bei den Zerreissungsversuchen.

Auf den merkwürdigen Gedanken, für die Abweichung der an Steinsalz erhaltenen Resultate von seiner Regel das „ungleichförmige Eindringen der Kohlensäure in die Poren des Versuchskörpers" verantwortlich zu machen, hätte Hr. Mohr nicht kommen können, wenn er eines der glasklaren, hochpolirten Präparate gesehen hätte; eine eingehende Widerlegung des Argumentes ist jedenfalls unnötig.[1]) Doch hielt ich es für erwünscht, auch hier durch Anstellung einiger orientirender Beobachtungen über Druckfestigkeit die Unrichtigkeit der Regel ganz direct augenfällig zu machen.

Hierzu wurden einige nahezu würfelförmige Spaltungsstücke von Steinsalz auf allen Flächen plan geschliffen und leicht polirt, darauf zwischen Hartgummiplatten, die mit einer dünnen Schicht eines zähen Schmiermittels bedeckt waren, aufrecht stehend mittels eines Hebelwerkes zerpresst. Ein merkliches Eindrücken der Präparate in die Platten fand nicht statt. Hr. stud. Hartmann hat diese Beobachtungen nach meiner Angabe ausgeführt, auch die Präparate hergestellt.

Bis zu einem Druck von 150 Atm. hielten sich die Präparate völlig intact; bei dieser Belastung etwa traten die ersten verticalen Sprünge auf, die bei weiter gesteigertem Drucke allmählich an Zahl zunahmen; bei ungefähr 300 Atm. zerfiel das Präparat plötzlich in zahlreiche verticale Prismenelemente und brach zugleich in sich zusammen, wobei die äusseren Prismen ziemlich erhalten blieben. Nebenbei machten sich ein wenig die bekannten Gleitungen nach den Granatoëderflächen geltend, ohne doch ihrerseits das Präparet zu zertrümmern.

Diese Versuche widersprechen einerseits der Mohr'schen Regel bezüglich der Lage der Bruchflächen, die, in Uebereinstimmung mit zahlreichen anderen Beobachtungen, sich uns nicht normal, sondern parallel zu der ausgezeichneten Hauptspannung ergaben. Andererseits und hauptsächlich ist wiederum

1) Um die Verwendung desselben Argumentes gegen die vorige Beobachtungsreihe von vornherein abzuschneiden, bemerke ich, dass auch das Stearin- und Palmitinsäuregemisch völlig dicht ist und bei der Bearbeitung mit einem scharfen Instrument blanke Oberflächen zeigt.

der Wert der beobachteten Grenzspannung mit der Regel unvereinbar. Denn die Zerreissversuche ergaben die Grenzspannung gleich 56 Atm. bei 1 Atm. Seitendruck, gleich 5 Atm. bei 52 Atm. Seitendruck. Die drei Beobachtungsresultate führen also auf die drei Hauptkreise 1, 2, 3 in Fig. 7, wobei die Kreise 1 und 2 der Deutlichkeit halber mit einer fast unmerklichen Ungenauigkeit durch den Coordinatenanfang gelegt sind und $\overline{oa} = 56$, $\overline{ob} = 5$, $\overline{oc} = 52$ ist; d stellt das Centrum des Kreises 2 vom Radius $\overline{op} = 150$ dar. Die gemeinsame Tangente $\overline{pq}$ an den Kreisen 1 und 2 sollte auch den Kreis 3 berühren; die Fig. 7 zeigt die Unerfüllbarkeit dieser Forderung und macht auch jeden Versuch unnötig, durch die Annahme einer stark gekrümmten Gestalt der Grenzcurve $f(\sigma, \tau) = 0$ die Erfüllung herbeizuführen. Bezüglich der Bedeutung des absoluten Wertes der Druckfestigkeit gilt wiederum das p. 588 zu der vorigen Beobachtungsreihe Bemerkte.

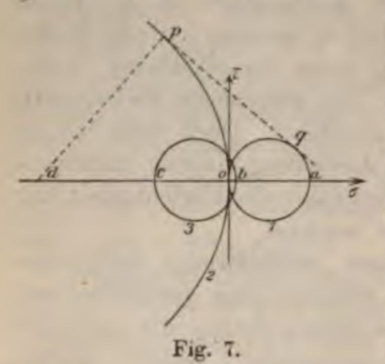


Fig. 7.

Man könnte die allgemeine Bedeutung der für Steinsalz erhaltenen Resultate durch den Hinweis auf die krystallinische Natur der benutzten Substanz zu entkräften suchen. Es möge deshalb noch einmal betont werden, dass die Präparate sich bei der getroffenen Anordnung durchaus wie isotrope Körper verhalten müssen. Die elastischen Gleichungen sind für sie den bei isotropen Medien gültigen identisch, die Verteilung der Spannungen ist demgemäss dieselbe, wie bei einem isotropen Präparat; die Festigkeit ist nach den Richtungen aller Kanten die gleiche, insbesondere sind die bei Zug und bei Druck auftretenden Bruchflächen sämtlich gleichwertig.

Der einzige Unterschied, der darin liegt, dass bei den letzten Versuchen nicht alle durch die Druckrichtung gehenden Ebenen gleichwertig sind, ist wirkungslos, da die Ebenen *kleinster* Cohäsion *dieselben* Spaltflächen sind, nach denen bei den Zerreissversuchen der Zerfall stattfindet. Die anderen Ebenen mit grösserer Cohäsion treten also gar nicht in Wir-

kung; der Effect ist derselbe, als seien *alle* durch die Druckrichtung gehenden Ebenen gleichwertige Spaltflächen.

Schluss.

Allem Anschein nach sind wir von der Erkenntnis der wahren Gesetze der Festigkeit noch weit entfernt. Die Mohr'sche Regel, die bei technischen Anwendungen die schätzbarsten Dienste leisten mag, hat keinerlei allgemeine Bedeutung und führt sogar in den einfachsten Fällen homogener Deformationen zu unlösbaren Widersprüchen mit der Erfahrung.

Um die Aufklärung der offenbar höchst complicirten Verhältnisse zu fördern, bedarf es vor allen Dingen noch systematischer Beobachtungen unter Umständen, die nicht durch technische Bedürfnisse, sondern allein durch wissenschaftliche Gesichtspunkte vorgeschrieben werden. Vorläufig empfiehlt sich noch immer die Beschränkung auf die denkbar einfachsten Fälle, insbesondere auch auf den Fall der homogenen Deformation, und zwar von Körpern, die sich bis zum Zerfall nicht erheblich dauernd verändern, d. h., die geringe Ductilität besitzen. Dabei wird auf die vollkommene Homogenität der Präparate und auf die klare Definition ihrer Oberflächenbeschaffenheit der allergrösste Wert gelegt werden müssen.

Göttingen, Januar 1901.

(Eingegangen 18. Januar 1901.)

12. *Ueber charakteristische Curven bei der elektrischen Entladung durch verdünnte Gase; von Eduard Riecke.*

1. Wenn ein elektrischer Strom durch eine mit einem verdünnten Gase gefüllte Geissler'sche Röhre hindurchgeht, so tritt an Stelle des Ohm'schen Gesetzes eine sehr viel complicirtere Beziehung zwischen der Stromstärke und der Spannungsdifferenz der Elektroden. Es ist bis jetzt nicht möglich bei gegebener Spannungsdifferenz die Stromstärke aus der Natur des eingeschlossenen Gases, dem Grade seiner Verdünnung, aus der Form des Gefässes mit Hülfe allgemeiner Formeln zu berechnen; man ist vielmehr in jedem einzelnen Falle auf die empirische Ermittelung jenes Zusammenhanges angewiesen. Bei einer gegebenen Röhre wird man so für jeden Grad der Verdünnung eine Curve construiren können, durch welche die Spannungsdifferenz der Elektroden als Function der Stromstärke gegeben wird. Mit Benutzung einer in der Elektrotechnik gebräuchlichen Bezeichnung kann man eine solche Curve eine „*Charakteristik*" der Röhre nennen.[1]) Die folgenden Untersuchungen beziehen sich auf die Abhängigkeit der Charakteristik von der Verdünnung und auf die Veränderungen, welche sie durch magnetische Einflüsse erleidet. Die Resultate gelten natürlich zunächst nur für die bestimmte, bei den Versuchen benutzte Röhre; nach allem, was wir über Gasentladungen wissen, wird man ihnen aber doch eine etwas allgemeinere Bedeutung in qualitativer und zum Teil auch in quantitativer Hinsicht zuschreiben dürfen.

2. Die bei den Versuchen benutzte Röhre hatte die Gestalt einer Kugel von 5,9 cm Radius. Den verticalen Durchmesser der Kugel bezeichnen wir als ihre *Axe*, den Grosskreis. dessen Ebene zu der Axe senkrecht steht, als ihren *Aequator*, In einer Meridianebene der Kugel liegt eine feste, kreisförmige Elektrode, sodass ihr Mittelpunkt in der Ebene des Aequators

1) W. Kaufmann, Göttinger Nachr. p. 243. 1899.

sich befindet. Die Ebene der zweiten Elektrode geht ebenfalls durch die Axe; auch ihr Mittelpunkt liegt in der Ebene des Aequators; sie ist aber mittels eines Schliffstückes drehbar um die Axe. Bei den im Folgenden beschriebenen Versuchen war die drehbare Elektrode so gestellt, dass ihre Ebene mit der Ebene der festen einen Winkel von 90° bildete.

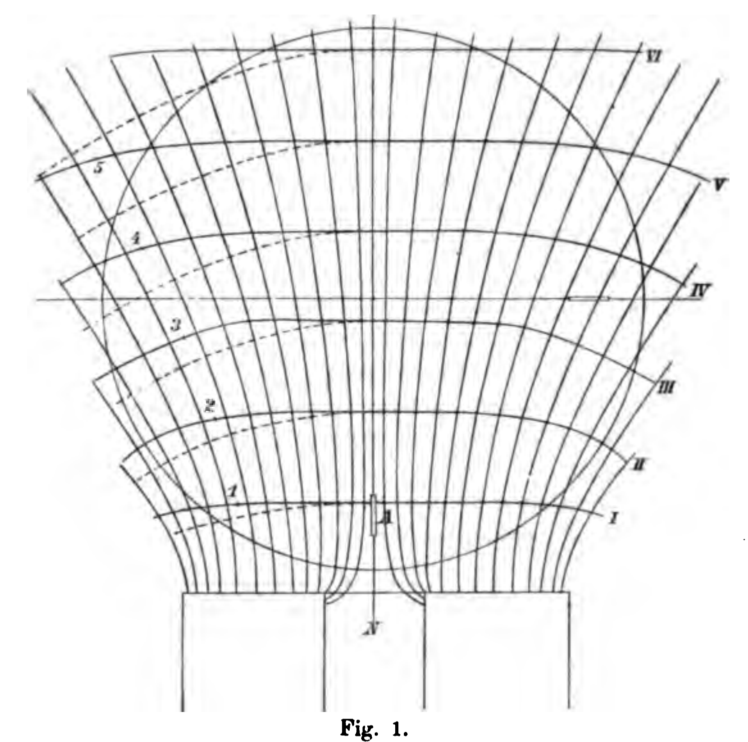


Fig. 1.

Die Entfernung der Mittelpunkte der beiden kreisförmigen Elektroden betrug dann etwa 6,5 cm. Die Röhre war mit Luft gefüllt.

3. Um den Einfluss eines Magnetfeldes auf den Verlauf der Charakteristik zu untersuchen, wurde ein cylindrischer Elektromagnet so vor der Röhre aufgestellt, dass seine Axe zusammenfiel mit dem Radiusvector, der von dem Mittelpunkt der Kugel zu dem Mittelpunkt der drehbaren Elektrode ging. Die Abmessungen im einzelnen ergaben sich aus Fig. 1, welche im Maassstabe 5 : 3 gezeichnet ist.

4. Wir gehen nun über zu der Untersuchung der *Charakteristiken*, welche erhalten werden, *ohne dass das Feld des Elektromagneten erregt wird.* Als Stromquellen dienten eine Töpler'sche Influenzmaschine mit 40 rotirenden Scheiben und ein Hochspannungsaccumulator von 1008 Elementen. Bei Benutzung der Influenzmaschine wurde die Stromstärke teils durch Aenderung der Umdrehungsgeschwindigkeit, teils durch Nebenschaltung eines Jodcadmiumwiderstandes variirt. Bei Verwendung des Accumulators wurde eine Aenderung der Stromstärke in sehr viel weiteren Grenzen durch Vorschaltung von fünf Jodcadmiumröhren in acht verschiedenen Combinationen erreicht. Die Stromstärke wurde teilweise mit einer Tangentenbussole, teilweise mit einem Ampèremeter gemessen, die Spannungsdifferenz der Elektroden mit einem Braun'schen Elektrometer, dessen Reductionsfactor auf Volt gleich 1,225 war. Zum Evacuiren diente eine Töpler'sche Ventilluftpumpe; die Druckmessungen geschahen bei grösseren Verdünnungen nach der von Bessel-Hagen angegebenen Methode; das Volumen der Pumpenkugel betrug 1060 ccm, das Volumen eines 1 cm langen Stückes der Auslassröhre 0,040 ccm, das Volumen des Vorvacuums 21,1 ccm.

Die Resultate der Beobachtungen sind in Tab. I zusammengestellt; der Uebersichtlichkeit halber sind die unmittelbar

Tabelle I.

$i.10^5$ Amp.	Spannungsdifferenz V der Elektroden in Volt für den Druck in Millimetern Quecksilber										
	14,6	10,2	5,0	2,53	1,26	0,54	0,38	0,21	0,085	0,033	0,027
5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	955	1000
10	—	—	922	575	400	—	—	—	597	1220	1720
20	—	—	560	453	320	311	360	360	755	1680	—
40	—	—	433	385	317	359	404	434	947	—	—
80	—	—	417	—	322	440	517	578	1330	—	—
120	738	612	425	370	352	546	622	723	—	—	—
160	740	618	440	368	392	660	700	875	—	—	—
200	755	630	445	369	412	710	760	—	—	—	—
600	—	—	—	—	—	—	1235	—	—	—	—
700	—	—	—	—	—	1120	—	—	—	—	—
1100	—	—	—	—	754	—	—	—	—	—	—
1200	—	—	493	513	—	—	—	—	—	—	—

beobachteten Werte auf gleiche Stromstärken reducirt; die Reduction geschah auf graphischem Wege, und es wurden die Stromstärken der Tabelle so ausgewählt, dass die durch Reduction erhaltenen Werte den wirklich beobachteten möglichst nahe lagen.

Eine graphische Darstellung der Resultate ist in Fig. 2 gegeben; dabei sind die durch die Beobachtungen gegebenen Wertpaare durch Punkte markirt.

Bei den Drucken von 14,6 mm und 10,2 mm diente die Influenzmaschine als Stromquelle, da hier die Spannung der Accumulatoren unzureichend war. Bei den Drucken von 0,21 mm an abwärts wurden grössere Stromstärken nicht benutzt, um eine schädliche Erwärmung der Elektroden zu vermeiden.

Der Druck in der Kugel wurde schliesslich noch auf 0,010 mm erniedrigt; zur Erzeugung der Ströme musste jetzt wieder die Influenzmaschine benutzt werden. Eine Stromstärke von $47 . 10^{-5}$ Amp. entsprach jetzt einer Spannungsdifferenz von 3980 Volt, einer Stromstärke von $130 . 10^{-5}$ Amp. eine Spannungsdifferenz von 5820 Volt. Indes machte sich schon bei diesen Strömen eine allmähliche Verschlechterung des Vacuums geltend. Bei stärkeren Strömen nahm diese so erheblich zu, dass auf eine Fortsetzung der Versuche verzichtet wurde.

5. Die Art und Weise, wie die *Aenderung der Charakteristiken in einem Magnetfeld* untersucht wurde, möge an einem speciellen Beispiele erläutert werden.

Der Druck in der Kugel ergab sich zu 0,45 mm. Es wurde nun ein bestimmter Jodcadmiumwiderstand vorgeschaltet, und der Strom der Accumulatorenbatterie durch die Kugel geschlossen, wobei die Elektrode *A* der Fig. 1 Kathode war. Es ergaben sich die zusammengehörenden Werte von Stromstärke und Spannungsdifferenz:

$$i = 11{,}77 . 10^{-5} \text{ Amp.}, \quad e_0 = 330 \text{ Volt.}$$

Nun wurde, während der Widerstand im äusseren Kreise derselbe blieb, der Elektromagnet erregt, und zwar so, dass sein Nordpol stets der Kugel zugewandt blieb. Es wurden dabei vier verschiedene Stromstärken zuerst in aufsteigender, dann in absteigender Ordnung verwandt und jedesmal die zugehörenden Einstellungen des Voltmeters abgelesen. So ergaben sich die folgenden zusammengehörenden Werte der

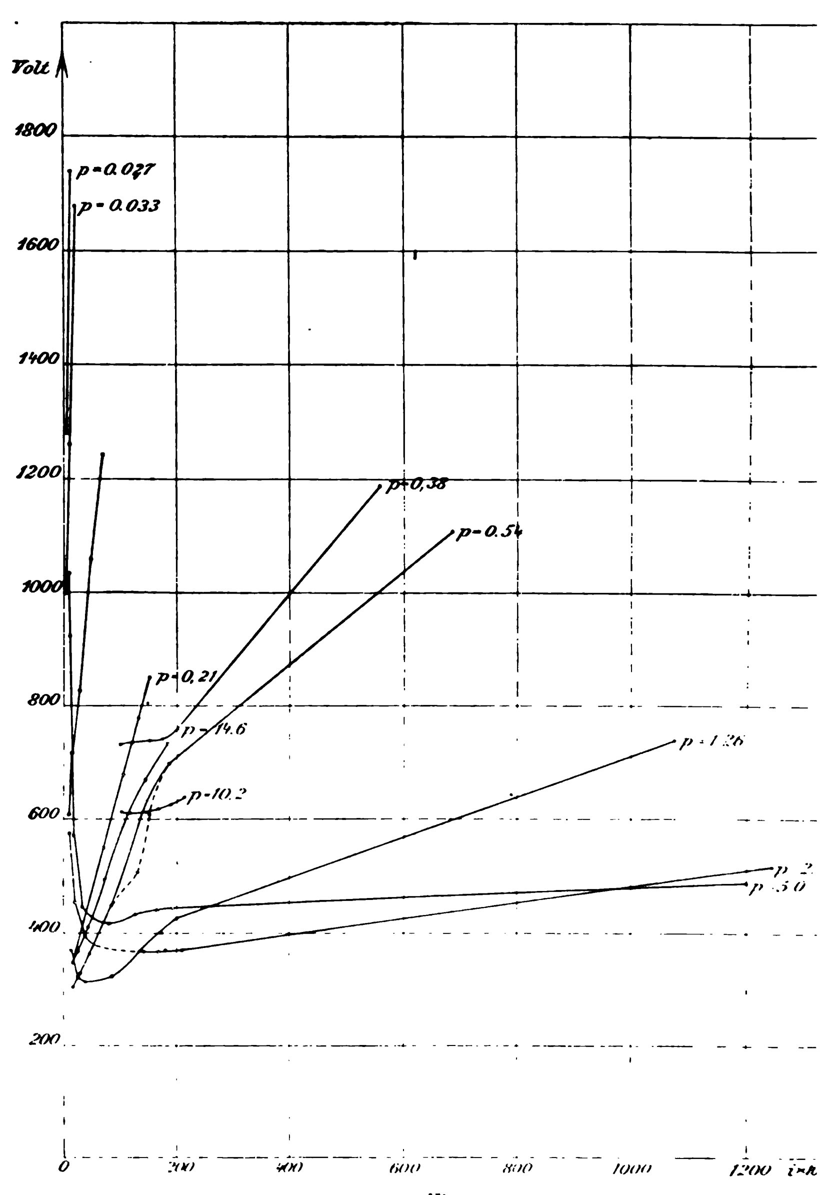

Volt
1800
1600
1400
1200
1000
800
600
400
200
0
200
400
600
800
1000
1200
p = 0.027
p = 0.033
p = 0,21
p = 0,38
p = 0.54
p = 14.6
p = 10.2
p = 1.26

Fig. 2.

Stärke J des magnetisirenden Stromes und der Spannungsdifferenz e der Elektroden:

J, Amp.	0,5	1,74	3,83	5,38	3,90	1,77	0,5
e, Volt	350	356	368	416	374	361	350

Wurde der magnetisirende Strom unterbrochen, so stellte sich die Stromstärke wieder auf $11{,}78 \cdot 10^{-5}$ Amp., die Spannungsdifferenz e_0 der Elektroden auf 328 Volt.

Dieselben Beobachtungen wurden nun mit anderen vorgeschalteten Jodcadmiumwiderständen wiederholt.

Eine zweite Beobachtungsreihe wurde angestellt, bei welcher die Elektrode A als Anode benutzt wurde. Bei einer dritten Beobachtungsreihe wurde die Elektrode A wieder zur Kathode gemacht.

Nach dem Abschluss der Beobachtungen wurde der Druck in der Kugel von neuem bestimmt; er war auf 0,38 mm gesunken. Im Mittel kann also für die vorliegenden Beobachtungen der Druck gleich 0,41 mm gesetzt werden. Bei grösseren Drucken war eine solche Veränderung der Gasdichte durch den Strom selbst nicht beobachtet worden.

Die Charakteristiken für die verschiedenen Magnetfelder können mit Hülfe einer einfachen Construction gefunden werden Bezeichnen wir die Klemmenspannung der Accumulatorenbatterie durch E, die Spannungsdifferenz der Elektroden durch e, den äusseren Widerstand durch w, die Stromstärke durch i, so ist

$$E - i w = e.$$

Wir benutzen die i als Abscissen, die e als Ordinaten in einem rechtwinkligen Coordinatensystem. Wenn E und w constant bleiben, so liegen alle zusammengehörenden Werte von e und i auf einer Geraden, welche durch den Punkt E der Axe e der Spannungen hindurchgeht. Ein weiterer Punkt dieser Geraden ist aber dadurch gegeben, dass bei nichterregtem Felde zwei zusammengehörende Werte von i und e bestimmt worden sind, z. B. $i = 11{,}77 \cdot 10^{-5}$ Amp. und $e = e_0 = 329$ Volt. Verbinden wir also den Punkt E der Spannungsaxe mit dem durch die Werte i und e_0 bestimmten Punkt, so liegen alle Punkte, welche bei gleichem äusseren Widerstande zusammengehörende Werte von i und e darstellen, auf der Verbindungslinie. Wir erhalten somit Punkte der den verschiedenen Magnetfeldern entsprechen-

den Charakteristiken, wenn wir auf der Verbindungslinie die Punkte suchen, deren Abstände von der Axe i der Stromstärken gleich den beobachteten Spannungsdifferenzen e sind.

Die Resultate der Beobachtungen sind in den Tab. II und III zusammengestellt. Tab. II bezieht sich auf den Fall, dass die Elektrode A Kathode war. Von den unmittelbar untereinanderstehenden Zahlen gehört die obere stets der ersten, die untere der zweiten Beobachtungsreihe an. Die mit J überschriebene Verticalcolumne enthält die Stärke des magnetisirenden Stromes in Ampères. Der leichteren Vergleichbarkeit halber sind aus den Beobachtungen der Tab. II die Mittel genommen und in Tab. IV zusammengestellt.

Tabelle II.

Elektrode A Kathode. Druck 0,41 mm.

J									
	11,8	22,2	37,0	79,7	123,1	150,0	190,8	570	$i.10^5$
	11,6	21,6	36,0	78,5	121,3	146,1	185,2	540	(Amp.)
0	330	357	374	488	600	665	741	1210	e_0
	332	354	370	473	594	660	745	1230	
0,5	348	351	367	465	531	606	670	1017	e
	336	348	361	422	497	587	651	1030	
1,7	358	366	368	425	490	529	582	780	
	349	352	343	373	450	496	557	786	
3,8	370	392	407	447	490	527	547	651	
	376	382	376	400	456	490	527	651	
5,3	416	429	454	484	521	551	576	637	
	416	416	429	446	490	496	551	650	

Tabelle III.

Elcktrode A Kathode. Druck 0,41 mm.

J	Spannung der Accumulatoren 1975 Volt Stärke des Entladungsstromes für $J = 0$, $i.10^{-5}$ Amp.								
	11,7	21,8	36,4	77,3	116,4	143,0	186,2	570	
0	363	372	419	518	620	684	735	1151	e_0
0,5	368	386	422	528	619	682	737	1128	e
1,7	380	404	435	531	619	675	730	1101	
3,8	478	474	484	559	615	657	707	980	
5,3	496	496	515	606	661	699	716	961	

Tabelle IV.

Elektrode *A* Kathode. Druck 0,41 mm.

J	Spannung der Accumulatoren 1985 Volt Stärke des Entladungsstromes für $J = 0$, $i.10^{-5}$ Amp.								
	11,7	21,9	36,5	79,1	122,2	148,0	188,0	555	
0	331	355	372	480	597	662	743	1220	e_0
0,5	342	350	364	443	514	596	660	1023	e
1,7	353	359	355	399	470	512	569	783	e
3,8	373	387	391	423	473	508	537	651	e
5,8	416	422	441	465	505	523	563	643	e

Die graphischen Darstellungen der Beobachtungen, die Charakteristiken der Kugel mit und ohne Erregung des Magnetfeldes für den Druck von 0,41 mm sind in den Figg. 3 und 4

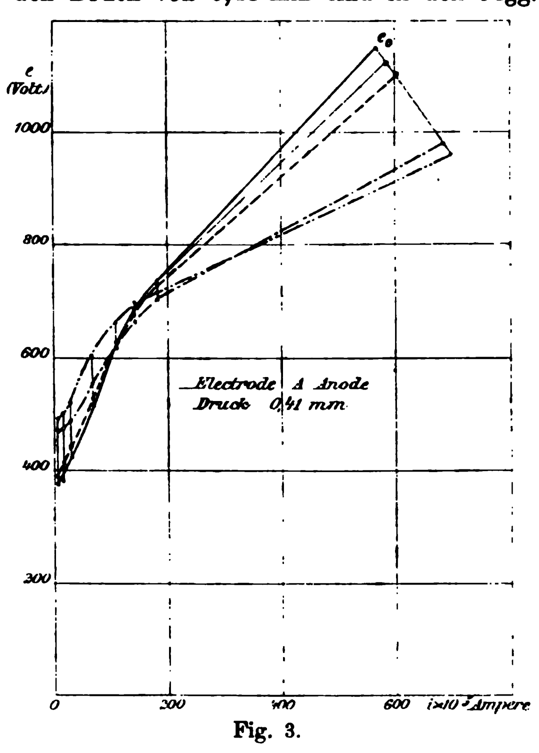


Fig. 3.

gegeben. Den Tab. III und IV, auf Grund deren die Figuren construirt worden sind, haftet eine gewisse Zufälligkeit an, sofern die in ihnen aufgeführten Spannungsdifferenzen von der

Spannung der benutzten Accumulatorenbatterie abhängig sind. Wir eliminiren diese Zufälligkeit, wenn wir die Spannungs-

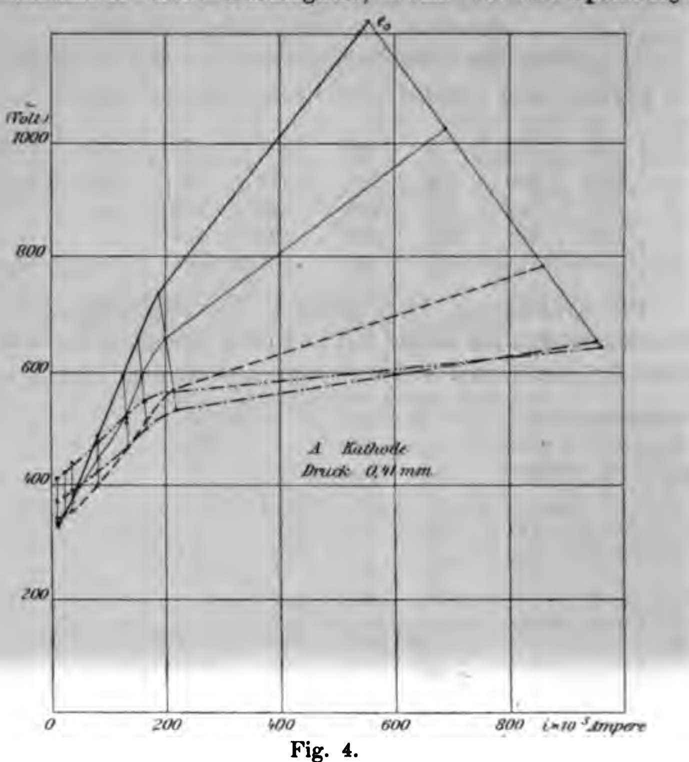


Fig. 4.

differenzen, welche verschiedenen Magnetfeldern entsprechen, auf gleiche Stromstärken reduciren. Dies ist geschehen in den Tab. V und VI.

Tabelle V.

Elektrode *A* Anode. Druck 0,41 mm.

$i \cdot 10^5$ Amp.	Stärke des magnetisirenden Stromes in Ampères				
	0	0,5	1,7	3,8	5,3
20	393	393	405	475	500
40	438	438	460	500	540
80	530	530	547	567	620
120	632	632	632	624	670
160	704	704	698	678	700
200	753	753	738	713	720
600	1180	1130	1093	933	912

Tabelle VI.

Elektrode *A* Kathode. Druck 0,41 mm.

$i \cdot 10^5$ Amp.	Stärke des magnetisirenden Stromes in Ampères				
	0	0,5	1,7	3,8	5,3
20	356	356	352	380	420
40	392	382	362	392	435
80	490	447	400	423	468
120	587	505	455	460	512
160	687	600	502	498	547
200	753	658	559	527	561
600	1288	960	700	597	607

Diese Tabellen geben endlich Veranlassung zu einer graphischen Darstellung, aus welcher der Einfluss des Magnetfeldes auf die Charakteristik noch einfacher zu erkennen ist. Wir berechnen die Differenzen zwischen den Spannungsdifferenzen im Magnetfeld und denen, welche bei gleicher Stärke des Stromes i ohne Magnetfeld auftreten. Tragen wir diese Differenzen als Functionen der Stromstärke i in das Coordinatennetz ein, so erhalten wir die Figg. 5 und 6. Man kann sich die Curven dieser Figuren auch durch den folgenden Process entstanden denken.

Wir nehmen an, die Punkte der in den Figg. 3 und 4 gezeichneten Curven seien beweglich in der Richtung der Axe e. Die Beweglichkeit sei aber an die Bedingung gebunden, dass die Punkte verschiedener Curven, welche auf einer Parallelen zu e liegen, in unveränderlichen Entfernungen bleiben. Man verschiebt dann in den Figg. 3 und 4 die Punkte der Curven, e_0, welche ohne Erregung des Magnetfeldes erhalten wurden, so, dass sie mit der Axe der Stromstärken zusammenfallen; dann nehmen die übrigen Curven die in den Figg. 5 und 6 gezeichneten Formen an.

In den Figg. 3 und 4 sind die Curven bei nichterregtem Felde stark, die Curven, welche der Stärke 0,5 Amp. des magnetisirenden Stromes entsprechen, schwach ausgezogen. Für den magnetisirenden Strom 1,7 Amp. ist die Curve gestrichelt, für 3,8 Amp. strich-punktirt; dem Strome 5,8 Amp. entspricht die Curve — · · · —.

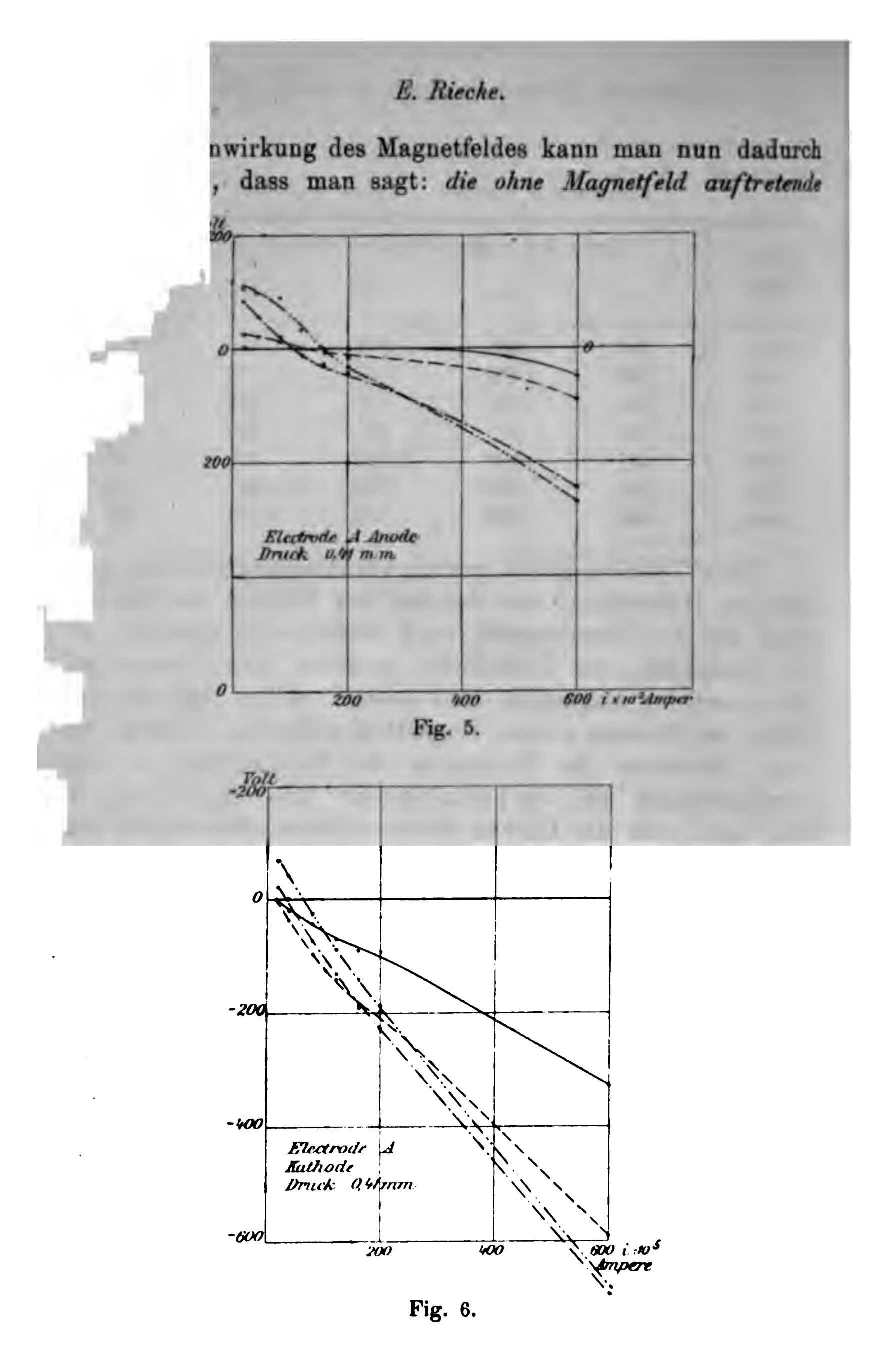


Fig. 5.

Fig. 6.

Curve e_0 wird durch ein Magnetfeld im Sinne des Uhrzeigers gedreht. Die Drehung nimmt zu mit der Stärke des Feldes, und

gleichzeitig rückt der Drehpunkt auf der Curve e_0 *im Sinne wachsender Stärken des Entladungsstromes fort.*

Der Vergleich der Curven, Figg. 3 und 5 einerseits, der Curven, Figg. 4 und 6 andererseits zeigt, dass *die Drehung sehr viel stärker ist, wenn A zur Kathode gemacht wird; zugleich liegen in diesem Falle die Drehpunkte der Curven dem Anfangspunkt der Axe i sehr viel näher.*

6. *Die Gesamtheit der bisher mitgeteilten Beobachtungen legt die folgenden Schlüsse nahe.* Der Einfluss des Magnetfeldes setzt sich aus zwei Teilen zusammen, von denen der eine auf den anodischen, der andere auf den kathodischen Teil der Entladung zu beziehen ist. Die Wirkung auf die positive Entladung bedingt eine Erhöhung des Entladungspotentiales, die auf die negative Entladung eine Verminderung. Beide Wirkungen hängen von der Stärke des Entladungsstromes in verschiedener Weise ab, sodass bei schwachen Strömen die erhöhende Wirkung auf die positive Entladung bei starken Strömen die erniedrigende Wirkung auf die negative Entladung überwiegt.

Es giebt daher stets eine bestimmte Stärke des Entladungsstromes, bei der das Magnetfeld keinen Einfluss auf das Entladungspotential hat; die hierzu erforderliche Stromstärke wächst mit der Feldintensität.

Die Wirkung des Magnetfeldes auf die positive Entladung besteht in einer Verlängerung der Strombahn, unter Umständen auch in einer Verkleinerung ihres Querschnittes. Beide Umstände bedingen eine Vergrösserung der Spannungsdifferenz. Die Wirkung des Magnetfeldes auf die negative Entladung besteht in einer Contraction des Kathodendunkelraumes und des Glimmlichtes, welche bei stärkeren Feldern sehr bedeutend ist. Damit muss eine Verminderung des Kathodengefälles Hand in Hand gehen.

7. Die im Vorhergehenden gewonnenen Sätze werden durch *Beobachtungen bei anderen Graden der Verdünnung* bestätigt und ergänzt.

Bei höheren Drucken hatte das Magnetfeld nur einen kleinen Einfluss auf das Entladungspotential. Bei dem Drucke von 14,6 mm wurde das Entladungspotential um 6 Volt ver-

grössert, wenn die Stärke des magnetisirenden Stromes 1,7 Amp. betrug. Bei einem Drucke von 10,2 mm hatte derselbe magnetisirende Strom eine Erhöhung des Entladungspotentiales um 16 Volt zur Folge.

Für den Druck von 5,0 mm sind die Resultate der Beobachtungen in den beiden folgenden Tab. VII und VIII zusammengestellt. Die charakteristischen Curven sind dann noch in den Figg. 3 und 3 gezeichnet. Dabei entspricht die gestrichelte Curve einem magnetisirenden Strom von 1,8 Amp., die punktirte einem solchen von 2,7 Amp., die strich-punktirte einem Strom von 3,8 Amp.

Tabelle VII.

Elektrode *A* Anode. Druck 5,0 mm.

$i \cdot 10^5$ Amp.	Stärke des magnetisirenden Stromes in Ampères			
	0	1,8	2,7	3,8
20	560	637	670	725
40	433	530	581	635
80	417	467	490	545
120	425	465	478	508
160	440	525	526	563
200	445	526	528	563
1200	493	550	572	570

Tabelle VIII.

Elektrode *A* Kathode. Druck 5,0 mm.

$i \cdot 10^5$ Amp.	Stärke des magnetisirenden Stromes in Ampères			
	0	1,8	2,7	3,8
20	560	748	791	829
40	433	624	683	745
80	417	604	643	703
120	425	563	600	647
160	440	518	555	595
200	445	520	556	597
1200	493	530	587	628

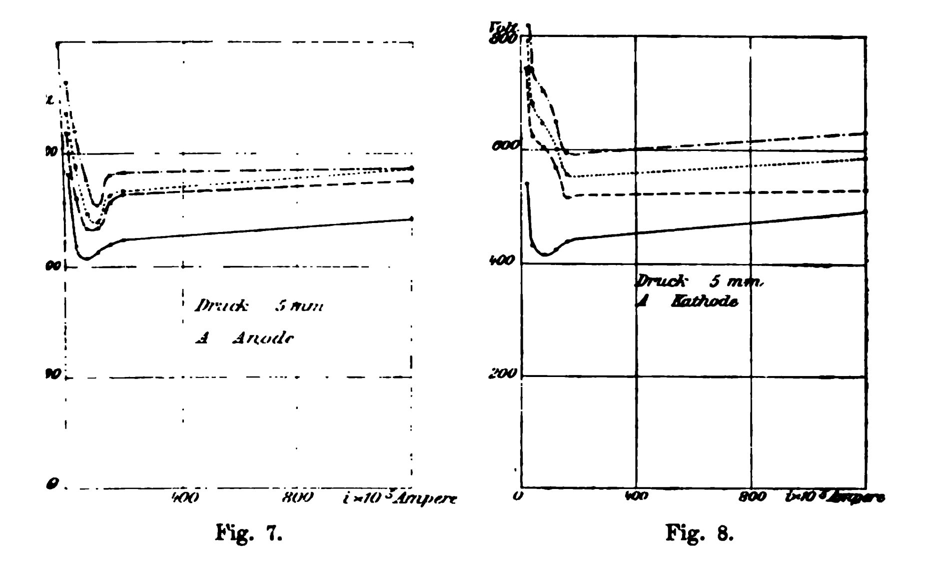


Fig. 7. Fig. 8.

Ueber die Verhältnisse, wie sie sich bei einer Reihe von weiteren Drucken gestalten, geben die Tab. IX—XVIII, die Figg. 9—18 Aufschluss. Curven und Stärken der magnetischen neuen Ströme sind einander in folgender Weise zugeordnet:

Stromstärke:	0	0,5	1,8	2,8	3,8	5,8
Curve:	———	···	— — —	· · · · ·	— · — ·	- · · · — · ·

Tabelle IX.

Elektrode *A* Anode. Druck 2,51 mm.

$i \cdot 10^5$ Amp.	Stärke des magnetisirenden Stromes in Ampères			
	0	1,8	2,7	3,8
20	450	485	525	544
40	371	423	464	505
80	394	455	489	535
120	380	460	516	555
160	365	411	467	505
200	349	376	430	466
1200	502	520	590	631

Tabelle X.

Elektrode *A* Kathode. Druck 2,51 mm.

$i \cdot 10^5$ Amp.	Stärke des magnetisirenden Stromes in Ampères			
	0	1,8	2,7	3,8
20	555	630	711	765
40	458	625	719	765
80	440	606	691	735
120	401	550	632	692
160	367	486	575	635
200	358	440	575	635
1200	542	555	585	608

Tabelle XI.

Elektrode *A* Anode. Druck 1,26 mm.

$i \cdot 10^5$ Amp.	Stärke des magnetisirenden Stromes in Ampères			
	0	1,8	2,8	3,8
20	320	358	368	377
40	317	365	374	408
80	322	370	400	444
120	352	410	465	487
160	392	431	505	542
200	424	490	546	596
1000	700	700	736	739

Tabelle XII.

Elektrode *A* Kathode. Druck 1,26 mm.

$i \cdot 10^5$ Amp.	Stärke des magnetisirenden Stromes in Ampères			
	0	1,8	2,8	3,8
20	320	378	422	482
40	317	378	426	490
80	322	378	465	520
120	352	416	477	518
160	392	466	496	551
200	424	478	512	558
1000	700	600	600	628

Tabelle XIII.

Elektrode *A* Anode. Druck 0,21 mm.

$i \cdot 10^5$ Amp.	Stärke des magnetisirenden Stromes in Ampères				
	0	0,5	1,7	3,8	5,3
20	360	365	375	435	500
40	434	439	446	465	526
80	578	582	572	539	587
120	723	726	700	635	665
160	875	878	805	716	745

Tabelle XIV.

Elektrode *A* Kathode. Druck 0,21 mm.

$i \cdot 10^5$ Amp.	Stärke des magnetisirenden Stromes in Ampères				
	0	0,5	1,7	3,8	5,3
20	360	328	344	367	401
40	434	383	370	416	440
80	578	510	435	505	521
120	723	615	514	570	600
160	875	716	581	635	675

Tabelle XV.

Elektrode *A* Anode. Druck 0,08 mm.

$i \cdot 10^5$ Amp.	Stärke des magnetisirenden Stromes in Ampères				
	0	0,5	1,7	3,8	5,3
10	597	577	557	615	661
20	755	699	639	689	748
40	947	882	816	795	842
80	1330	1250	1077	947	990

Tabelle XVI.

Elektrode *A* Kathode. Druck 0,08 mm.

$i \cdot 10^5$ Amp.	Stärke des magnetisirenden Stromes in Ampères				
	0	0,5	1,7	3,8	5,3
10	597	478	465	540	600
20	755	588	568	613	659
40	947	730	686	690	720
80	1330	955	890	792	825

Tabelle XVII.

Elektrode *A* Anode. Druck 0,03 mm.

$i \cdot 10^5$ Amp.	Stärke des magnetisirenden Stromes in Ampères				
	0	0,5	1,7	3,8	5,3
5	955	796	—	—	—
10	1220	1040	821	813	868
20	1680	1370	1115	970	965
30	—	1630	1390	1110	1100
40	—	—	—	1230	1220

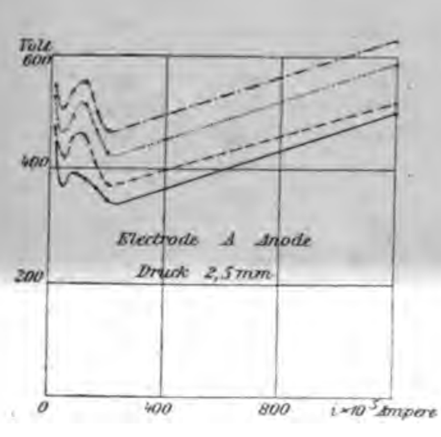


Fig. 9.

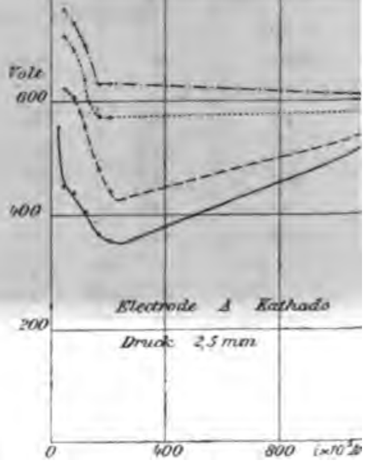


Fig. 10.

Tabelle XVIII.

Elektrode *A* Kathode. Druck 0,03 mm.

$i \cdot 10^5$ Amp.	Stärke des magnetisirenden Stromes in Ampères				
	0	0,5	1,7	3,8	5,3
5	955	—	—	785	859
10	1220	735	746	860	930
20	1680	925	858	970	1040
30	—	1060	943	1050	1170
40	—	1190	1007	1120	1270

8. Die Beobachtungen gaben Veranlassung zu den folgenden Bemerkungen. Bei höheren Drucken zieht sich das nega-

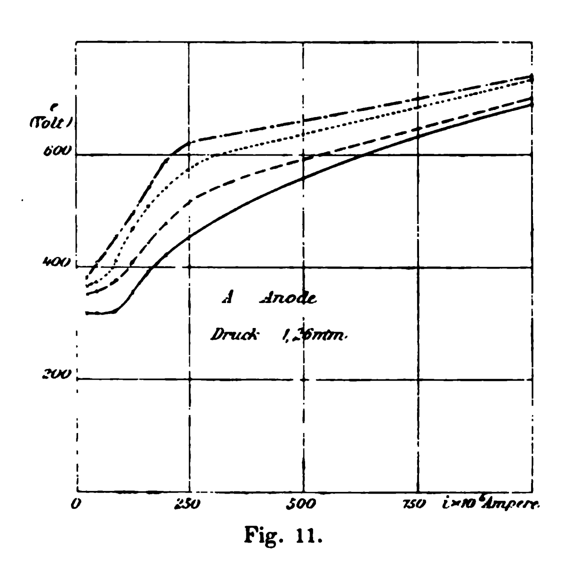


Fig. 11.

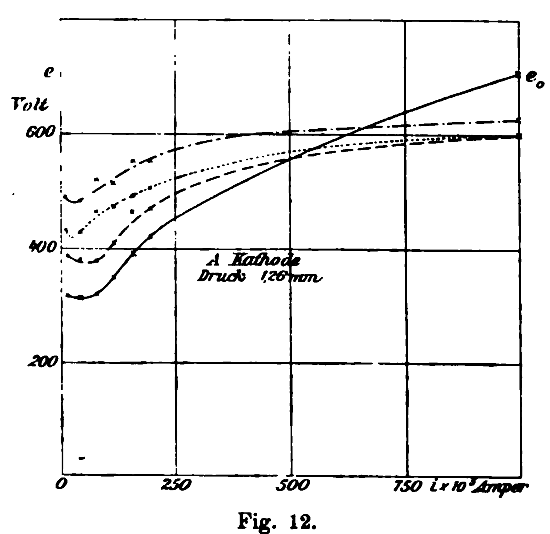


Fig. 12.

tive Glimmlicht auf eine dünne Schicht zusammen, welche die Kathode nur teilweise bedeckt. Man wird also vermuten, dass



Falle wesentlich nur die Wirkung zur Geltur
elche von dem Magnetfeld auf den positiven Teil d

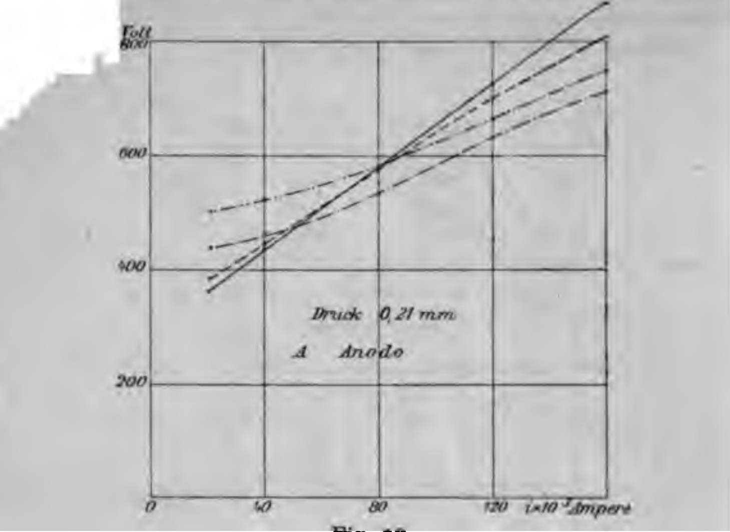


Fig. 13.

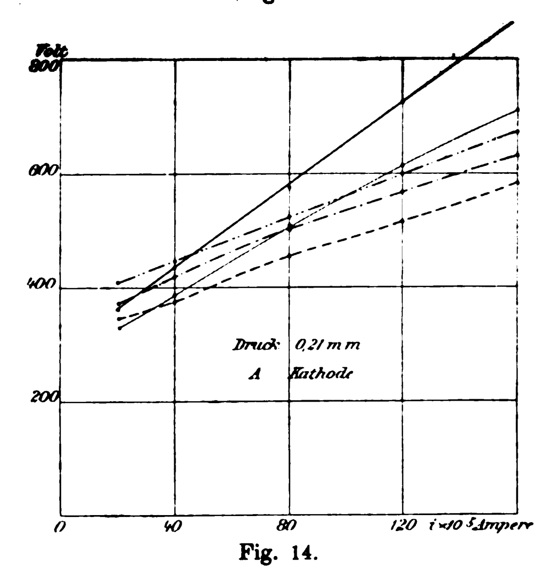


Fig. 14.

Entladung ausgeübt wird. In der That zeigen die Figg. 7—1
den Drucken von 5 und von 2,5 mm entsprechend, nur eir

'ergrösserung der Entladungsspannung durch den Magnet. Es
ıllt aber auf, dass die Wirkung entschieden stärker ist, wenn

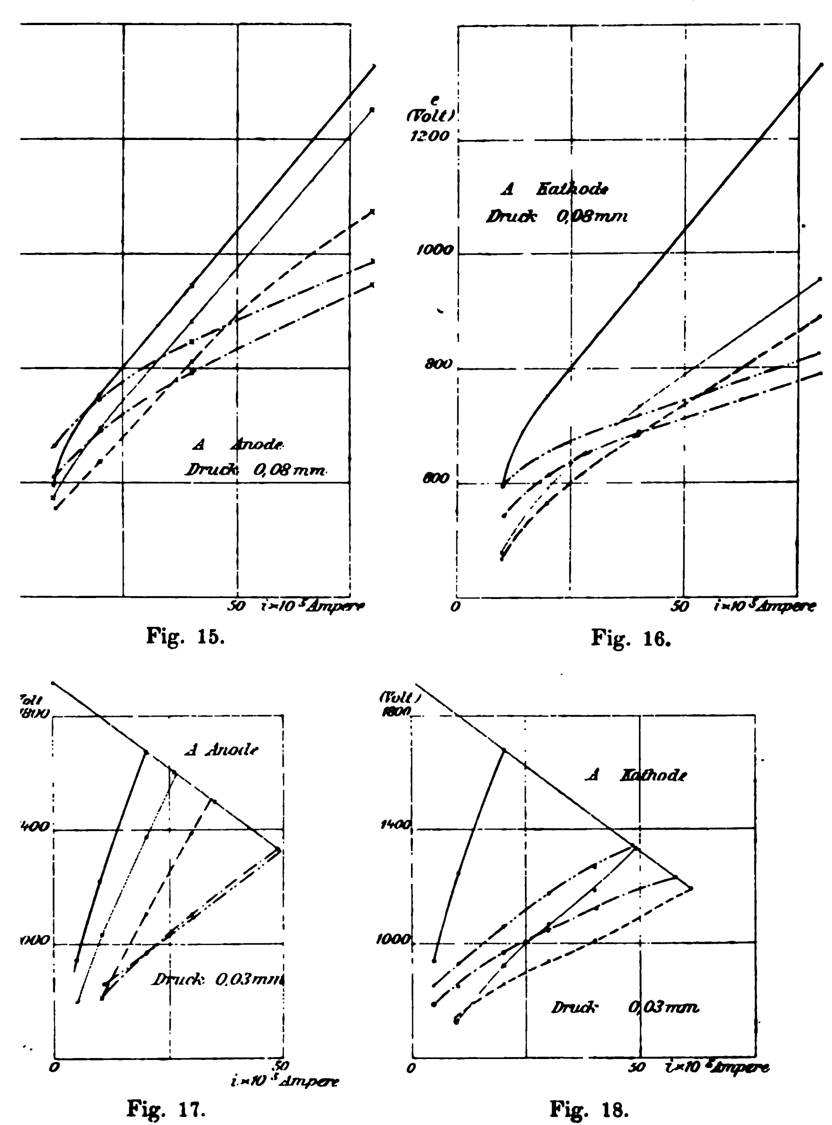


Fig. 15. Fig. 16.

Fig. 17. Fig. 18.

lie vordere Elektrode *A* zur Kathode gemacht wird. Der
Jnterschied weist auf eine Asymmetrie der Wirkungen hin,

uch in der Entwickelung der Lichterscheinungen einem Druck von 5 mm war die Lichterscheinung einen auf zwei dünne Lichthäutchen beschränkt, en Teil der Elektrodenoberfläche bedeckten, der nen um zwischen den Elektroden war dunkel. Nur n die Elektrode A Kathode war, traten bei schwachen dungsströmen, bis zu 30.10^{-5} Amp., im Magnetfelde cnel auf, welche stark nach unten gebogen die Elektroden erbanden. Bei einem Druck von 2,5 mm traten unter denelben Bedingungen Büschel auch dann auf, wenn die Elektrode A Anode war. Die Büschel waren jetzt nach oben gebogen, aber die Abweichung von der geradlinigen Bahn war eringer, als wenn A Kathode war. Es wäre hiernach mögch, dass die erwähnten Unterschiede der Entladespannung in einer verschiedenen Länge der Strombahn ihren Grund hätten.

Auf die Existenz einer *Wirkung, welche die Entladungsspannung verkleinert*, weisen die Curven der Fig. 10 hin. Die geradlinigen Verlängerungen der Curven schneiden sich etwa bei einer Stromstärke von $i = 1200.10^{-5}$ Amp. Man kann ermuten, dass bei noch grösseren Stromstärken das Magnetfeld eine Verkleinerung der Entladungsspannung bewirken würde. Da der convergirende Verlauf der Charakteristiken zunächst nur eintritt, wenn A Kathode ist, so wird man eine wirkliche Durchkreuzung zuerst in diesem Felde erwarten. Dies wird bestätigt durch die Figg. 11 und 12, welche dem Druck von 1,26 mm entsprechen. Dabei macht sich bei schwachen Strömen die Asymmetrie der Wirkung noch immer geltend; die anfängliche Vergrösserung der Spannung ist stärker, wenn A Kathode, als wenn A Anode ist. In Fig. 12 liegen die Schnittpunkte der im Magnetfeld erhaltenen Charakteristiken mit der Curve e_0 zwischen $i = 500.10^{-5}$ Amp. und $i = 670.10^{-5}$ Amp. Die Beobachtungen, welche der nächsten Verdünnung mit dem Druck 0,41 mm entsprechen, sind zu Anfang ausführlich besprochen. *Die Durchkreuzung der Charakteristiken*, die wechselseitige Compensation der magnetischen Wirkungen, tritt jetzt unter allen Umständen ein. Ist A Anode, so liegen die Kreuzungspunkte der Charakteristiken wie der Curve e_0 zwischen $i = 100.10^{-5}$ Amp. und $i = 170.10^{-5}$ Amp.; wenn A Kathode

ist, zwischen 10.10^{-5} und 70.10^{-5} Amp. Noch weiter im Sinne abnehmender Stromstärken verschieben sich die Kreuzungspunkte bei den Drucken von 0,21 und 0,08 mm. Im ersten Falle liegen die Punkte verschwindender magnetischer Wirkung zwischen 40.10^{-5} und 84.10^{-5} Amp., wenn A Anode ist, unter 40.10^{-5} Amp., wenn A zur Kathode gemacht wird. Beim Drucke von 0,08 mm liegen die fraglichen Punkte unterhalb von $i = 20.10^{-5}$ Amp., wenn A Anode ist, unterhalb von $i = 10.10^{-5}$ Amp., wenn A Kathode ist. Bei einem Drucke von 0,03 mm war die Entladungsspannung im Magnetfeld unter allen Umständen kleiner, wie ohne magnetische Wirkung.

Man kann hiernach sagen, dass die Sätze, welche zunächst für einen Druck von 0,41 mm ausgesprochen wurden, durch die Beobachtungen bei anderen Verdünnungen durchaus bestätigt werden. Als neu tritt die Asymmetrie der magnetischen Wirkung auf den positiven Teil der Entladung hinzu, welche bei höheren Drucken sich bemerklich macht.

Der Punkt, in dem die einander entgegengesetzten magnetischen Wirkungen sich compensiren, der Kreuzungspunkt der Charakteristiken im Magnetfeld mit den Curven e_0. liegt bei um so geringerer Stärke des Entladungsstromes, je geringer der Druck.

Die höchste Stromstärke, welche einem wirklich beobachteten Kreuzungspunkte entspricht, beträgt 670.10^{-5} Amp. Sie tritt ein bei dem Drucke von 1,26 mm und bei einem magnetisirenden Strome von 3,8 Amp., wenn A Kathode ist. Die kleinste Stromstärke, bei der ein Kreuzungspunkt wirklich beobachtet wurde, beträgt 10.10^{-5} Amp. Sie trat ein bei einem Drucke von 0,08 mm und bei einem magnetisirenden Strome von 5,3 Amp., während A Kathode war.

Die Resultate der Versuche stimmen im wesentlichen überein mit den Beobachtungen von Paalzow und Neesen.[1])

Unter gewissen Umständen haben diese beiden Forscher *Maxima der magnetischen Wirkung* beobachtet. Solche Maxima müssen notwendig, und zwar bei gewissen mittleren Stärken der Entladungsströme, auftreten, wenn bei kleinen Stromstärken die Spannung mit dem Strome steigt, während sie bei starken

---

1) A. Paalzow und F. Neesen, Wied. Ann. **63**. p. 209. 1897.

Strömen mit zunehmendem Strome abnimmt. Gute Beispiele hierfür geben die Figg. 3 und 4; aber auch die folgenden Figuren weisen solche Maxima auf; nur sind bei ihnen die Charakteristiken nicht so weit verfolgt, dass eine vollkommene Umkehr in der Reihenfolge der Curven eintritt.

9. Der *Charakter der Entladungen* wurde mit einem rotirenden Spiegel und durch Einschaltung eines sehr empfindlichen, laut sprechenden Telephons von Siemens geprüft.

Die positive Entladung erzeugte *im rotirenden Spiegel* unter allen Umständen einen rötlichen Ring von vollkommen gleichmässiger Helligkeit. Nur in den bei den Drucken von 5 mm und 2,5 mm erwähnten Fällen, wo bei kleinen Stromstärken im Magnetfelde büschelförmige Entladungen auftraten, änderte sich das Bild. Zu dem rötlichen Ringe traten noch scharf getrennte Funken; ihre Zahl konnte leicht bestimmt werden, indem man gleichzeitig mit dem Bilde der Entladung das Bild einer singenden Flamme im rotirenden Spiegel beobachtete; sie betrug 100—300 in der Secunde.

Auch der blaue Ring, der durch das Kathodenglimmlicht im rotirenden Spiegel erzeugt wurde, zeigte in der Regel eine vollkommen gleichmässige Helligkeit. Nur wenn bei höheren Drucken das bekannte Flackern des Glimmlichtes eintrat, zeigten sich auf dem gleichmässigen Grunde des Lichtringes, mehr oder weniger regelmässig verteilt, hellere Punkte. Ihre Anzahl in der Secunde schwankte von 50 bis über 2000. Es ergab sich aber dabei noch eine eigentümliche Beobachtung. Das Glimmlicht blieb nicht auf die eine Fläche der Kathode beschränkt, sondern ging beinahe immer auch auf die andere Fläche hinüber. Man konnte nun im rotirenden Spiegel entweder die der Anode zugewandte Vorderseite, oder die davon abgewandte Rückseite der Kathode beobachten. Im letzteren Falle erwies sich das Glimmlicht unter allen Umständen als stetig; hellere Punkte im Lichtkreise fielen nur auf der Vorderseite der Elektrode auf.

Die Untersuchung mit dem *Telephon* zeigte, dass die Entladungsströme doch nur in verhältnismässig wenig Fällen wirklich stetig waren. Bei höheren Drucken schwieg das Telephon nie still, sondern erzeugte, je nach der Art des Entladungsstromes, ein ziemlich lautes Brausen oder ein leises, gleich-

mässiges Summen. Erst bei einem Druck von 0,41 mm schwieg das Telephon in der Regel bei mittleren Stromstärken, doch stellte sich zuweilen auch da leises Summen ein. Bei dem Druck von 0,21 mm waren die Entladungen meist stetig; nur in wenigen Fällen wurde ein leises Summen des Telephons gehört. Auch bei den Drucken von 0,08 und 0,03 mm hatten die Entladungen im wesentlichen den Charakter der Stetigkeit.

10. Ueber die *Beschaffenheit des Magnetfeldes* giebt Fig. 1 Aufschluss. Die ausgezogenen Linien, welche die Kraftlinien durchkreuzen, sind Linien gleicher Feldstärke. Die Werte der Feldstärken, deren Messung ich Hrn. Dr. Stark verdanke, sind für die hauptsächlich verwandten magnetisirenden Ströme in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Tabelle XIX.

Intensitäts-curve	Stärke des magnetisirenden Stromes (Ampères)			
	0,5	1,7	3,8	5,3
I	45	139	322	455
II	33	105	233	333
III	22	72	161	227
IV	15	50	111	155
V	11	33	78	111
VI	8	25	61	83

Die Beobachtungen wurden dadurch geprüft, dass die Werte der Feldintensität für die mit den Zahlen 1—5 bezeichneten Punkte der Intensitätscurven mit Hülfe der bekannten Eigenschaft der Potentialflächen aus den in der Axe gefundenen Werten abgeleitet wurden. Es ergab sich so die folgende Zusammenstellung berechneter und beobachteter Feldintensitäten $\mathfrak{H}$ für einen magnetisirenden Strom von 5,3 Amp.

	1	2	3	4	5
$\mathfrak{H}$ berechnet	477	336	231	138	113
$\mathfrak{H}$ beobachtet	455	333	227	155	111

Geht man längs der betrachteten Kraftröhre fort, so ergiebt sich aus dem Verhältnis der Querschnitte: $\mathfrak{H}_1 / \mathfrak{H}_5 = 3{,}9$, dagegen aus den Beobachtungen: $\mathfrak{H}_1 / \mathfrak{H}_5 = 4{,}1$.

Die Uebereinstimmung ist eine für die Zwecke der vorliegenden Arbeit genügende.

An der Elektrode *A* laufen die Kraftlinien mit der Fläche der Elektrode parallel. Die Feldintensität in der Mitte der Elektrode hat für die verschiedenen magnetisirenden Ströme die folgenden Werte:

Magnetisirender Strom in Ampères	0,5	1,7	3,8	5,3
Feldstärke	47	144	335	473

Für den Mittelpunkt der Elektrode *B* ergiebt sich die folgende Zusammenstellung:

Magnetisirender Strom in Ampères	0,5	1,7	3,8	5,3
Ganze Feldstärke	19	62	138	194
Componente parallel zur Elektrodenfläche	9,5	31	69	97
Componente senkrecht zur Elektrodenfläche	16,5	54	119	168

(Eingegangen 18. Januar 1901.)

13. *Experimentaluntersuchung über die Metallreflexion der elektrischen Schwingungen; von Karl F. Lindman.*

Einleitung.

Righi[1]) hat einige Versuche beschrieben, wonach es ihm gelungen wäre, eine elliptische Polarisation der von einem Metallspiegel reflectirten Hertz'schen Wellen nachzuweisen. Auf eine 306 cm lange und 44 cm hohe Kupfertafel liess er elektrische Wellen von etwa 10 cm Länge so einfallen, dass ihre Schwingungsrichtung einen Winkel von 45° mit der Einfallsebene bildete. Als Resonator verwendete er, wie bei seinen übrigen Versuchen über elektrische Schwingungen, einen auf Glas niedergeschlagenen Silberstreifen, der in der Mitte durch einen feinen Strich unterbrochen war. Um bei grösseren Einfallswinkeln die vom Oscillator ausgehenden Strahlen nicht direct zum Resonator gelangen zu lassen, wurde der Resonator in einer möglichst grossen Entfernung, etwa 400 cm, von der Mitte der Kupfertafel aufgestellt. Mittels dieser Anordnung verfolgte er die Reflexion am Kupfer für Einfallswinkel bis zu 82°. Der Resonator wurde um eine durch den Mittelpunkt der Tafel gehende Axe gedreht, wobei das Funkenspiel in der Mitte desselben beobachtet wurde. Es zeigte sich nun bei einem Einfallswinkel von etwa 81°, dass bei jeder Orientirung des Resonators Funken, wenn auch von verschiedener Intensität, auftraten. Bei einer vollständigen Drehung constatirte er zwei Maxima und zwei Minima, welche zwei zu einander orthogonalen Orientirungen entsprachen. Es waren dies, nach der Ansicht Righi's, die Richtungen der Axen einer elliptischen Schwingung. Wenn er bei unverändertem Einfallswinkel (d. h. 81°) den Oscillator so drehte, dass die Schwingungsrichtung der elektrischen Wellen mit der Einfallsebene einen Winkel von 59° bildete, fand er die Intensität der Funken

1) A. Righi, Die Optik der elektrischen Schwingungen p. 150. 1898.

im Resonator nahezu constant und von der Orientirung des letzteren unabhängig. In diesem Falle war, meinte er, die reflectirte Schwingung kreisförmig geworden. Dagegen waren die reflectirten Wellen geradlinig polarisirt, wenn die einfallenden Schwingungen entweder in der Einfallsebene oder senkrecht dazu orientirt waren. Geradlinige Schwingungen zeichneten sich dadurch aus, dass der Resonator, senkrecht zu ihrer Richtung gedreht, keine Funken gab, in der Richtung derselben dagegen ein Maximum der Funkenfrequenz. Der Winkel, um welchen der Resonator aus der Lage des Funkenmaximums gedreht werden musste, damit die Funken verschwinden sollten, gab ein Maass für die Amplitude der geradlinigen Schwingungen, wodurch die relative Intensität derselben in verschiedenen Fällen angenähert gemessen werden konnte. Erfolgten die einfallenden elektrischen Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene, so fand Righi beim Variiren des Einfallswinkels, dass die Intensität der reflectirten Strahlung mit wachsendem Einfallswinkel zunahm. Fanden dagegen die elektrischen Schwingungen in der Einfallsebene statt, so sank bei wachsendem Einfallswinkel die reflectirte Intensität bis sie bei ungefähr 81° durch ein Minimum hindurchging und stieg dann wieder.

Wenn nun diese Beobachtungen und Schlüsse von Righi richtig wären, müsste man, falls man die Reflexion der Hertz'schen Wellen an Metallspiegeln quantitativ verfolgen würde, die nötigen Mittel gewinnen zur Bestimmung der für die betreffenden Metalle charakteristischen Constanten für diese Wellen. Gelingt es nämlich, irgend welche zwei von diesen Constanten, z. B. den Haupteinfallswinkel und das Hauptazimut, experimentell zu bestimmen, so lassen sich, wie bekannt, die übrigen daraus ableiten.

Andererseits stehen aber die Resultate der theoretischen Betrachtungen, welche von verschiedenen Forschern auf diesem Gebiete angestellt worden sind, nicht in Einklang mit den Righi'schen Erfahrungen.

Von den Maxwell-Hertz'schen Grundgleichungen ausgehend hat Poincaré[1]) das Resultat abgeleitet, dass wegen

1) A. Poincaré, Les oscillations électriques p. 246—259. 1894.

der grossen Leitfähigkeit der Metalle die Natur derselben einen merkbaren charakteristischen Einfluss auf Wellen von der Grössenordnung der Hertz'schen kaum äussern könne. Er betrachtet speciell die Reflexion am Kupfer und findet, dass für Wellen, deren Länge λ von der Grössenordnung 100 cm ist, die entsprechenden Amplituden der directen und der reflectirten Schwingungen bei jeder Incidenz entgegengesetzt gleich sind und dass die Phasenänderung stets gleich π ist (auf Quantitäten von der Ordnung $^1/_{100000}$ genau).

Zu ganz analogen Ansichten ist auch Drude gekommen. Aus den Formeln für die Metallreflexion, welche er im XI. Kapitel seiner Arbeit „Physik des Aethers" auf Grundlage der Maxwell'schen Theorie entwickelt hat, schliesst er, dass die von einer Metallebene reflectirten elektrischen Wellen, sogar wenn sie von der Grössenordnung $\lambda = 10$ cm sind, hinsichtlich ihrer Intensität und ihres Polarisationszustandes für jeden Einfallswinkel nahezu identisch mit den einfallenden Wellen seien.

Später hat auch Drude[1]) gezeigt, dass die von Giese begründete Ionentheorie der Metalle zu einer einfachen und widerspruchsfreien Erklärung der optischen Eigenschaften der Metalle führt. Die Annahme zweier Ionengattungen, einer positiv und einen negativ geladenen, genügt, um das optische Verhalten des Nickels, sogar den Gang der Dispersion darzustellen. Für sehr langsame Perioden (Hertz'sche Wellen) verschwindet dagegen der Einfluss dieser Ionen, sodass die Eigenschaften des Metalles hinsichtlich solcher Wellen sich lediglich aus seiner Leitfähigkeit bestimmen. Diese beiden Ionengattungen reichen also auch nicht aus, um die oben referirten Righi'schen Versuche zu erklären. Es wäre aber doch, wie auch Drude hervorhebt, denkbar, dass die Metalle auch noch wesentlich schwerere Ionen enthalten, deren Einfluss optisch unwirksam ist, während sie für Hertz'sche Wellen einen Einfluss äussern könnten.

Sowohl nach der Maxwell-Hertz'schen Theorie als nach den ionentheoretischen Anschauungen erscheinen also die Righi'schen Versuchsergebnisse als sehr zweifelhaft.

---

1) P. Drude, Physikal. Zeitschr. 1. p. 161—165. 1900.

Da es doch schliesslich den Experimenten vorbehalten ist, eine entscheidende Antwort zu geben, war es nötig, die Metallreflexion der Hertz'schen Wellen zum Gegenstand einer neuen, wenn möglich quantitativen Experimentaluntersuchung zu machen.

Ueber den Gang und die Resultate einer solchen, welche ich auf Anregung des Hrn. Prof. Dr. Wiener im physikalischen Institut der Universität Leipzig hauptsächlich im Jahre 1899 ausgeführt habe, wird im Folgenden berichtet.

Die Apparate.

Eine stärkere und regelmässigere Wirkung als mit einem gewöhnlichen Righi'schen Oscillator, den ich im Anfang benutzte, erzielte ich mit einem Erreger, wo die Zuleitungsfunken statt in Luft an den äusseren Enden der Primärleiter in Oel und in der Nähe der Primärfunken übersprangen. Die Form, die ich demselben gab, wird durch die nebenstehende Fig. 1 erläutert. *E* ist ein cylinderförmiger Ebonitkasten, dessen Deckel *D* bequem ein- und ausgeschraubt werden kann. Durch ein Loch bei *C* lässt sich Petroleum eingiessen und zur Verhinderung des Ausfliessens davon bei seitlicher Drehung wird eine umgebogene Ebonitröhre in das Loch eingedrückt, durch welche eine Verbindung mit dem Aussenraum fortbesteht. Die beiden cylinderförmigen Primärleiter *L* und *L'* sind im Deckel bez. Boden des Kastens mittels Schraubengängen befestigt, sodass ihr gegenseitiger Abstand leicht regulirt werden kann. Ihre Länge beträgt 2,5 cm, ihr Durchmesser 1,0 cm; durch von aussen aufgeschobene Metallröhren *T*, *T'* kann aber ihre Länge beliebig vergrössert werden. *R* und *R'* sind zwei ringförmige Erweiterungen von *L* und *L'*, welche zur Aufnahme der Zuleitungsfunken von den Kugeln *K* und *K'* dienen. Diese Kugeln sind an zwei mit Schraubengängen versehenen Messing-

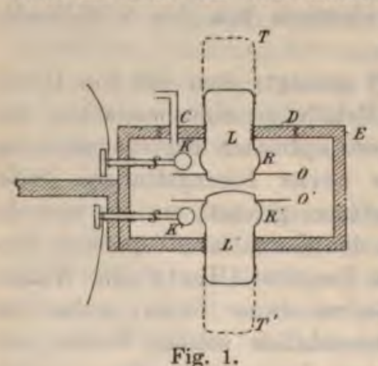


Fig. 1.

stäben *S* und *S'* befestigt, welche von aussen gedreht werden können, sodass die Abstände zwischen den Kugeln und den Primärleitern sich nach Belieben verändern lassen. *O* und *O'* sind zwei Ringe aus Ebonit, welche den schädlichen Einfluss[1]) des ultravioletten Lichtes der seitlichen Funken auf die Primärfunken beseitigen. Um die Funken von aussen sichtbar zu machen, sind die Wände des Ebonitkastens mit zwei Glasfenstern versehen.

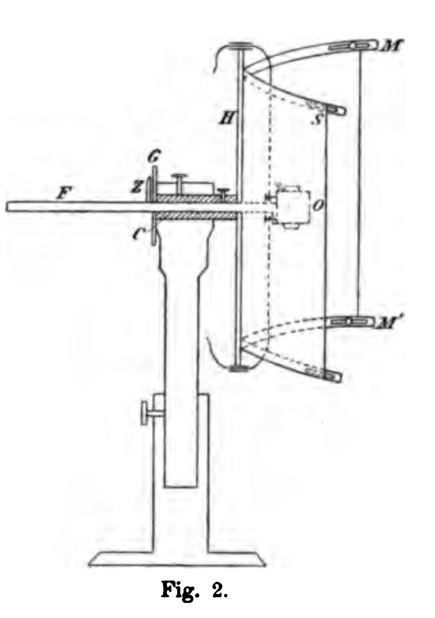


Fig. 2.

Fig. 2 zeigt den Oscillator mit Stativ und Wellenreflector.

Der parallelepipetförmige Ebonitstab *F*, welcher den Oscillator trägt, lässt sich horizontal verschieben, sodass die Primärleiter in die Brennlinie des parabolischen Reflectors sich leicht einstellen lassen. Der letztere besteht aus einem 40 cm hohen und 40 cm breiten an den Holzstab *H* angeschraubten Stück dünnen Messingbleches. Um demselben die gewünschte parabolische Form zu geben, braucht man nur die beiden ausgeglühten ziemlich dicken Messingstreifen *M* und *M'* nach einer gezeichneten Parabelcurve zu biegen und dann an das Spiegelblech so zu befestigen, wie aus der Figur hervorgeht. Der Hohlcylinder *C* lässt sich nebst Reflector und Oscillator um eine horizontale Axe drehen. Das Azimut der ausgestrahlten Schwingungen wird mittels des von *F* getragenen Zeigers *Z* auf dem Teilkreise *G* abgelesen.

Zum Erregen der Funken im Oscillator dienten ein Inductorium von mittlerer Grösse, getrieben mit fünf Accumulatoren, und ein Oeltransformator nach Tesla nebst Condensator und Funkenstrecke (Zinkspitzen). Die Schaltung wird durch

1) Vgl. H. Hertz, Ges. Werke 2. p. 100. 1895.

Fig. 3 veranschaulicht, wo J das Inductorium, T den Transformator, K die Leydener Flasche, F die Funkenstrecke und O den Oscillator bedeutet.

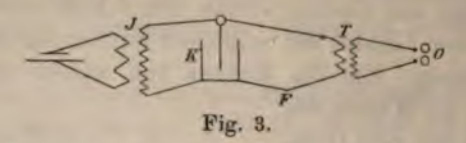


Fig. 3.

Als Interruptor für das Inductorium benutzte ich einen von der „Allgemeinen Elektricitäts-Gesellschaft in Berlin" gelieferten Quecksilber-Turbinenunterbrecher, welcher, mit einer Spannung von 110 Volt getrieben, bei Benutzung von zwei Segmenten ungefähr 1700 Unterbrechungen pro Minute gab. Durch seinen ruhigen und gleichförmigen Gang und sein überaus bequemes Handhaben erwies sich dieser Unterbrecher sowohl dem Deprez'schen als auch dem gewöhnlichen Quecksilberunterbrecher mit Contactstift weit überlegen. Die Intensität der mit ihm erzeugten elekrischen Schwingungen war so constant, dass von einem Standard-Indicator abgesehen werden konnte.

Unter allen von verschiedenen Forschern angewandten Wellenindicatoren ist ohne Zweifel der schon oben erwähnte Righi'sche Resonator für kurze Wellen der einfachste. Aber zu genauen quantitativen Messungen eignen sich diese Resonatoren nicht, was ich auch bei den Vorversuchen, die ich mit solchen ausführte, bald constatirte. Der Winkel, um den der Resonator, der von geradlinig polarisirten Wellen getroffen war, gedreht werden musste, damit die Funken aufhörten, konnte nur höchst annähernd bestimmt werden, und wenn der Resonator einmal in der Lage war, dass das Funkenspiel aufgehört hatte, genügte oft ein kleiner Stoss, um wieder Funken hervorzurufen.

Für quantitative Bestimmungen haben sich nach den Erfahrungen vieler Forscher die von Klemenčič eingeführten Thermoelemente als sehr geeignet erwiesen. Ich ging deshalb dazu über, eine Serie von Versuchen mit verschieden construirten Thermoelementen anzustellen. Von etwa zwanzig sich mehr oder weniger voneinander unterscheidenden Resonatoren, die ich mir machte, bin ich bei dem folgenden geblieben, der sich als der günstigste erwies. Sein Querdurchschnitt ist durch die nachstehende Fig. 4 dargestellt. An den

Stellen LL sind die Enden zweier Kupferdrähte, die mit einem Galvanometer vereinigt werden können, an zwei federnde Streifen KK aus dünnem Kupferblech gelötet. Diese sind mit Siegellack voneinander isolirt und strecken sich in den Hohlraum eines Ebonitkörpers E hinein, wo sie mit dem Thermoelement T verbunden sind. Die vordere Hälfte dieses Ebonitkörpers ist an den Stellen aa mit Kitt an der hinteren befestigt. Oberhalb und unterhalb der beiden Kupferbleche KK sind zwei isolirte Kupferscheiben S zum Schutz gegen Inductionswirkungen von aussen angebracht. Ihre äusseren Enden strecken sich in das etwa 40 cm lange Metallrohr M hinein.

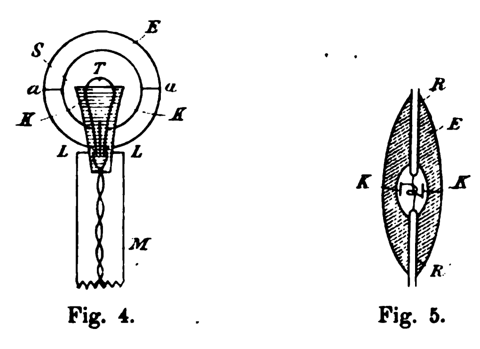


Fig. 4. Fig. 5.

Fig. 5 zeigt den Resonator im Längsdurchschnitt. E ist der Ebonitkörper, dessen Länge 1,5 cm beträgt. R und R' sind zwei 7 mm lange und 1 mm weite Hohlcylinder aus Kupferblech, welche zusammen mit dem zwischen sie geschalteten Thermoelement den Secundärleiter für die elektrischen Wellen bilden. Das Thermoelement besteht aus Drähten von Platin bez. Constantan. Der Platindraht, den ich durch Wegätzen des Silbers eines Wollastondrahtes erhielt, hat einen Durchmesser von nur 0,007 mm, während der Constantandraht 0,015 mm dick ist (durch Ziehen des letzteren gegen die scharfe Kante einer Glasplatte hatte ich seine ursprüngliche Dicke, 0,025 mm, etwas verringert). Diese Drähte sind zweimal umeinander geschlungen und an den vorher erwähnten Kupferblechen KK mit Lot befestigt. Als ich nämlich zuerst die Drähte einfach umeinander schlang, hörte nach einigen Stunden, wahrscheinlich infolge von Ausdehnung, der Contact zwischen ihnen auf, und ein stärkeres Anspannen war wegen ihrer

Dünnheit nicht möglich. Die Länge des Resonators lässt sich durch Einschieben von Metalldrähten in die Hohlcylinder *R* und *R'* beliebig vergrössern. Das Stativ des Resonators erhielt dieselbe Form und Grösse wie das des Oscillators.

Von allen den von mir versuchten Resonatoren war dieser der einzige, der eine vollständig geradlinige Polarisation der auffallenden Wellen anzeigte und gleichzeitig war er auch der empfindlichste. Ehe die Leitungsdrähte zum Galvanometer von dem Metallrohr *M* (Fig. 4) umgeben waren, gab das Galvanometer Ausschläge, auch wenn der Resonator in eine Metallhülle eingeschlossen war, d. h. es wurden in den Leitungsdrähten Ströme inducirt, die das Thermoelement erwärmten. Standen aber Oscillator und Resonator in der Nähe voneinander und waren sie gegeneinander gekreuzt, so hörten die Galvanometerausschläge erst dann vollständig auf, nachdem ausser dem Rohre *M* auch die Schutzbleche *S* angebracht waren. Die Galvanometerdrähte waren in ihrem weiteren Verlauf nur umeinander gewickelt — ein Einhüllen derselben in Stanniolblättchen war nicht nötig.

Als Galvanometer wurde ein Dubois-Rubens'sches mit seinem leichtesten Magnetsystem verwendet, das ich mit einem Papierdämpfer versah. Dasselbe wurde auf eine Schwingungsdauer von 12 Secunden astasirt. Der Widerstand des Galvanometers betrug nach Parallelschaltung seiner Rollen 5 Ohm. Durch eine Aufhängevorrichtung nach Julius[1]) wurde der störende Einfluss von den Erschütterungen im Erdboden fast völlig beseitigt. Wegen der magnetischen und der von dem elektrischen Strassenbahnbetrieb verursachten Störungen sah ich mich doch genötigt, die Messungen Nachts vorzunehmen, wo nur eine langsame Wanderung der Ruhelage des Magnetsystems vorkam.

Bei dem grössten Abstande zwischen Oscillator und Resonator, welcher in meinem Arbeitszimmer zu realisiren war und der etwa 6 m betrug, erhielt ich mit dem oben beschriebenen Erreger und Empfänger, wenn sie auf Resonanz abgestimmt und die Funken gut regulirt waren, Galvanometerausschläge von etwa 150 mm. Der Abstand des Galvanometers

1) W. A. Julius, Zeitschr. f. Instrumentenk. **16.** p. 267. 1896.

von Scala und Fernrohr war 2,5 m. 1 mm Ausschlag entsprach einer Stromstärke von $1{,}01 \cdot 10^{-8}$ Amp.

Da die Dielektricitätsconstanten von Ebonit bez. Siegellack, womit der hier in Betracht kommende Resonator umgeben ist, grösser als Eins sind, so ist auch die halbe zugehörige Wellenlänge grösser als die geometrische Länge des Resonators. Als ich nach der Methode mit stehenden Wellen vor einem Metallspiegel die Wellenlänge des unverlängerten Resonators maass, erhielt ich für die halbe Wellenlänge den Wert 4 cm, während der Resonator selbst, wie schon oben erwähnt, nur 1,8 cm lang war. Verlängert man dagegen den Resonator mittels Kupferdrähten, die Luft zur unmittelbaren Umgebung haben, so nähert sich die halbe Wellenlänge immer mehr der Länge des Resonators. War z. B. der letztere 4 cm lang, so war die halbe Wellenlänge 5 cm, während der 9,6 cm lange Resonator einer halben Wellenlänge von 10 cm entsprach. — Die Boltzmann'sche Interferenzmethode mit zwei verschiebbaren Metallspiegeln gab für die gemessenen Wellenlängen, wie zu erwarten war, dieselben Werte wie die Methode mit den stehenden Wellen.

Da die beiden Primärleiter je 2,5 cm lang sind, sollte eigentlich die Grundschwingung des Oscillators eine Länge von etwas über 10 cm haben. Die aus Ebonit und Petroleum bestehende nächste Umgebung dieser Leiter scheint jedoch eine erhebliche Verlangsamung dieser Grundschwingung zu bewirken. Als ich die Länge des Resonators, welcher ohne Reflector in einem unveränderten Abstand vom Oscillator aufgestellt war, allmählich vergrösserte, erreichten die Galvanometerausschläge ein Maximum erst wenn der Resonator 9,6 cm lang war, entsprechend einer halben Wellenlänge von 10 cm. Es ist aber auch denkbar, dass die Zuleitungsdrähte, welche von dem Teslatransformator ausgingen, Schwingungen ausstrahlten, die sich mit den von den Primärleitern ausgehenden Wellen superponirten und die Gestalt der Resonanzcurve veränderten.

Nach diesen Wellenlängenmessungen entschloss ich mich, die Versuche über die Metallreflexion der Schwingungen zuerst mit einem Resonator von der Länge 9,6 cm (entsprechend einer halben Wellenlänge von 10 cm) anzustellen und sie nachher mit kürzeren Resonatoren zu wiederholen.

Da es hauptsächlich galt, die Reflexion bei schiefer Incidenz zu studiren, war ein Metallspiegel von recht grossen Dimensionen erforderlich. Es wurde für diesen Zweck ein 1 m hoher und 3 m langer Holzrahmen, mit einem darauf straff gespannten Tuche aus Leinwand, angefertigt. Dieses Tuch wurde mit Stanniolblättern überzogen. Der Contact erwies sich bei galvanischer Prüfung als vollkommen. Ausserdem dass dieser Metallschirm eine sehr ebene Fläche hat, ist er wegen seiner geringen Schwere relativ bequem zu handhaben.

Um schädliche Reflexionen zu vermeiden und ein möglichst homogenes Strahlenbündel zu bekommen, schloss ich den

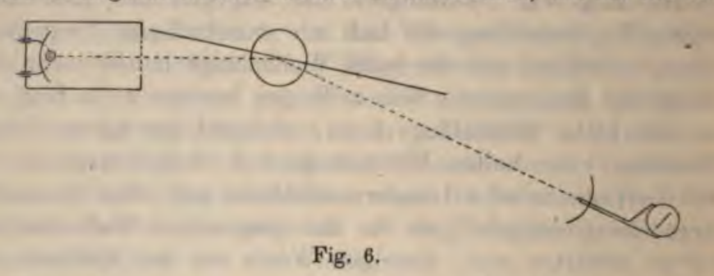


Fig. 6.

Oscillator in einen grossen Metallkasten ein, welcher in seiner vorderen Wand eine kreisförmige Oeffnung von etwa 30 cm Durchmesser hatte, wodurch das Strahlenbündel austrat. Dicht vor dieser Oeffnung wurde ein Gitter, bestehend aus auf ein Papierblatt geklebten Stanniolstreifen, so angebracht, dass es in seiner eigenen Ebene um eine horizontale Axe gedreht werden konnte.

Zum Messen von den Einfalls- und Reflexionswinkeln diente eine graduirte Scheibe, deren Mitte durch feine Fäden mit den Füssen des Oscillators und Resonators verbunden war. Der Schirm wurde dann so aufgestellt, dass seine verticale Drehungsaxe durch die Mitte der Kreisscheibe ging.

Fig. 6 stellt schematisch die ganze Anordnung der Apparate dar.

Versuche über die Metallreflexion der elektrischen Schwingungen.

1. Mit dem im Vorhergehenden beschriebenen Resonator misst man die von ihm aufgefangene und in Joule'sche Wärme umgesetzte Energie der auffallenden Wellen. Bleibt das Azimut dieser Wellen unverändert, so verhalten sich die Galvanometer-

ausschläge bei verschiedenen Azimuten des Resonators wie die Quadrate der zu dem Resonator parallelen Componenten von der Amplitude der oscillirenden elektrischen Kraft. Sind die Wellen linear polarisirt, so haben die Ausschläge ihr Maximum, wenn Oscillator und Resonator miteinander parallel sind, und verschwinden, wenn der Resonator um einen rechten Winkel gedreht wird. Tritt ein solches Verschwinden der Galvanometerausschläge nicht ein, sodass sie lediglich durch ein Minimum gehen, so sind die Wellen als elliptisch polarisirt aufzufassen. Die Axen der elliptischen Schwingung fallen mit den Richtungen des Resonators zusammen, die einer maximalen bez. minimalen Wirkung im Galvanometer entsprechen. Eine circulare Polarisation würde sich durch gleiche Ausschläge bei jeder Orientirung des Resonators auszeichnen.

Um ein möglichst paralleles Strahlenbündel zu erzielen entfernte ich den Oscillator soweit wie möglich von der Oeffnung des Metallkastens, worin er eingeschlossen war und stellte vor diese Oeffnung mehrere Metallschirme mit gleich grossen kreisförmigen Oeffnungen auf. Ich konnte so, wenn der Resonator 9,6 cm lang war, die von dem grossen Stanniolschirme reflectirten Schwingungen bis zu einem Einfallswinkel von 79° studiren, ohne eine directe Einwirkung zu befürchten. Versuchte ich aber weiter zu gehen, indem ich den Durchmesser der Diaphragmen verkleinerte und den Abstand des Resonators vom Spiegel vergrösserte, so wurde die Wirkung im Galvanometer so gering, dass ein sicheres Urteil über die seitlichen Eigenschaften der Wellen nicht mehr als zulässig erschien. Wurde aber der Resonator verkürzt, bis die entsprechende Wellenlänge 10 cm war und der ursprüngliche grosse Wellenreflector des Empfängers durch einen kleineren ersetzt, so konnte ich die Reflexion bis zu einem Einfallswinkel von 83° verfolgen.

Als ich die elektrischen Wellen so einfallen liess, dass ihre Schwingungsrichtung mit dem Spiegel einen Winkel von 45° bildete, glaubte ich zuerst in der That eine deutliche Elliptícität der reflectirten Wellen bei grossen Einfallswinkeln constatiren zu können. Es zeigte sich aber doch nachher, dass dies auf Fremdwirkungen, hauptsächlich auf einer ungenügenden Abschirmung der directen Strahlen beruhte. Ich

war bis jetzt so vorgegangen, dass ich zuerst das Inductorium drehte, bis es im offenen Galvanometer keine Ablenkung verursachte, wonach ich in Abwesenheit des reflectirenden Spiegels die seitlichen elektromagnetischen Strahlen soweit abschirmte, dass der Resonator, wo er für einen gewissen Reflexionswinkel aufgestellt war, keinen Ausschlag gab. In dem allmählichen Wandern der Ruhelage des Magnetsystems im Galvanometer, welches auch Nachts vorkam, erblickte ich anfangs keinen Uebelstand. Es zeigte sich aber, dass infolge des letzten Umstandes eine Einwirkung des Inductoriums auf das Galvanometer wieder auftreten konnte, nachdem sie kurz vorher beseitigt worden war. Ich fand z. B. einmal, als eine directe Wirkung der Wellen sich nicht zeigte, dass nach Ausschaltung des Resonators das Inductorium wieder eine Ablenkung im Galvanometer erzeugte, obwohl ich seinen Einfluss eine Weile vorher bei einem anderen Einfallswinkel aufgehoben hatte. Es war also eine unabsichtliche Compensation der directen Strahlen durch die magnetische Wirkung des Inductoriums eingetreten, die aber hier keineswegs zulässig war.

Ich wiederholte nochmals alle Messungen und berücksichtigte jetzt nur die Ablesungen, vor und nach welchen das Inductorium keine Wirkung auf das Galvanometer ausübte. Es war auf diesen Umstand besonders bei schiefer Incidenz mit besonderer Sorgfalt zu achten, wo das Abschirmen der directen Strahlen die grösste Schwierigkeit bot und nur eine sehr schwache reflectirte Energie zu beobachten war. Bei kleineren Einfallswinkeln konnte natürlich der Abstand des Resonators von der Mitte des Spiegels verkleinert und die Diaphragmen, welche das vom Oscillator ausgehende Strahlenbündel begrenzten, vergrössert werden, wodurch eine erheblich stärkere Wirkung im Galvanometer erzielt wurde. Ich gab auch jetzt mit grösserer Sorgfalt als bisher darauf acht, dass die Drehungsaxe des grossen Metallspiegels und die Verbindungslinie der Teilstriche 0 und 180° auf den Teilkreisen des Erregers und Empfängers genau in die Lotlinie eingestellt waren.

Die Ergebnisse der letzten diesbezüglichen Messungen, welche ich mit dem 4 cm langen Resonator ($\lambda = 10$ cm) angestellt habe, sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Die Azimute des Oscillators und Resonators, die auf den zu-

gehörigen Teilkreisen von hinten abgelesen wurden, wurden als positiv gerechnet in der zu dem Drehungssinn des Uhrzeigers entgegengesetzten Richtung. Das Azimut des Oscillators war hier stets $+45^{0}$. Der Einfallswinkel ist mit i bezeichnet, während β das Azimut des Resonators und s das in Millimetern ausgedrückte Mittel aus drei Galvanometerablesungen ist. Für $s = 100$ mm weichen die einzelnen Ausschläge höchstens um 2 mm voneinander ab.

i	β	s	i	β	s
15°	0°	72,3	75°	0°	8,0
	90	72,7		90	8,0
	+45	139,7		+45	15,7
	−45	0		−45	0
30	0	71,7	77	0	6,0
	90	72,3		90	6,0
	+45	141,7		+45	12,0
	−45	0		−45	0
50	0	46,3	79	0	4,0
	90	45,3		90	4,0
	+45	88,0		+45	8,0
	−45	0		−45	0
65	0	30,3	81	0	3,0
	90	30,0		90	3,0
	+45	61,0		+45	6,0
	−45	0		−45	0
70	0	18,0	82	0	2,0
	90	18,0		90	2,0
	+45	35,3		+45	4,0
	−45	0		−45	0
73	0	11,0	83	0	1,5
	90	11,0		90	1,5
	+45	20,0		+45	3,0
	−45	0		−45	0

Aus diesen Zahlen geht nun deutlich hervor, dass eine Ellipticität der reflectirten Schwingungen nach der bisherigen Methode nicht zu constatiren ist. Sie lassen vielmehr darauf schliessen, dass innerhalb der hier erreichten Genauigkeit bei

jedem Einfallswinkel, kleiner als 83°, die parallel und senkrecht zum Spiegel reflectirten Componenten der elektrischen Kraft mit derselben Stärke und ohne relative Phasendifferenz reflectirt werden. Bei den grösseren Einfallswinkeln ist allerdings die beobachtete Intensität sehr gering und für Incidenzwinkel zwischen 83° und 90° giebt diese Methode gar keinen Aufschluss.

Auch der 9,6 cm lange Resonator ($\lambda/2 = 10$ cm), womit ich die Reflexion bis $i = 79°$ verfolgte, gab mit den vorigen völlig analoge Ergebnisse.

Wenn die einfallenden Wellen nicht wie bisher unter einem Azimut von $-45°$, sondern unter einem beliebigen anderen Azimut polarisirt waren, so fand ich auch die reflectirten Strahlen stets unter demselben Azimut geradlinig polarisirt.

Mit einem Righi'schen Silberstreifen konnte ich auch nicht eine elliptische Polarisation beobachten.

2. Um die Reflexion bei Einfallswinkeln, die grösser als 83° sind, wo es nicht möglich war, die directen Strahlen abzuschirmen, untersuchen zu können, war es nötig, die Interferenz der directen und der reflectirten Strahlen zu studiren.

Aehnlich wie bei normaler Incidenz müssen auch bei schiefer Incidenz stehende Wellen sich ausbilden. Wenn man die vom Oscillator ausgehenden Schwingungen einmal parallel und ein anderes Mal senkrecht zum Spiegel einfallen lässt, und es bei verschiedenen Einfallswinkeln gelingen würde die Lage der Knoten und Bäuche der vor dem Spiegel entstandenen stehenden Wellen in beiden Fällen festzustellen, so liesse sich die Frage, ob durch die Metallreflexion eine Phasendifferenz zwischen den beiden Hauptcomponenten eintritt, dadurch entscheiden. Bei Einfallswinkeln, die kleiner als etwa 60° waren, fand ich nach dieser Methode für die durch die Metallreflexion bewirkte Phasenänderung stets den Wert π. Bei grösseren Einfallswinkeln gelang es mir aber nicht die Lage dieser Knoten und Bäuche zu bestimmen, weil sie ausserhalb des gemeinsamen Gebietes der einfallenden und der reflectirten Strahlen rückten, sodass beim Entfernen des Resonators (ohne Reflector) vom Spiegel die gemessene Intensität ziemlich unverändert blieb.

3. Erfolgten die einfallenden Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene und war der Resonator parallel zur Drehungsaxe des Spiegels und in einem unveränderten Abstande in der unmittelbaren Nähe von derselben aufgestellt, so nahm, bei wachsendem i, die beobachtete Intensität stetig ab, um bei grossen Einfallswinkeln zu verschwinden. Die bei abnehmenden Einfallswinkeln wachsenden Ausschläge rührten von dem Gangunterschiede der directen und reflectirten Strahlen her, der bei streifender Incidenz verschwindet. Die durch die Reflexion herbeigeführte Phasenänderung der senkrecht zur Einfallsebene tattfindsenden Schwingungen kann also auch bei den grössten Einfallswinkeln nicht merklich von π abweichen.

4. Erfolgten die Schwingungen in der Einfallsebene und war der Resonator senkrecht zur Drehungsaxe des Spiegels, aber parallel zum Spiegel selbst in einem unveränderten Abstande (1 cm) von demselben aufgestellt, so nahm ebenfalls, bei wachsendem i, die Intensität ab. Die auf den Resonator wirkenden Componenten der directen und reflectirten Wellen nahmen aber gleichzeitig ab und wurden schliesslich so minimal, dass ein Schluss über die durch Reflexion bewirkte Phasenänderung in diesem Falle wenigstens für grössere Einfallswinkel nicht statthaft ist.

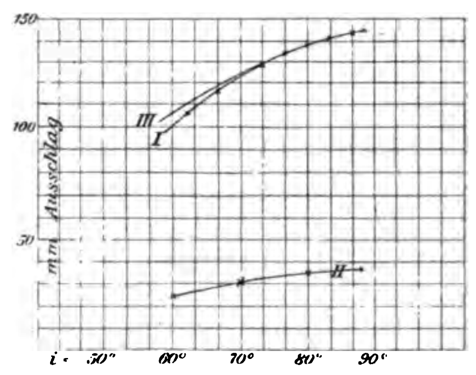


Fig. 7.

5. Der Resonator — 4 cm lang — wurde jetzt senkrecht zum Spiegel orientirt, sodass der Abstand seiner Mitte vom Spiegel 3 cm betrug, und die Galvanometerausschläge wurden beim Variiren von i beobachtet, während der Oscillator fortwährend zur Einfallsebene parallel war. Ich erhielt dann für grosse Einfallswinkel die Curve I in Fig. 7.

Nach dem Entfernen des Spiegels gab der Resonator allein, in seine letzten Lagen zurückgedreht, die Curve II. Der Verlauf dieser beiden Curven stimmt nun, wie wir gleich einsehen

werden, mit der Annahme überein, dass auch bei den grössten Einfallswinkeln (bis $i = 87^0$) die durch die Reflexion bewirkte Phasenänderung der parallel zur Einfallsebene gerichteten Schwingungen gleich π ist.

Wir wollen in der That diese Annahme machen und von dem Gangunterschied der directen und reflectirten Strahlen zunächst absehen. In Fig. 8 sei S der Spiegel, E ein einfallender und R der reflectirte Strahl. Im Punkte P, wo die Reflexion

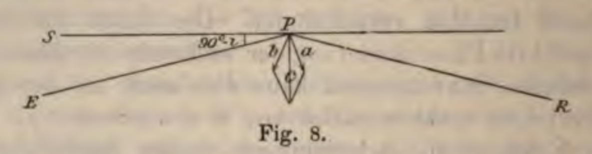


Fig. 8.

stattfindet, stellt a die Amplitude und Richtung der einfallenden Schwingung, b die der reflectirten dar. Bei normaler Incidenz sind a und b mit dem Spiegel parallel und bilden einen Winkel π miteinander. Die Diagonale c giebt die Grösse und Richtung der resultirenden Schwingungsamplitude an. Wir wollen noch die Annahme machen, dass a gleich b ist, sodass c mit dem senkrecht zum Spiegel stehenden Resonator parallel ist. Wir haben dann

$$c = 2\,a \cos(90^0 - i)$$
$$= 2\,a \sin i.$$

Die zu beobachtende Intensität

$$k\,c^2 = k \,.\, 4\,a^2 \sin^2 i$$

ist folglich dem Quadrate des Sinus des Einfallswinkels proportional. In Abwesenheit des Spiegels ist die Intensität gleich $k \,.\, a^2 \sin^2 i$, d. h. ein viertel von derjenigen im vorigen Falle. Für Einfallswinkel, die grösser als etwa 70^0 sind, betragen nun in der That die Ordinaten der Curve II in Fig. 7 ein viertel von den entsprechenden der Curve I. Es bedeutet ferner III eine Curve, deren Ordinate für $i = 87^0$ gleich der entsprechenden der Curve I ist, und deren übrigen Ordinaten $\sin^2 i$ proportional sind. Für $i > 70^0$ fallen die Curven I und III angenähert zusammen. Für kleinere Werte von i weichen die Curven I und III voneinander ab, was von dem Gangunterschiede der directen und der reflectirten Strahlen herrührt, der bei den grösseren Einfallswinkeln zu vernachlässigen ist.

Für $i > 87^0$ nahmen die Ausschläge etwas ab, was sich jedoch dadurch erklären lässt, dass in diesem Falle das durch das Diaphragma austretende Strahlenbündel von dem reflectirenden Spiegel geteilt wurde, sodass die Gesamtintensität der einfallenden Wellen herabgesetzt wurde.

6. Es wurde nun die Drehungsaxe des Spiegels etwa um 1 dm seitswärts verschoben und die Anordnung getroffen, dass die Wellen unter einem Azimut von 45^0 *streifend* einfielen, während der Resonator in der Verlängerung des Spiegels aufgestellt war. Der Resonator wurde um seine horizontale Axe gedreht und die Ausschläge (s) in verschiedenen Azimuten (β) des Resonators gemessen. In der folgenden Tabelle sind die gefundenen Werte zusammengestellt.

β	s (mm)	Mittel	β	s (mm)	Mittel
0^0	0		$+90^0$	125	
	0			124	
	0	0		126	125,0
$+45^0$	63		-45^0	62	
	63			63	
	63	63,0		63	62,7

Nach dem Entfernen des Spiegels wurde gefunden:

β	s (mm)	Mittel
-45^0	64	
	65	
	64	64,3
$+45^0$	0	
	0	
	0	0

Bei Anwesenheit des Spiegels zeigte also der Resonator in den beiden zu einander senkrechten Azimuten -45^0 und $+45^0$ dieselbe Wirkung, im Azimut 90^0 die doppelte und für $\beta = 0$ keine Wirkung. Für $\beta = -45^0$ war der Spiegel ohne Einfluss.

Es folgt hieraus, dass auch bei streifendem Einfall die Schwingungen, ohne merkbar an Intensität zu verlieren, als geradlinig polarisirt reflectirt werden. Um dies einzusehen wollen wir annehmen, dass c' die Amplitude der unter dem Azimut 45^0 einfallenden Schwingung bedeutet. Wenn die beiden Hauptcomponenten a' und b' von der Schwingung c' durch die Reflexion eine Phasenänderung gleich π erleiden, können wir sie nach der Reflexion durch die Vectoren a und b in der Fig. 9 darstellen. Ist a numerisch gleich b, so ist ihre Resultante c parallell zu dem Resonator im Azimut $\beta = +45^0$. In der dazu senkrechten Lage, also im Azimut $\beta = -45^0$,

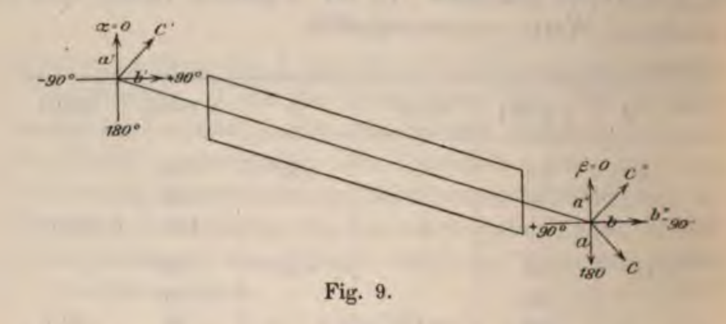


Fig. 9.

wirkt auf den Resonator die directe Schwingung c'' mit den Componenten a'' und b''. Sind a und a'' entgegengesetzt gleich, so darf der Resonator im Azimut 0^0 keine Wirkung geben, was auch die Beobachtungen bestätigen. Da nun a'' gleich b'' ist, so folgt aus der Annahme $a = b$, dass auch b und b'' einander gleich sind. Folglich muss auch c^2 gleich c''^2 sein, d. h. der Resonator muss in den Azimuten $+45^0$ und -45^0 dieselben Ausschläge geben. Ist der Resonator horizontal, so ist die aufgefangene Energie dem Ausdrucke $c''^2 + c^2 = 2c^2$ proportional, d. h. die Ausschläge müssen zweimal so gross sein wie im Falle $\beta = 45^0$.

7. Dass nicht nur bei streifender Incidenz, sondern bei einem beliebigen Einfallswinkel ein durch die Reflexion verursachter Intensitätsverlust sich nicht bemerkbar macht, habe ich auch durch directe Versuche bestätigt. Ich liess die elektrischen Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene einfallen und maass die reflectirte Intensität zuerst bei kleineren Ein-

fallswinkeln ohne den Abstand zwischen dem Resonator und der Mitte des Spiegels zu verändern. Ich erhielt dann folgende Werte (s bezeichnet wieder das Mittel aus drei Ablesungen):

i	s (mm)
15°	108,7
20	109,7
30	107,3

Ich entfernte dann den Spiegel und maass die Intensität des directen Strahlenbündels bei unverändertem Abstande zwischen dem Resonator und der Mitte der Kreisscheibe, welche zur Messung der Drehung des Spiegels diente. Ich fand dann als Mittel aus fünf Ablesungen, die höchstens um 3 mm voneinander abwichen:

$$s = 108{,}0 \text{ mm}.$$

Bei grösseren Einfallswinkeln musste ich den Abstand des Resonators von der Mitte des Spiegels vergrössern und ausserdem die seitlichen Strahlen soweit wie möglich abschirmen. Es ergab sich:

i	s (mm)	i	s (mm)
30°	62,7	70°	12,0
40	63,3	75	12,0
40	35,0	75	7,0
50	34,7	79	7,0
60	34,3	79	3,0
60	19,0	82	3,0
70	19,3		

Auch diejenigen Messungen, die ich mit parallel zur Einfallsebene stattfindenden Schwingungen ausführte, führten zu analogen Ergebnissen, was ja auch nach den früheren Versuchen zu erwarten war.

Trägt man die verschiedenen Einfallswinkel als Abscissen, die gemessenen Intensitäten der reflectirten Wellen als Ordinaten auf, so ist die dadurch erhaltene Curve eine zu der Abscissen-

axe parallele gerade Linie, unter welchem Azimut die Schwingungen auch polarisirt sind.

8. Mit den Schwingungen in der Einfallsebene machte ich noch einige Controlversuche. Der Resonator (ohne Reflector) wurde senkrecht zum Oscillator, aber parallel zu der Verbindungslinie zwischen beiden orientirt und starr mit dem Oscillator verbunden (der Abstand betrug 70 cm). Das ganze System war um eine horizontale Axe beweglich und liess sich über dem horizontal liegenden Spiegel für einen beliebigen Einfallswinkel der in der Einfallsebene erfolgenden Schwingungen einstellen. Es übten bei dieser Anordnung bloss die reflectirten Wellen eine Einwirkung auf den Resonator aus. War bei keiner Incidenz eine merkliche Absorption vorhanden, so mussten, wie leicht einzusehen, die Galvanometerausschläge dem Ausdrucke $\sin^2 2i$ proportional sein. Dies bestätigte sich auch sehr gut bei meinen Versuchen, die ich im Intervalle $i = 5^0$ bis $i = 85^0$ ausführte.

9. Die bis jetzt beschriebenen, mit dem Stanniolspiegel angestellten Versuche habe ich noch mit einem Kupferspiegel von denselben Dimensionen wiederholt und bin dabei zu völlig analogen Ergebnissen gekommen. Der Kupferspiegel bestand aus einem einzigen Blechstück, der auf der Rückseite von dem Rahmen des Stanniolspiegels befestigt war.

Zusammenfassung.

Aus allen diesen Versuchen, deren Genauigkeit jedoch nicht 2 Proc. übersteigt, geht nun deutlich hervor, dass in Uebereinstimmung mit der Theorie geradlinig polarisirte elektrische Wellen von der Grössenordnung $\lambda = 10$ cm von einem ebenen Metallspiegel bei jedem Einfallswinkel, ohne merklich an Intensität zu verlieren, als geradlinig polarisirt reflectirt werden und dass das Schwingungsazimut der reflectirten Wellen mit dem der einfallenden übereinstimmt. Jede von den beiden Hauptcomponenten der einfallenden Wellen erleidet durch die Reflexion eine Phasenänderung, die sich von π nicht merkbar unterscheidet. Wenn eine Ellipticität bei den reflectirten Schwingungen vorhanden ist, so ist jedenfalls die eine Axe der Schwingungsellipse so verschwindend klein, dass ihr Da-

sein mit den hier benutzten Wellenindicatoren sich nicht nachweisen lässt.

Da die Empfindlichkeit dieser Resonatoren wohl nicht kleiner ist als die der Righi'schen, so scheint nichts anderes übrig zu bleiben, als die in der Einleitung referirten Righi'schen Versuche auf nicht genügend beachtete fremde Wirkungen zurückzuführen. Es ist denkbar, dass, wenn die directen Strahlen auch so schwach waren, dass sie allein keine Funken im Resonator hervorriefen, sie doch, nachdem solche Funken durch die reflectirten Wellen einmal erregt waren, die Intensität derselben steigern oder verkleinern konnten, je nach dem Gangunterschied der directen und der reflectirten Wellen. Vielleicht waren auch bei diesen Versuchen störende Reflexionen von den Zimmerwänden oder von irgend welchen anderen Gegenständen vorhanden.

Zum Schluss ist es mir eine angenehme Pflicht, meinem hochverehrten Lehrer und Chef, Hrn. Professor Dr. O. Wiener, für die vielfachen fördernden Ratschläge und die in weitgehender Weise mir zur Verfügung gestellten Mittel des Institutes meinen herzlichsten Dank auszusprechen.

Auch den Herren Professor Dr. P. Drude und Professor Dr. O. Wiedeburg bin ich für viele wertvolle Ratschläge zu grossem Dank verbunden.

Leipzig, Physikal. Institut der Universität.

(Eingegangen 8. Januar 1901.)

14. *Ueber die Verteilung der Elektricität auf dem Ellipsoid; von H. Dörrie.*

Vorgelegt ist ein metallisches Ellipsoid mit den Halbaxen a, b, c, welches auf irgend eine Weise mit der Elektricitätsmenge M geladen ist. Gefragt wird nach der Verteilung der Elektricität in den Oberflächenpunkten des Ellipsoids.

Um diese Frage zu beantworten, denken wir uns zunächst eine metallische Kugel vom Radius 1 mit der Elektricitätsmenge M geladen. Ihr Mittelpunkt falle mit dem Anfangspunkte eines rechtwinkligen Coordinatensystems $x\,y\,z$ zusammen, sodass ihre Oberflächengleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

lautet.

Diese Kugel denken wir uns nun *deformirt*, indem wir aus jedem Punkte x, y, z einen neuen Punkt ξ, η, ζ vermöge der Gleichungen

$$\xi = a\,x\,, \qquad \eta = b\,y\,, \qquad \zeta = c\,z$$

entstanden denken. Bei dieser Deformation geht die Kugel in ein Ellipsoid über, dessen Oberfläche die Gleichung hat

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 1\,.$$

Wir erkennen ferner leicht, dass jede gerade Linie durch die obige Deformation wieder in eine Gerade übergeht, wie auch aus jeder Ebene wieder eine Ebene wird. Uns interessirt speciell die Frage, wie sich die Grösse eines ebenen Flächenstückes durch jene Deformation ändert.

Das vorgelegte Flächenstück F möge vom Anfangspunkte der Coordinaten die Entfernung l haben und der Ebene

$$x\,\alpha + y\,\beta + z\,\gamma - l = 0$$

angehören. Diese Ebene geht durch die Deformation in die neue Ebene

$$\xi\,\alpha_1 + \eta\,\beta_1 + \zeta\,\gamma_1 - p = 0$$

über, die vom Anfangspunkte die Entfernung p habe. Es ist dann

$$p = \frac{l}{w}$$

$$\alpha_1 = \frac{\alpha}{a\,w}, \quad \beta_1 = \frac{\beta}{b\,w}, \quad \gamma_1 = \frac{\gamma}{c\,w}$$

mit

$$w^2 = \left(\frac{\alpha}{a}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{b}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{c}\right)^2.$$

Nennen wir das Flächenstück, in welches F vermöge der Deformation übergeht, F_1, die Projectionen von F bez. F_1 auf die xy-Ebene F' bez. F'_1, so bestätigen wir leicht die Richtigkeit der drei Gleichungen

$$F' = F\gamma;$$

$$F'_1 = F_1 \cdot \frac{\gamma}{c\,w},$$

$$F'_1 = F' . a\,b .$$

Aus ihnen erhalten wir sofort

$$F_1 = F\,a\,b\,c\,w,$$

und wenn wir noch für w den Wert l/p einsetzen,

$$F_1 = a\,b\,c\,\frac{l}{p}\,F, \tag{1}$$

womit wir unsere Frage beantwortet haben.

Wir wenden die Formel (1) auf ein Flächenelement $d\,s$ unserer Kugel an, für welches $l = 1$ ist. Dieses Flächenelement geht durch die Deformation in das Flächenelement $d\,\sigma$ des Ellipsoids über; und es ist also nach (1)

$$d\,\sigma = \frac{a\,b\,c}{p}\,d\,s. \tag{2}$$

Dabei bedeutet p das Lot vom Anfangspunkte der Coordinaten auf die $d\,\sigma$ enthaltende *Tangentialebene des Ellipsoids.*

Nun hatte die elektrische Dichte auf der Kugel den Wert

$$\frac{M}{4\pi}.$$

Nennen wir die unbekannte elektrische Dichte des Ellipsoids an der Stelle $d\,\sigma$ $\varkappa$, und stellen wir uns vor, dass die auf $d\,s$ vor der Deformation befindliche Elektricitätsmenge

$$\frac{M}{4\pi}\,d\,s$$

bei der Deformation sich weder vermehrt noch vermindert habe, so hätten wir die Gleichung

$$\varkappa \, d\sigma = \frac{M}{4\pi} ds,$$

woraus vermöge (2) die Gleichung

$$\varkappa = \frac{Mp}{4\pi abc} \tag{3}$$

folgen würde.

Wir werden nun nachweisen, dass die so erhaltene Formel (3) wirklich die Dichte der Elektricität auf dem Ellipsoid darstellt.

Zu dem Zwecke betrachten wir irgend einen Punkt P (x_0, y_0, z_0) im Innern der Kugel, aus welchem durch die Deformation im Innern des Ellipsoids der Punkt Π (ξ_0, η_0, ζ_0) entstanden ist. Die Punkte von ds bez. $d\sigma$ verbinden wir mit P bez. Π und verlängern die Verbindungsgeraden bis zum Schnitt mit der Oberfläche der Kugel bez. des Ellipsoids. Auf diese Weise entstehen hier zwei neue Flächenelemente ds_1 und $d\sigma_1$. Der Schwerpunkt von ds werde mit C bezeichnet und habe die Coordinaten x, y, z. Den Schwerpunkt von ds_1 nennen wir C_1 und seine Coordinaten x_1, y_1, z_1. C und C_1 gehen durch die Deformation über in Γ (ξ, η, ζ) bez. Γ_1 (ξ_1, η_1, ζ_1), wobei Γ in $d\sigma$, Γ_1 in $d\sigma_1$ liegt. Endlich bezeichnen wir noch die Entfernungen

$$PC, \qquad PC_1, \qquad \Pi\Gamma, \qquad \Pi\Gamma_1$$

bezüglich mit

$$r, \qquad r_1, \qquad \varrho, \qquad \varrho_1$$

und die Richtungscosinus der Strecke PC mit λ, μ, ν.

Nunmehr beweisen wir die Gleichung

$$\frac{\varkappa \, d\sigma}{\varrho^2} = \frac{\varkappa_1 \, d\sigma_1}{\varrho_1^2}, \tag{4}$$

wobei $\varkappa$ und $\varkappa_1$ die Dichten der Elektricität an den Stellen Γ und Γ_1 bedeuten. Diese Gleichung ist in der That richtig; denn vermöge der Gleichungen

$$\varkappa \, d\sigma = \frac{M}{4\pi} ds,$$

$$\varkappa_1 \, d\sigma_1 = \frac{M}{4\pi} ds_1,$$

$$\frac{ds}{r^2} = \frac{ds_1}{r_1^2}$$

lässt sie sich schreiben

$$r^2 \varrho_1^2 = \varrho^2 r_1^2,$$

und dies ist richtig; denn wir haben

$$\begin{aligned} \varrho^2 &= (\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2 + (\zeta - \zeta_0)^2 \\ &= a^2 (x - x_0)^2 + b^2 (y - y_0)^2 + c^2 (z - z_0)^2 \\ &= (a^2 \lambda^2 + b^2 \mu^2 + c^2 \nu^2) r^2. \end{aligned}$$

Ebenso folgt

$$\varrho_1^2 = (a^2 \lambda^2 + b^2 \mu^2 + c^2 \nu^2) r_1^2.$$

Die Gleichung (4) drückt aber aus, dass sich die Wirkungen der Elektricitätsmengen auf $d\sigma$ und $d\sigma_1$ im Punkte Π zerstören. Da wir die ganze Oberfläche des Ellipsoids auf derartige Weise in Paare von Flächenelementen zerlegen können, so ist die gesamte Wirkung der Elektricität der Ellipsoidoberfläche auf jeden beliebigen inneren Punkt Π Null, d. h. die von uns angegebene Formel (3) war richtig.

Zusammenfassend können wir sagen:

Ist O irgend ein Oberflächenpunkt eines mit der Elektricitätsmenge M geladenen Ellipsoids mit den Halbaxen a, b, c, und bedeutet p das Lot vom Mittelpunkte des Ellipsoids auf die in O an das Ellipsoid gelegte Tangentialebene, so hat die Dichte der Elektricität an der Stelle O den Wert

$$\frac{Mp}{4\pi abc}.$$

Lingen a/Ems, 16. Januar 1901.

(Eingegangen 17. Januar 1901.)

15. *Zur Lichtdurchlässigkeit des Wasserstoffs;* *von V. Schumann.*

Ich habe früher[1]) gezeigt, dass Wasserstoff ausserordentlich lichtdurchlässig ist. Erst mit Schichten grösserer Dicke gelang es mir eine Schwächung hindurchgesandter Strahlen nachzuweisen. Zu einem ähnlichen Ergebnis scheint auch Hr. P. Lenard bei Untersuchung der Wirkung des ultravioletten Lichtes auf gasförmige Körper[2]) gekommen zu sein. In neuerer Zeit, wo ich mich mit diesem Gegenstande wieder zu beschäftigen hatte, gelangte ich jedoch zu Widersprüchen. Bei gleichbleibender Versuchsanordnung erwies sich auf dieselbe Weise hergestellter Wasserstoff sehr verschieden durchlässig. Von den Ursachen dieser Abweichungen soll nachstehend die Rede sein.

Meine Beobachtungen erfolgten, da sie sich auf Wellen unter 185 $\mu\mu$ beschränkten, auf photographischem Wege. Ich bediente mich dazu meines Vacuumspectrographen[3]) mit Flussspatkörper und einer an der Durchgangsstelle der wirksamen Strahlen mit Flussspat verschlossenen Wasserstoffröhre. Zwischen dem ebenfalls mit Flussspat verschlossenen Collimator des Spectrographen und der Röhre konnten Messingrohre verschiedener Länge luftdicht eingeschaltet werden. Sie bildeten das Absorptionsgefäss. Die wirksamen, longitudinal aus der Capillare der Geisslerröhre austretenden Strahlen durchsetzten dieser Anordnung gemäss auf ihrem Wege zur photographischen Platte der Reihe nach eine 2 cm dicke Wasserstoffschicht von einigen Millimetern Druck, das Röhrenfenster (3 mm dicke Flussspatplatte), das Messingrohr (Absorptionsraum), das Spectrographenfenster (5 mm dicke Flussspatplatte), den evacuirten Spectrographen mit seinen beiden Linsen und Prisma (60 Grad) aus Flussspat. Die Längen der Messingrohre entsprachen den

1) V. Schumann, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien **102.** Abt. IIa p. 625—694. 1893.

2) P. Lenard, Ann. d. Phys. **1.** p. 486—507. 1900.

3) V. Schumann, l. c.

Dicken der auf Absorption zu untersuchenden Wasserstoffschichten, die zwischen 0 und 15 mm stetig und darüber bis 65 cm sprungweise verändert werden konnten. Messingrohr und Spectrograph standen mit einer Geissler'schen Quecksilberluftpumpe in Verbindung. Sie konnten unabhängig voneinander ausgepumpt und nach Erfordernis an verschiedene Wasserstoffentwickelungsapparate angeschlossen werden. Sämtliche Verbindungen der Apparate und des Spectrographen mit der Luftpumpe bestanden, wo nicht das Gegenteil bemerkt ist, aus mit Schliffen versehenen Glasröhren. Die Schliffe waren, um die Bildung von Kohlenwasserstoffen möglichst zu verhindern, nur auf dem äusseren Drittel ihrer Länge eingefettet. Das Wasserstoffgas wurde aus Zink und Schwefelsäure, beide chemisch rein, hergestellt, und nacheinander in zwei Gefässen über Phosphorsäureanhydrit getrocknet. Die Entladung der Wasserstoffröhre besorgte ein Inductorium für 25 cm Funkenlänge.

Die Durchlässigkeit der Schichten wurde ermittelt, indem das Absorptionsspectrum des bei Atmosphärendruck mit H gefüllten Messingrohres unter das des ausgepumpten Rohres bei gleicher Expositionsdauer im Spectrographen photographirt wurde. Der Unterschied beider Spectra entsprach dann der Durchlässigkeitsdifferenz des gefüllten und des evacuirten Rohres. Auf jeder Platte wurde eine Reihe solcher Spectrumpaare bei veränderter Expositionsdauer aufgenommen.

Zu Anfang der Aufnahmen waren Absorptionsrohr und Wasserstoffentwicklungsapparat mit einem dickwandigen Schlauch aus schwarzem Kautschuk von 50 cm Länge verbunden. Diese Anordnung war gewählt worden, weil sie gewisse, hier nicht in Betracht kommende Vorteile bot.

Es zeigte sich schon bei der ersten Aufnahme, dass der Wasserstoff beim Durchströmen des Kautschukschlauches seine Lichtdurchlässigkeit zum grössten Teile eingebüsst hatte. Schon bei einer Schichtendicke von 5 cm fehlte das wirksamste, bei 160 $\mu\mu$ liegende Strahlengebiet des benutzten Lichtquells auf langer Strecke, und selbst die weiter abgelenkten, allerdings minder geschwächten Strahlen erforderten immer noch mehrfache Belichtungsdauer. Erst bei 3 cm Schichtendicke gelang es die gesamte Strecke stärkster Absorption zu photographiren, während Schichten über 5 cm diese Strahlen in erhöhtem

Maasse schwächten. Die Maxima der Absorption und Emission beider Spectra liegen nebeneinander, das der Emission ist das brechbarere von beiden.

Nun wurde der Schlauch durch eine Glasröhre ersetzt. Sofort verschwand die Absorption, und die beiden Spectra des gefüllten und evacuirten Rohres zeigten nur noch kleine Unterschiede. Sonach konnte es nur der Kautschuk gewesen sein, der die Durchlässigkeit des Wasserstoffs in so hohem Maasse vermindert hatte.

An Stelle der Glasröhre wurde jetzt ein Schlauch aus Parakautschuk von ebenfalls 50 cm Länge angewandt. Sein Einfluss auf den Wasserstoff war von dem des schwarzen Schlauches grundverschieden. Sämtliche Strahlen zeigten jetzt eine beträchtliche Schwächung und von dem Absorptionsmaximum war selbst bei 65 cm dicker Schicht nichts wahrzunehmen. Im allgemeinen schädigte der Paraschlauch die Durchlässigkeit weniger als der andere. Man könnte denken, dass wenigstens in einem der beiden Fälle das Gas durch Diffusion mit Luft verunreinigt worden sein könne. Dem widerspricht aber das erlangte Absorptionsspectrum, das von dem der Luft grundverschieden ist.

Bei den nächsten Aufnahmen wurde wieder die Glasröhre benutzt und das Absorptionsrohr ausserdem durch eine lange, zur Luftpumpe gehörige Glasröhre mit einem zweiten Wasserstoffentwickelungsapparate verbunden. Es zeigte sich, dass die beiden Apparate Gas verschiedener Durchlässigkeit lieferten, und dass das Gas des letzteren das undurchlässigere war. Ich suchte die Ursache dieser Verschiedenheit in einer aus dem Luftpumpenfett herrührenden Verunreinigung der betreffenden Röhrenleitung und fand in der That diese Vermutung bestätigt, als ich die Pumpe mit ihren Nebenapparaten mit concentrirter Schwefelsäure gereinigt hatte. Hierauf lieferten die Gase beider Apparate, ebenso das evacuirte Rohr, gleichweit entwickelte Spectra. Die Aufnahmen wurden mehrfach wiederholt und bis auf kleine Abweichungen immer mit dem anfänglichen Ergebnis.

Man sollte denken, dass in allen Fällen, wo Vacuum und Füllung verschieden wirkten, dem Vacuum der grössere photographische Effect entsprechen müsste. Das ist aber nicht der

Fall. Es kam auch vor, dass der Wasserstoff etwas durchlässiger war als das evacuirte Rohr. Ich glaube diesen Widerspruch in der Hauptsache darauf zurückführen zu können, dass die in dem evacuirten Messingrohr zurückgebliebenen kleinen Mengen von Quecksilber- und Fettdampf für die brechbarsten ultravioletten Strahlen weniger durchlässig sind als Wasserstoff, und dass andererseits diese Verunreinigungen in die Wasserstofffüllung deshalb minder leicht gelangen konnten, weil das Rohr mit demselben Gase ausgewaschen und vor dem Füllen nicht bis zu der Höhe evacuirt wurde, wo sich die genannten Dämpfe lebhafter zu entwickeln pflegen.

Durch Reinigung des Absorptionsrohres mit rauchender Salpetersäure, Auskochen seiner Verschlussdeckel in Wasser, sauberste Abdichtung derselben mit möglichst wenig Fett, anhaltendes Auspumpen des Rohres zur Beseitigung der flüchtigen Fettbestandteile erlangte ich nach und nach eine bessere und am Ende eine fortgesetzte Uebereinstimmung der sich bis nahe an die vermeintliche Wellenlänge 100 $\mu\mu$ erstreckenden Vergleichsspectra.

Innerhalb der genannten Beobachtungsgrenzen ist sonach der Wasserstoff nach Maassgabe der angewandten photographischen Platte vollständig lichtdurchlässig. Wenn sich meine älteren Wahrnehmungen mit den vorstehenden Thatsachen nur teilweise decken, so kann dies seinen Grund lediglich in der inzwischen erfolgten Vervollständigung und Verbesserung meiner Beobachtungsmittel haben.

Leipzig, Ende Januar 1901.

(Eingegangen 30. Januar 1901.)

16. *Ueber die Grundhypothesen der kinetischen Gastheorie; von S. H. Burbury.*

Hr. Zemplén Győző hat in seinen letzten Bemerkungen[1]) eben denselben Einwand, freilich in etwas veränderter Form, wie in seiner vorigen Abhandlung, gegen mein Werk erhoben. Er meint nämlich, dass eine lineare Function der Geschwindigkeiten der Gasmolecüle stets denselben Wert haben muss.

In diesen Bemerkungen ist die Behauptung in der scheinbaren Form aufgestellt, „dass keine auf sämtliche Molecüle erstreckte Summe ihren Wert während der Zeit ändern darf.“

Betrachten wir meine Function

$$\xi = \sum_1^N \alpha \varphi \Big/ \sum \varphi,$$

wo $\alpha_1, \alpha_2 \ldots a_N$ die x-Geschwindigkeiten der N Molecüle bedeuten und ξ dieselbe Function ist, welche Zemplén in seiner vorigen Abhandlung und ich im fünften Capitel meines Werkes mit dem Buchstaben f definirt habe. ξ ist „eine auf sämtliche Molecüle erstreckte Summe“, und muss daher nach Zemplén, falls das Gas ein ruhendes ist, überall gleich Null sein.

Um Zemplén's Behauptung richtig zu machen, ist folgende Bedingung nötig: „ξ darf seinen Wert während der Zeit nicht ändern, *vorausgesetzt, dass für irgend welche n Glieder der Reihe* ξ $\sum_1^n \varphi \Big/ \sum_1^N \varphi$ *von derselben Grössenordnung wie* n/N *ist.* Setzt man z. B.

$$\varphi_1 = \frac{9}{10}, \quad \varphi_2 = \frac{1}{20}, \quad \varphi_n = \frac{1}{10}\,\frac{1}{2^{n-1}},$$

dann wird ξ, obwohl eine auf sämtliche Molecüle erstreckte Summe, während der Zeit seinen Wert ändern. Ich habe die Function φ (oder f) absichtlich so definirt, damit die Erfüllung der obigen Voraussetzung unmöglich sei. Davon, dass

1) Zemplén Győző, Ann. d. Phys. 3. p. 761. 1901.

ξ im allgemeinen von Null verschieden ist, kann man sich leicht durch Berechnung von $\overline{\xi^2}$ überzeugen, wie ich schon gezeigt habe.[1])

Ist die Bewegung stationär, so ist

$$\frac{d\,\overline{\xi^2}}{d\,t} = 0.$$

Wenn aber die Geschwindigkeiten der Gasmolecüle nach dem Boltzmann'schen Gesetz

$$\varepsilon^{-h\sum(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}$$

verteilt sind, muss $\overline{\xi^2}$ stets zunehmen, wie ich im fünften Capitel (l. c.) bewiesen habe. Um $\overline{\xi^2}$ constant zu machen, muss man das Verteilungsgesetz

$$\varepsilon^{-hQ}\,d\,\alpha_1\,\ldots\,d\,\gamma_n$$

gebrauchen, wo Q eine quadratische Function der Geschwindigkeiten, aber nicht bloss die Quadrate enthält.

1) S. H. Burbury, Ann. d. Phys. 3. p. 359. 1900.

(Eingegangen 24. Januar 1901.)

17. *Bemerkung zu der Abhandlung s Herrn Egon v. Schweidler: Ueber das rhalten flüssiger Dielektrica beim Durchgang eines elektrischen Stromes*[1]; *von Wa burg.*

Zu der in der Ueberschrift itirten Abhandlung erlaube ich mir die Bemerkung, dass von dem Hrn. Autor am Toluol beobachteten Erscheinungen derselben Art sind, wie von mir an anderen schwach leitenden Flüssigkeiten im hre 1895 beschriebenen[2] und l. c. auf elektrolytische Bei-engungen zurückgeführten. Von diesen Beimengungen durch elektrische Reinigung“ befreit, befolgen die Substanzen das m'sche Gesetz, wie Hr. Max Reich[3] bewiesen hat.

Berlin, im Februar 1901.

1) Egon v. Schweidler, Ann. d. Phys. 4. p. 307. 1901.
2) E. Warburg, Wied. Ann. 54. p. 396. 1895.
3) Max Reich, Inaug.-Diss., Berlin 1900.

(Eingegangen 9. Februar 1901.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1901. № 4.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 4.

1. *Anwendung der Methode der Reststrahlen zur Prüfung des Strahlungsgesetzes; von H. Rubens und F. Kurlbaum.*

[Ein Teil des hier mitgeteilten Beobachtungsmaterials ist bereits in den Berichten der Berliner Akademie[1]) veröffentlicht.[2])]

Hr. W. Wien[3]) hat auf Grund thermodynamischer und molecularkinetischer Betrachtungen eine Formel gegeben, welche die Intensität E der Strahlung eines schwarzen Körpers für alle Wellenlängen λ und alle Temperaturen T folgendermaassen darstellt:

$$E = C \frac{1}{\lambda^5} e^{-\frac{c}{\lambda T}}. \tag{1}$$

Die Herren Lummer, Pringsheim und Jahnke[4]) haben jedoch insbesondere gegen den molecularkinetischen Teil dieser Ableitung so schwerwiegende Bedenken erhoben, dass diese Formel nicht mehr als theoretisch begründet gelten kann.

Zur experimentellen Prüfung der Strahlungsgesetze sind bisher zwei Serien von Arbeiten unternommen worden, von denen die eine von den Herren O. Lummer und E. Pringsheim[5]) herrührt, die andere von Hrn. F. Paschen[6]), zum

1) H. Rubens u. F. Kurlbaum, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin **41**. p. 929—941. 1900.

2) Die Resultate, welche sich auf Flussspat beziehen, sind auf der Versammlung Deutscher Naturforscher und Aerzte am 18. September 1900 durch Hrn. Pringsheim vorgetragen.

3) W. Wien, Wied. Ann. **58**. p. 662. 1896.

4) Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. **1**. p. 31. 1899; Ann. d. Phys. **3**. p. 286. 1900; Ann. d. Phys. **4**. p. 225. 1901; O. Lummer, Rapport für den Pariser Congress 1900 über Strahlung schwarzer Körper.

5) O. Lummer u. E. Pringsheim, Verhandl. d. Deutschen Physik. Gesellsch. **1**. p. 23 u. 215. 1899; **2**. p. 163. 1900; **3**. p. 37. 1900.

6) F. Paschen, Wied. Ann. **58**. p. 455. 1896; **60**. p. 662. 1897; Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin **40**. p. 405 u. 959. 1899; l. c. F. Paschen u. H. Wanner, p. 5.

Teil allein, zum Teil in Gemeinschaft mit Hrn. H. Wanner, ausgeführt worden ist.

Die Uebereinstimmung in den Resultaten dieser Beobachter ist in dem Gebiet kleiner Wellenlängen und tiefer Temperatur befriedigend, jedoch zeigen sich mit wachsender Wellenlänge und steigender Temperatur zunehmende Differenzen. Während nämlich Hr. Paschen stets genaue Uebereinstimmung seiner Beobachtungen mit der Wien'schen Formel erhält, constatiren die Herren Lummer und Pringsheim Abweichungen von dieser Formel, welche bei genügend hohen Werten des Productes $\lambda . T$ sehr beträchtlich ausfallen.[1]) Der Gegensatz zwischen Theorie und Beobachtung tritt besonders deutlich hervor, wenn man die sogenannten isochromatischen Curven betrachtet, welche die Abhängigkeit der Strahlungsintensität von der Temperatur für eine gegebene Wellenlänge darstellen. Die Gleichung einer solchen isochromatischen Curve ist nach Wien

$$E = \text{const.}\, e^{-\frac{c}{\lambda T}}.$$

Um die Beobachtungen durch diese Gleichung angenähert wiedergeben zu können, waren die Herren Lummer und Pringsheim genötigt, der Grösse c einen mit der Wellenlänge variabeln Wert beizulegen, und zwar für

$\lambda =$	1,2 μ	2 μ	3 μ	4 μ	5 μ
$c =$	13900	14500	15000	15400	16400

Für noch grössere Wellenlängen war überhaupt eine auch nur angenäherte Darstellung der isochromatischen Curve durch die einfache Exponentialfunction ausgeschlossen. So erforderte z. B. die isochromatische Curve für $\lambda = 12,3\ \mu$ Werte von c, welche mit steigender Temperatur von 14200 auf 24000 anwachsen, diejenige für $\lambda = 17,9\ \mu$ Werte von c zwischen 17200 und 27600.

Da nun die Grösse c in dem Wien'schen Gesetz als absolute Constante auftritt, so folgt aus den Versuchen von Lummer und Pringsheim, dass diese Formel sich zur Dar-

1) Unterdessen hat Hr. Paschen gleichfalls Abweichungen von dem Wien'schen Gesetz gefunden und damit einen Teil seiner früheren Veröffentlichungen richtig gestellt. Ann. d. Phys. 4. p. 277. 1901.

stellung der Thatsachen für grössere Wellenlängen und höhere Temperaturen nicht eignet.

Auf Grund des für kleinere Wellenlängen erhaltenen Beobachtungsmaterials der Herren Lummer und Pringsheim ($\lambda < 7\,\mu$) hat nun Hr. Thiesen[1]) kürzlich eine empirische Formel aufgestellt, welche sich diesen Beobachtungen erheblich besser anschliesst als das Wien'sche Gesetz. Dieselbe lautet:

$$(2) \qquad E = C \cdot \frac{1}{\lambda^5} \cdot \sqrt{\lambda T} \cdot e^{-\frac{c}{\lambda T}}.$$

Sie unterscheidet sich also von der Wien'schen Gleichung durch den Factor $\sqrt{\lambda T}$, welcher dort fehlt.

Fernerhin hat Lord Rayleigh[2]) vor einigen Monaten das Wien'sche Strahlungsgesetz kurz discutirt und dasselbe aus dem Grunde für unwahrscheinlich erklärt, weil es für unendlich hohe Temperaturen nur endliche Werte der Strahlung für jede Wellenlänge ergiebt. Er schlägt statt des Wien'schen Gesetzes die Formel vor:

$$(3) \qquad E = C \cdot \frac{1}{\lambda^5} \cdot \lambda T \cdot e^{-\frac{c}{\lambda T}}.$$

Eine vierte allgemeine Formel, welche die bisher genannten als Specialfälle umfasst, ist von den Herren Lummer und Jahnke[3]) vor kurzer Zeit veröffentlicht worden. Sie lautet:

$$(4) \qquad E = C \cdot \lambda^{-\mu}\, T^{5-\mu} \cdot e^{-\frac{c}{(\lambda T)^{\nu}}}.$$

Die Herren Lummer und Pringsheim finden ihre sämtlichen, in dem Intervall zwischen $\lambda = 1\,\mu$ bis $\lambda = 18\,\mu$ erhaltenen Resultate mit dieser Formel in guter Uebereinstimmung, wenn man $\mu = 4$ und $\nu = 1{,}3$ wählt. Die Formel unterscheidet sich alsdann von der Rayleigh'schen nur noch durch den Exponenten ν, welcher in der Rayleigh'schen Gleichung gleich 1 ist, und man erhält:

$$(4\text{a}) \qquad E = C \cdot \frac{1}{\lambda^5} \cdot \lambda T\, e^{-\frac{c}{(\lambda T)^{1,3}}}.$$

1) M. Thiesen, Verhandl. d. Deutschen Physik. Gesellsch. **2.** p. 37. 1900.

2) Lord Rayleigh, Phil. Mag. **49.** p. 539. 1900.

3) O. Lummer u. E. Jahnke, Ann. d. Phys. **3.** p. 283. 1900.

Endlich hat Hr. M. Planck[1]), nachdem unsere Versuche im wesentlichen bereits abgeschlossen waren, eine fünfte Formel gegeben:

$$E = C \cdot \frac{\lambda^{-5}}{e^{\frac{c}{\lambda T}} - 1} . \tag{5}$$

Diese Formel nähert sich für kurze Wellen und tiefe Temperaturen der Wien'schen, für lange Wellen und hohe Temperaturen der Lord Rayleigh'schen Gleichung und umfasst beide als Grenzfälle.

Alle diese Gleichungen erfüllen das Stefan'sche Strahlungsgesetz, sowie die von Hrn. Wien abgeleiteten und von sämtlichen Beobachtern experimentell bestätigten Beziehungen[2])

$$\lambda_{\max.} T = \text{const.} \quad \text{und} \quad \frac{E_{\max.}}{T^5} = \text{const.}^{3)}$$

Für kleine Werte des Productes λT ergeben diese Formeln nur geringe Verschiedenheit in dem Verlauf von E, dagegen tritt ihr verschiedener Charakter für hohe Temperaturen und grosse Wellenlängen um so deutlicher hervor. In diesem Falle nämlich nähert sich die Exponentialgrösse

$$e^{-\frac{c}{\lambda T}} \text{ bez. } e^{-\frac{c}{(\lambda T)^{\nu}}}$$

der Einheit und man erhält für die isochromatische Curve nach Wien $E = \text{const.}$, nach Thiesen $E = \text{const.} \sqrt{T}$, nach Rayleigh, Lummer-Jahnke und Planck $E = \text{const.}\ T$. — Nun ist es freilich nicht möglich, diesen Fall experimentell vollständig zu verwirklichen, d. h. zu so grossen Wellenlängen und so hohen Temperaturen überzugehen, dass der Einfluss

1) M. Planck, Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. 2. p. 202. 1900.

2) Vgl. M. Thiesen, l. c.

3) Die Constante c hat in den Gleichungen (1), (2), (3), (4), (4a) und (5) einen verschiedenen Wert, und zwar ist zu setzen

$$\left.\begin{array}{lll} \text{in Gleichung} & (1): & c = 5\ (\lambda_m T) \\ \text{,,} \quad \text{,,} & (2): & c = 4{,}5\ (\lambda_m T) \\ \text{,,} \quad \text{,,} & (3): & c = 4\ (\lambda_m T) \\ \text{,,} \quad \text{,,} & (4): & c = \frac{\mu}{\nu} (\lambda_m T)^{\nu} \\ \text{,,} \quad \text{,,} & (4a): & c = \frac{4}{1{,}3} (\lambda_m T)^{1{,}3} \\ \text{,,} \quad \text{,,} & (5): & c = 4{,}965\ (\lambda_m T) \end{array}\right\} \lambda_m T = 2890.$$



der Exponentialgrösse vollständig verschwindet, da die exacte Temperaturmessung bei etwa 1500° C. ihre Grenze erreicht. Auch lässt sich die Wellenlänge der Strahlen, für welche man derartige Beobachtungen noch mit hinreichender Genauigkeit ausführen kann, nicht beliebig steigern. Immerhin ist es möglich, durch Anwendung der Methode der Reststrahlen[1]) in Bezug auf die Wellenlänge der zu untersuchenden Strahlung noch erheblich weiter zu kommen als mit Hülfe spectraler Zerlegung. Man ist hierdurch in der Lage, über die Brauchbarkeit der Formeln (1), (2), (3), (4a) und (5) auch in dem Gebiet grosser Wellenlängen ein Urteil zu gewinnen. Auch Lord Rayleigh hat darauf hingewiesen, dass sich die Reststrahlen ihrer grossen Wellenlänge wegen ganz besonders zur Prüfung der verschiedenen Strahlungsformeln eignen.[2])

Derartige Messungen sind auch vor einiger Zeit auf Veranlassung des einen von uns durch Hrn. Beckmann[3]) ausgeführt worden. Hr. Beckmann liess die von einem schwarzen Körper ausgehenden Strahlen an 4 Fluoritflächen reflectiren und maass die Intensität der hierdurch erhaltenen Reststrahlen bei verschiedenen Temperaturen des strahlenden schwarzen Körpers. Der Flussspat besitzt, wie unlängst gezeigt wurde[4]), im ultraroten Spectralgebiet einen ziemlich scharf begrenzten Bereich metallischer Reflexion, welcher zwei Maxima aufweist, von welchen das eine bei $\lambda = 24\,\mu$, das andere bei $\lambda = 31,6\,\mu$ liegt. Nach viermaliger Reflexion an Fluoritflächen sind erfahrungsgemäss nur noch solche Strahlen des schwarzen Körpers in messbarem Betrag vorhanden, welche dem Spectralgebiet metallischer Reflexion angehören. Dieselben bilden einen Strahlencomplex, welcher bei $\lambda = 24,0\,\mu$ und $\lambda = 31,6\,\mu$ Maxima der Intensität besitzt. Um einen Vergleich der Beobachtungen mit den oben genannten Formeln zu ermöglichen, genügt es anzunehmen, dass die gesamten Reststrahlen des Flussspats aus zwei völlig homogenen Strahlenarten beständen, von denen

1) Vgl. H. Rubens u. E. F. Nichols, Wied. Ann. **60.** p. 418. 1897; H. Rubens u. E. Aschkinass, Wied. Ann. **65.** p. 241. 1898; H. Rubens, Wied. Ann. **69.** p. 576. 1899.

2) l. c. p. 540.

3) H. Beckmann, Inaug.-Diss. Tübingen 1898.

4) H. Rubens, l. c. p. 579.

die eine die Wellenlänge 24,0 μ, die andere 31,6 μ hat. Ferner ist es nötig zu berücksichtigen, dass das Reflexionsvermögen einer jeden Fluoritfläche bei $\lambda = 31{,}6\,\mu$ nahezu 1,2 mal so gross ist wie bei $\lambda = 24{,}0\,\mu$, wodurch die relative Stärke des zweiten Streifens gegenüber dem ersten im Verhältnis $1{,}2^4 = 2{,}0$ erhöht wird.

Auf Grund seines Beobachtungsmaterials gelangte Hr. Beckmann unabhängig von den Untersuchungen der Herren Lummer und Pringsheim gleichfalls zu dem Schluss, dass das Wien'sche Gesetz nicht im stande ist, die Beobachtungen richtig wiederzugeben, wenn man der Constanten c den Wert 14500 beilegt, welchen sie für kurze Wellen besitzt. Um Uebereinstimmung zwischen beobachteten und berechneten Werten zu erzielen, war es erforderlich, $c = 26\,000$ anzunehmen.[1] Einen Vergleich mit den übrigen, in der Einleitung zusammengestellten Formeln konnte Hr. Beckmann nicht geben, da diese Formeln erst später veröffentlicht wurden. Zur Prüfung dieser Gesetze sind aber die Beckmann'schen Beobachtungen auch nicht sehr geeignet, da sie sich auf ein zu kleines Temperaturintervall erstrecken. Die Messungen beginnen bei der Temperatur der festen Kohlensäure und endigen bei etwa 600° C. Die charakteristischen Eigentümlichkeiten der verschiedenen Strahlungsgesetze treten aber, wie bereits oben betont wurde, gerade ausserhalb dieses Temperaturbereiches, insbesondere bei höheren Temperaturen, am deutlichsten hervor.

Wir haben es deshalb unternommen, die Intensität der von einem schwarzen Körper ausgesandten Reststrahlen für einen möglichst grossen Temperaturbereich nochmals zu messen. Diese Untersuchung haben wir nicht nur für die Reststrahlen des Flussspats, sondern auch für die Reststrahlen des Steinsalzes, deren mittlere Wellenlänge 51,2 μ beträgt, ausgeführt. Wir gelangten auf diesem Wege zu Werten des Productes $\lambda . T$, welche die durch spectrale Zerlegung bisher erreichten um das Dreifache übertreffen. Ferner haben wir, um den Anschluss an das bisher vorliegende Beobachtungsmaterial der Herren Lummer und Pringsheim zu gewinnen, auch im Be-

1) H. Rubens, l. c. p. 585. Die Thatsache, dass Hr. Beckmann seine Beobachtungen durch eine Wien'sche Isochromate darstellen konnte, erklärt sich aus der Beschränkung seines Temperaturbereiches.

reich kürzerer Wellen einige Versuche angestellt, indem wir die Intensität der Reststrahlen von Quarz und Marmor in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur bestimmten. Leider fallen die Reststrahlen des Marmors[1]) mit einer Absorptionsbande des Wasserdampfes zusammen, dies machte sich während der Beobachtungen durch Abnahme der Galvanometerausschläge deutlich bemerkbar, sodass von einer Veröffentlichung der Resultate vorläufig Abstand genommen wird. Die von uns benutzte Versuchsanordnung ist in untenstehender Figur schematisch dargestellt.

D_1 bedeutet ein mit Wasser von Zimmertemperatur (20 ° C.) gespültes doppelwandiges Diaphragma von kreisförmiger Ge-

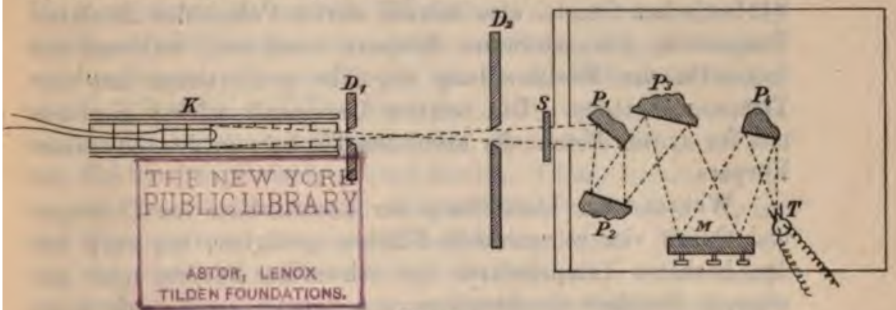


Fig. 1.

stalt und 1 cm Durchmesser. Dasselbe war auf dem Experimentirtisch fest montirt und bezeichnet den eigentlichen Ort der Strahlungsquelle. Vor diesem Diaphragma wurde der schwarze Körper K derart aufgestellt, dass seine Mündung mit der Oeffnung des Diaphragmas coincidirte und seine Mittelaxe senkrecht auf der Ebene des letzteren stand, was durch optische und mechanische Vorrichtungen controlirt werden konnte. Die durch D_1 hindurchgehenden Strahlen durchsetzen ein zweites Diaphragma D_2, welches den Strahlenkegel derart begrenzt, dass nur die von dem innersten Teil des schwarzen Körpers ausgehenden Strahlen hindurchgelassen werden. Im weiteren Verlauf des Strahlenganges befindet sich ein doppelwandiger Klappschirm S, welcher ebenso wie das Diaphragma D_2 aus derselben Wasserleitung gespült wird wie D_1, ferner die reflectirenden Krystallflächen P, ein vorderseitig versilberter Con-

1) E. Aschkinass, Ann. d. Phys. 1. p. 42. 1900.

centrationsspiegel *M* und die Thermosäule *T.*[1]) Die letztgenannten Apparate sind im Inneren einer gegen fremde Strahlung und Luftbewegung schützenden Hülle angebracht. Die Thermosäule stand in Verbindung mit einem Panzergalvanometer[2]), dessen Empfindlichkeit mit Hülfe einer einfachen Vorrichtung jederzeit controlirt werden konnte. Die Aenderung der Empfindlichkeit wurde bei der Berechnung der Resultate stets berücksichtigt.

Da die Verunreinigung der Reststrahlen aus solchen Wärmestrahlen besteht, welche ihrer Zusammensetzung nach der Gesamtstrahlung des schwarzen Körpers nahezu vollkommen entsprechen, muss die Verunreinigung angenähert nach dem Stefan'schen Gesetz, also mit der vierten Potenz der absoluten Temperatur des schwarzen Körpers zunehmen, während die Intensität der Reststrahlung ungefähr proportional mit der Temperatur steigt. Die relative Unreinheit wächst hiernach mit der dritten Potenz der absoluten Temperatur des schwarzen Körpers.

Während zur Darstellung der Reststrahlen von Flussspat und Quarz vier reflectirende Flächen genügten, um auch bei den höchsten Temperaturen des schwarzen Körpers noch genügende Reinheit der Strahlen zu erzielen[3]), erwies sich diese Flächenzahl zur Isolirung der im Verhältnis zur Gesamtstrahlung des schwarzen Körpers äusserst schwachen Reststrahlen des Steinsalzes als unzureichend. Bei Anwendung von fünf Flächen erhielten wir genügende Reinheit der Reststrahlen bis zu Temperaturen des schwarzen Körpers von 600° C., bei welchen eine Verunreinigung der Reststrahlen durch Wärmestrahlen gewöhnlicher Art im Betrage von 10 Proc. constatirt werden konnte. Durch Einschaltung einer sechsten Steinsalzfläche wurde die Verunreinigung auf etwa $^1/_{20}$ herabgedrückt. Dennoch trat sie bei den Temperaturen über 1000° C. wiederum deutlich hervor und betrug bei der höchsten erreichbaren Temperatur von

1) H. Rubens, Zeitschr. f. Instrumentenk. 18. p. 65. 1898.

2) H. du Bois u. H. Rubens, Ann. d. Phys. 2. p. 84. 1900.

3) Wir beobachteten bei den höchsten hier in Betracht kommenden Temperaturen von 1472° C. eine Verunreinigung der Reststrahlen im Betrag von $2^1/_2$ Proc. der zu messenden Grösse. Die Correction wurde in der weiter unten beschriebenen Weise gemessen und berücksichtigt.

1474° C. wieder fast 8 Proc. der zu messenden Grösse. Wir haben jedoch von einer weiteren Vermehrung der reflectirenden Flächen Abstand genommen und statt dessen lieber die Grösse der wegen der Unreinheit der Strahlen erforderlichen Correction genau ermittelt und von den beobachteten Ausschlägen in Abzug gebracht. Es geschah dies mit Hülfe einer Steinsalzplatte, welche die Reststrahlen vollkommen absorbirt, aber 90 Proc. der Verunreinigung hindurchlässt.

Bei den Versuchen mit Flussspat und Quarz gelangten vier verschiedene schwarze Körper zur Anwendung, welche sämtlich schon zu anderen an der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt ausgeführten Untersuchungen gedient hatten.[1] Bei dem ersten (I) war die Einrichtung so getroffen, dass der strahlende Hohlkörper von aussen von flüssiger Luft umspült werden konnte. Der zweite (II) war für die Füllung mit einem Gemisch von fester Kohlensäure und Aether eingerichtet. Der dritte (III) konnte mit Wasserdampf, der vierte (IV) mit Hülfe des elektrischen Stromes geheizt werden. Dieser letztere wurde in dem Temperaturintervall zwischen 300° und 1500° C. bei den Flussspatversuchen ausschliesslich angewandt. Um jedoch die viel schwächeren Reststrahlen des Steinsalzes insbesondere bei tieferen Temperaturen mit genügender Genauigkeit messen zu können, wurden in unserer Versuchsanordnung (Fig. 1) nach Entfernung des Diaphragmas D_1 die drei erstgenannten schwarzen Körper unmittelbar vor das Diaphragma D_2 gesetzt. Es war dies statthaft, da diese drei schwarzen Körper Oeffnungen besitzen, welche diejenige von D_2 erheblich übertreffen. Die Oeffnung des elektrisch geheizten schwarzen Körpers (IV) betrug jedoch nur 12 mm, sodass wir gezwungen waren, diesen letzteren nur in der in der Figur wiedergegebenen Weise in Verbindung mit dem Diaphragma D_1 zu benutzen. Wir haben aus diesem Grunde für den vorliegenden Zweck zwei weitere elektrisch heizbare schwarze Körper construirt, bei welchen, wie bei den Körpern I, II und III, genügend grosse Oeffnungen (30 mm Durchmesser) und ausreichende Divergenzwinkel für die austretenden Strahlen vorhanden waren, um die Verwendung

1) O. Lummer u. F. Kurlbaum, Verhandl. d. Physik. Gesellsch. zu Berlin 17. p. 106. 1898; Thätigkeitsbericht der Physik.-Techn. Reichsanstalt p. 38. 1899; Zeitschr. f. Instrumentenk. 19. p. 213. 1899.

dieser Körper unmittelbar vor dem Diaphragma D_2 zu ermöglichen. Der eine von diesen (V) war ein Cylinder aus sogenannter Marquardt'scher Masse, von 10 cm Länge und 7 cm innerem Durchmesser, die Wandungen, Boden und Deckel waren so mit Platinband bewickelt, dass der Flächeneinheit beim elektrischen Heizen überall gleichviel Wärme zugeführt wurde. Die Strahlung trat aus einer im Deckel befindlichen Oeffnung von 3 cm Durchmesser heraus, im Inneren des Cylinders befanden sich vier nach dem Boden zu grösser werdende Diaphragmen, zur Thermosäule konnte nur Strahlung vom Boden des Cylinders aus gelangen. Der andere Körper (VI) hatte dieselben Dimensionen, war aber aus Eisen gefertigt, mit Eisenoxyd geschwärzt und wurde mit Hülfe einer Nickelspirale geheizt.

Die höchste Temperatur, auf welche wir diesen Körper erhitzen konnten, betrug 600° C. Wir haben denselben deshalb nur in dem Temperaturintervall von 300—600° C. benutzt. Von 500° C. an konnte, wie bereits oben bemerkt, auch der schwarze Körper IV in Verbindung mit dem engen Diaphragma D_1 wieder verwandt werden; die hiermit erzielten Ausschläge waren jedoch 7,5 mal kleiner als bei Benutzung der Körper V und VI vor dem Diaphragma D_2. Die mit Hülfe des Körpers IV erhaltenen Ausschläge mussten deshalb, um mit den übrigen Beobachtungen vergleichbar zu sein, zuvor mit dem genannten Zahlenfactor multiplicirt werden. Dieser letztere wurde dadurch bestimmt, dass die Gleichheit der Ausschläge bei einer in der Nähe von 1000° gelegenen Temperatur für die schwarzen Körper IV und V erzwungen wurde. Wegen der kleineren Ausschläge sind die mit Hülfe des Körpers IV angestellten Beobachtungen viel ungenauer als die übrigen. Immerhin sind sie als Controlmessungen nicht ohne Wert. In Fig. 3 sind die Curvenpunkte, welche mit den verschiedenen Körpern beobachtet wurden, in besonderer Weise gekennzeichnet. Die Temperaturmessung wurde bei den elektrisch geheizten Körpern, wie üblich, mit Hülfe eines Le Chatelier'schen Thermoelementes E unter Benutzung der neuesten Bestimmungen von den Herren Holborn und Day[1]) ausgeführt.

In Figg. 2—4 sind die Resultate unserer Beobachtungen

---

1) L. Holborn u. A. Day, Wied. Ann. 68. p. 817. 1899.

für die Reststrahlen von Flussspat, Steinsa
phisch dargestellt, d. h. es sind die beoba
als Function der Temperatur der strahlenden
eingetragen. Durch verschiedene Bezeichn
Punkte sind in Fig. 2 vier vollkommen
hängige, an verschiedenen Tagen und zum T
Justirung der Flussspatflächen angestellte V

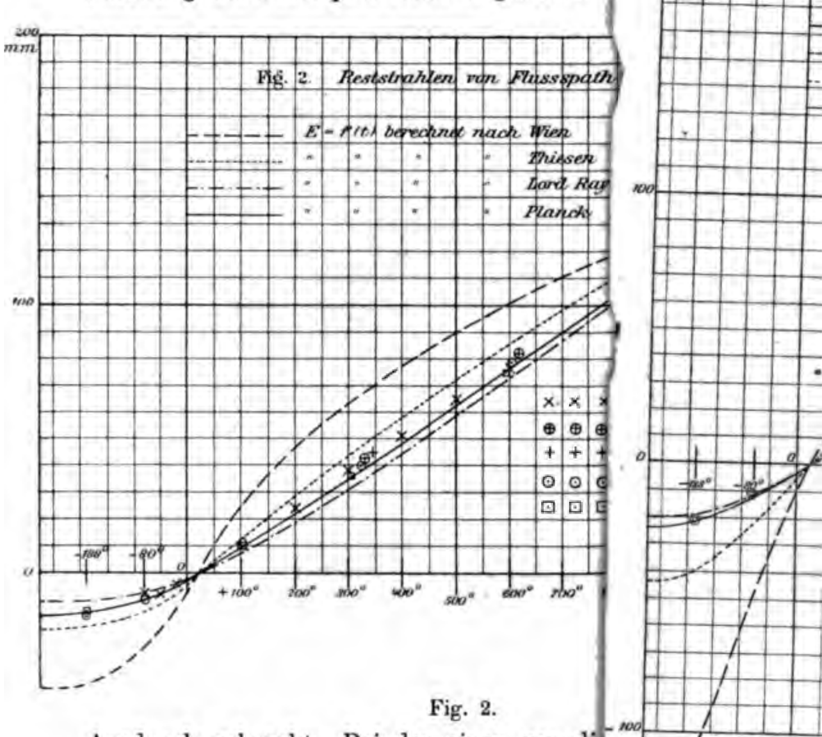


Fig. 2.

Ausdruck gebracht. Bei der einen von di
Beobachtungen durch Punkte mit umschri
kennzeichnet sind, war eine 2 mm dicke S
bar vor der Thermosäule in den Strahlen
Dieselbe absorbirt den langwelligen Teil der
vollkommen, während sie noch angenähert
welligen Teiles, welcher das Maximum be
hindurchlässt.[1])

1) H. Rubens u. A. Trowbridge, Wied.
H. Rubens u. E. Aschkinass, Wied. Ann. 65

Hierdurch wird also der Einfluss des zweiten Absorptionsstreifens vollkommen eliminirt. Dennoch ergiebt diese Versuchsreihe keinen merklich anderen Verlauf der Strahlungsintensität mit der Temperatur als die anderen Versuchsreihen,

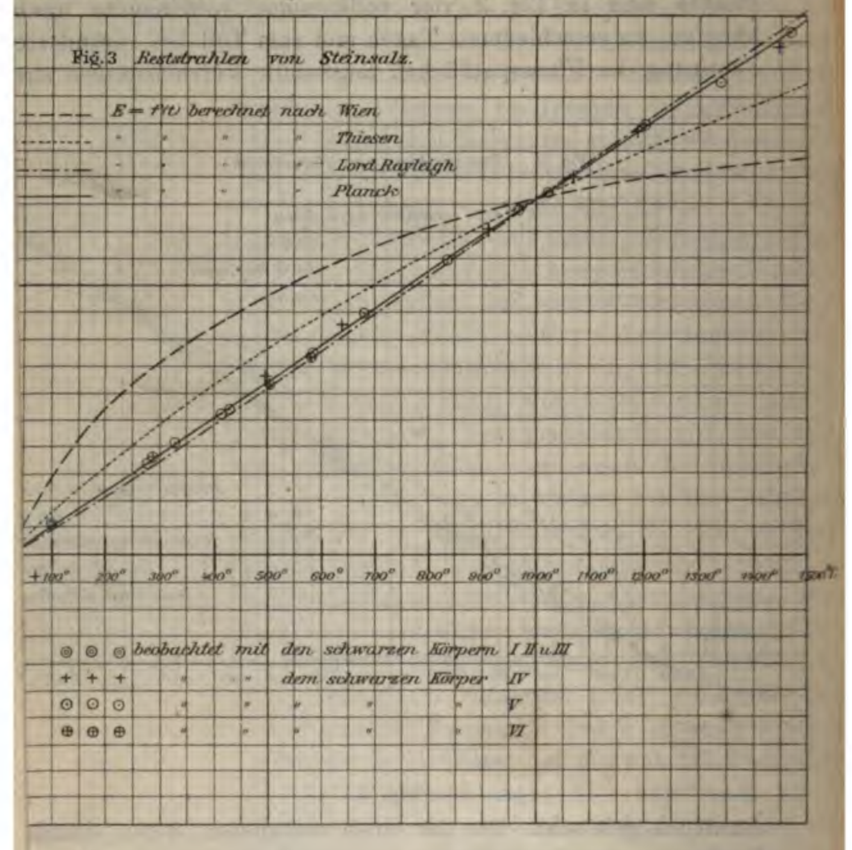


Fig. 3.

elche ohne Einschalten der Sylvinplatte beobachtet wurden. ie fällt vielmehr vollkommen mit den übrigen Versuchsreihen ısammen, wenn man, wie dies in Fig. 2 geschehen ist, alle rdinaten mit dem constanten Factor 2,80 multiplicirt.[1])

1) Der Maassstab sämtlicher Curven ist auch innerhalb jeder einzelnen gur so gewählt, dass dieselben bei 1000° übereinstimmen und zwar mit

Bei der Berechnung der Curven in Fig
zweite bei $\lambda = 31{,}6\ \mu$ gelegene Streifen mit berü
doch wird die Form der Curven kaum merkli
man sich bei der Ausrechnung lediglich auf di
einzigen, bei $\lambda = 24\ \mu$ liegenden Streifens be

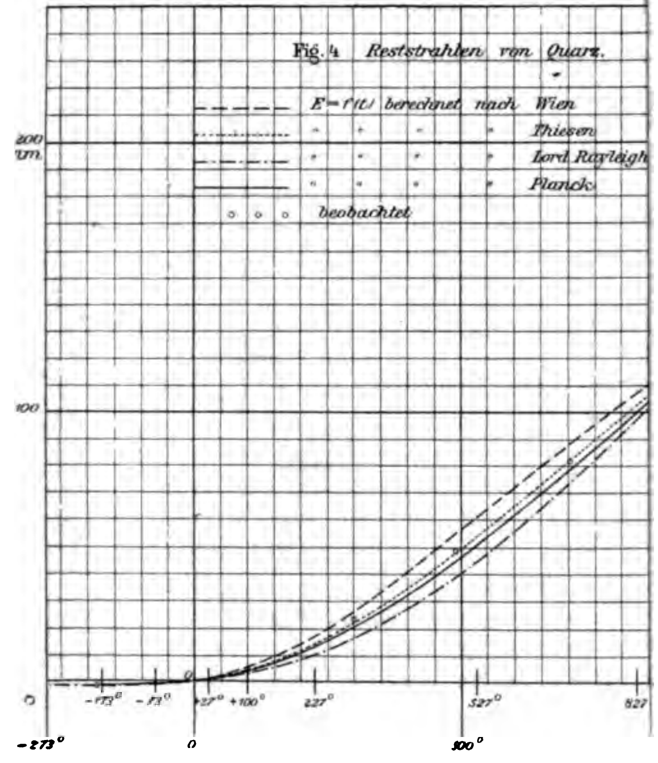


Fig. 4.

Abweichungen würden bei dem in Fig. 2 g
stab für Temperaturen über 0° überhaupt ka
sein, da dieselben durchweg unter 1 mm liege
tiefe Temperaturen erreichen sie eine beträchtlic

Rücksicht darauf, dass die Abweichungen zwischen Theo
ment möglichst *klein* erscheinen. Würden sämtliche C
höchsten Temperatur ($t = 1500°$ C.) zur Coincidenz gebr
die Abweichungen bedeutend grösser.

könnten in der Zeichnung sichtbar gemacht werden, was jedoch, um dieselbe nicht noch mehr zu compliciren, unterblieben ist.

Dasselbe gilt für die beiden bei $\lambda = 8{,}50$ und $9{,}05\,\mu$ gelegenen Maxima in der Reststrahlung des Quarzes. Auch hier genügt es vollständig, die Rechnung für eine einzige im Schwerpunkt des Streifens bei $\lambda = 8{,}85\,\mu$ gelegene Wellenlänge durchzuführen.

Für die Reststrahlen des Flussspats zeigt im Bereich der tiefen Temperaturen (-188^0 bis 0^0) eine durch die beobachteten Punkte gelegte Curve eine nach oben concave Krümmung. Im weiteren Verlauf aber verliert sich diese Krümmung nahezu vollständig, und die Curve wird geradlinig; in anderen Worten: zwischen 0^0 und 1500^0 wächst die Reststrahlung innerhalb der Fehlergrenze proportional mit der Temperaturdifferenz zwischen dem strahlenden und dem bestrahlten Körper.

Dasselbe gilt auch für die Reststrahlen des Steinsalzes, wie dies aus Fig. 3 zu ersehen ist. Auch hier beginnt die Curve mit schwacher, nach oben concaver Krümmung und wird im weiteren Verlauf vollkommen geradlinig.

Die Reststrahlen des Quarzes (vgl. Fig. 4) gehören nach den Versuchen von Rubens und Nichols zwei eng begrenzten Spectralgebieten an, von denen das eine zwei Maxima bei 8,50 und 9,02 μ aufweist, während das andere aus einem schmalen, bei 21,5 μ gelegenen Streifen besteht. Letzterer wurde bei unseren Versuchen durch Einschaltung einer 1 cm dicken Steinsalzplatte vollständig ausgelöscht.

Um die Figg. 2—4 besser miteinander vergleichen zu können, haben wir für die Temperatur 1000^0 C. die Ordinaten stets gleich gross gewählt.[1]) Wie man sieht, unterscheiden sich dieselben in den Figg. 2 und 4 auch für die übrigen Temperaturen nur sehr wenig.

Um einen Vergleich unserer Versuchsergebnisse mit den Resultaten von Hrn. Beckmann zu ermöglichen, haben wir einige seiner Beobachtungen auf den von uns in Fig. 2 gewählten Maassstab umgerechnet und gleichfalls daselbst ein-

1) Die numerische Grösse der Ordinaten in den Figg. 2—4 ist so gewählt, dass dieselbe angenähert die Ausschläge in Millimetern angiebt, welche bei den Versuchen mit Reststrahlen des Steinsalzes für die Temperatur 1000^0 C. erhalten wurden.

getragen. Dieselben sind durch ein Sternchen × gekennzeichnet. Sie sind, wie man erkennt, mit unseren eigenen Beobachtungen in sehr befriedigender Uebereinstimmung. Diese Thatsache ist für die Beurteilung unserer Versuche auch aus dem Grunde von Wichtigkeit, weil Hrn. Beckmann's Beobachtungen sämtlich mit Hülfe desselben „schwarzen Körpers", die unserigen dagegen in dem in Frage kommenden Temperaturintervall (-80° bis 600°) mit drei verschiedenen „schwarzen Körpern" angestellt wurden. Es wird hierdurch bewiesen, dass die von uns benutzten „schwarzen Körper" auch im Gebiet dieser langen Wellen in Bezug auf die Annäherung an den absolut schwarzen Körper Kirchhoff's angenähert das Gleiche leisten. Dasselbe ergiebt sich auch aus den in Fig. 3 dargestellten Versuchen mit Reststrahlen des Steinsalzes. Auch hier liefern die „schwarzen Körper" IV, V und VI in den Temperaturbereichen, in welchen zwei derselben gleichzeitig angewandt werden konnten ($275-600^{\circ}$ bez. $500-1500^{\circ}$ C.), innerhalb der Fehlergrenzen die gleichen Ausschläge.

Die Figg. 2—4 enthalten ausser den beobachteten Punkten noch je 4 Curven, welche die Abhängigkeit der Reststrahlung von der Temperatur nach den Formeln von Wien, Thiesen, Rayleigh und Planck darstellen, und welche sich in den Tafeln noch trennen lassen. Im Interesse der Uebersichtlichkeit schien es uns nicht angebracht, eine noch grössere Anzahl von Curven in den Figg. 2—4 einzuzeichnen. Wir haben deshalb auf die graphische Darstellung der Lummer-Jahnke-'schen Gleichung (4a) verzichtet und den Vergleich unserer Versuchsergebnisse mit dieser Formel nur in den unten folgenden Tab. I—III gegeben, worin auch die aus den Formeln (1), (2), (3) und (5) berechneten Werte nochmals mit angeführt sind.

Infolge der kleineren Wellenlängen zeigt die in Fig. 4 dargestellte Versuchsreihe einen wesentlich anderen Charakter als die in Figg. 2 und 3 wiedergegebenen. Die nach oben concave Krümmung ist hier auch noch bei den höchsten Temperaturen erkennbar. Ferner ist die relative Kleinheit der Ausschläge bei tiefen Temperaturen für die kürzeren Wellenlängen sehr charakteristisch.

Ein Blick auf die Curven der Figg. 2—4 oder eine genauere Betrachtung der Tab. I—III lehrt, dass die Formeln

von Wien und Rayleigh überhaupt nicht, die von Thiesen nur für längere Wellen nicht im stande sind, unsere Beobachtungen innerhalb der Grenze der Versuchsfehler wiederzugeben.

Tabelle I.

Reststrahlen von Flussspat. $\lambda = 24{,}0\ \mu$ und $31{,}6\ \mu$.

Temperatur in Celsius-Graden t	Absolute Temperatur T	E beob.	E nach Wien	E nach Thiesen	E nach Rayleigh	E nach Lummer u. Jahnke	E nach Planck
− 273	0	—	− 42,4	− 20,7	− 10,7	− 17,8	− 15,4
− 188	85	− 15,5	− 41,0	− 20,2	− 10,5	− 17,5	− 15,0
− 80	193	− 9,4	− 26,8	− 14,0	− 7,4	− 11,5	− 9,3
+ 20	293	0	0	0	0	0	0
+ 250	523	+ 30,3	+ 50,6	+ 35,7	+ 25,3	+ 30,0	+ 28,8
+ 500	773	+ 64,3	+ 88,9	+ 71,8	+ 58,3	+ 64,5	+ 62,5
+ 750	1023	+ 98,3	+114,5	+104	+ 94,4	+ 98	+ 96,7
+1000	1273	+132	+132	+132	+132	+132	+132
+1250	1523	+167	+145	+157,5	+174,5	+167	+167,5
+1500	1773	+201,5	+155	+181	+209	+201	+202
+ ∞	∞	—	+226	+ ∞	+ ∞	+ ∞	+ ∞

Tabelle II.

Reststrahlen von Steinsalz. $\lambda = 51{,}2\ \mu$.

Temperatur in Celsius-Graden t	Absolute Temperatur T	E beob.	E nach Wien	E nach Thiesen	E nach Rayleigh	E nach Lummer u. Jahnke	E nach Planck
− 273	0	—	−121,5	− 44	− 20	− 27	− 23,8
− 188	85	− 20,6	−107,5	− 40	− 19	− 24,5	− 21,9
− 80	193	− 11,8	− 48,0	− 21,5	− 11,5	− 13,5	− 12,0
+ 20	293	0	0	0	0	0	0
+ 250	523	+ 31,0	+ 63,5	+ 40,5	+ 28,5	+ 31	+ 30,4
+ 500	773	+ 64,5	+ 96	+ 77	+ 62,5	+ 65,5	+ 63,8
+ 750	1023	+ 98,1	+118	+106	+ 97	+ 99	+ 97,2
+1000	1273	+132	+132	+132	+132	+132	+132
+1250	1523	+164,5	+141	+154	+167	+165,5	+166
+1500	1773	+196,8	+147,5	+175	+202	+198	+200
+ ∞	∞	—	+194	+ ∞	+ ∞	+ ∞	+ ∞

Tabelle III.
Reststrahlen von Quarz. $\lambda = 8{,}85\ \mu$.

Temperatur in Celsius-Graden t	Absolute Temperatur T	E beob.	E nach Wien	E nach Thiesen	E nach Rayleigh	E nach Lummer u. Jahnke	E nach Planck
− 273	0	—	− 1,96	− 1,40	− 1,00	− 1,53	− 1,41
− 173	100	− 1,6	− 1,96	− 1,40	− 1,00	− 1,53	− 1,41
− 73	200	− 1,5	− 1,82	− 1,30	− 0,92	− 1,42	− 1,31
+ 27	300	—	+ 0,10	+ 0,12	+ 0,10	+ 0,18	+ 0,1
+ 100	373	+ 3,4	+ 4,07	+ 3,06	+ 2,21	+ 3,5	+ 3,0
+ 227	500	+13,5	+16,5	+12,61	+ 9,60	+13,5	+12,4
+ 527	800	+53,5	+60,5	+53,4	+44,3	+53,2	+50,3
+ 827	1100	+102	+107,0	+102,3	+96,7	+102	+99,8
+1000	1273	+132	+132	+132	+132	+132	+132
+1127	1400	+154	+147,7	+154,6	+160	+154	+154,6
+1427	1700	+212,5	+182,3	+206,5	+229	+210	+213,5

Am stärksten treten die Unterschiede zwischen unseren Beobachtungen und den nach der Wien'schen Formel berechneten Werten für die Reststrahlen des Steinsalzes hervor. Bei der Temperatur der flüssigen Luft beträgt der beobachtete Ausschlag nur etwa ein Fünftel des berechneten. Andererseits erreicht der bei 1474° beobachtete Ausschlag von 194 mm bereits die Grenze, welche nach der Wien'schen Formel unter Annahme der hier gewählten Coincidenzpunkte für unendlich hohe Temperaturen zu erwarten ist.

Man erkennt ferner, dass die Thiesen'sche Formel, welche, wie bereits bemerkt wurde, für kürzere Wellen (8,85 μ) sich unseren Beobachtungen sehr gut anschmiegt, für sehr grosse Wellenlängen einen wesentlich anderen Verlauf darstellt, als ihn unsere Beobachtungen ergeben.

Weiterhin ist zu bemerken, dass die Lummer-Jahnke'sche Formel (4a) unsere Versuchsergebnisse fast überall sehr gut darstellt. Nur bei sehr tiefen Temperaturen und sehr grossen Wellenlängen sind Differenzen zwischen den aus der Formel (4a) berechneten Werten und unseren Beobachtungen vorhanden.

Dagegen zeigen unsere Beobachtungen, soweit sie sich auf Flussspat und Steinsalz beziehen, gegenüber der Planck'schen Formel keine wesentlichen Abweichungen, sodass es in

den Figg. 2 u. 3 fast den Anschein gewinnt, als sei die betreffende Curve einfach durch die beobachteten Punkte gelegt, was jedoch, wie oben bemerkt wurde, nur für die Temperatur 1000° geschehen ist.

Bei den Reststrahlen des Quarzes (Fig. 4) zeigen sich aber zwischen 0° und 1000° geringe Abweichungen von der Planck'schen Formel, welche systematisch zu sein scheinen. Aus Fig. 4 ist ersichtlich, dass auf dem Gebiet kürzerer Wellen zwischen den einzelnen Formeln eine Entscheidung zu treffen, wegen der geringeren Unterschiede viel schwieriger ist. Der verschiedene Charakter der einzelnen Strahlungsformeln tritt eben hier um so deutlicher hervor, je grösser die Wellenlänge der untersuchten Strahlung ist.

Jedenfalls scheint uns aus den vorliegenden Beobachtungen hervorzugehen, dass nur solche Formeln geeignet sind, die Strahlung E des schwarzen Körpers in ihrer Abhängigkeit von der Wellenlänge λ und der Temperatur T richtig wiederzugeben, bei welchen der Wert von E für sehr grosse Wellenlängen und sehr hohe Temperaturen proportional mit T wächst, wie dies in den Formeln von Lord Rayleigh, Lummer-Jahnke (für $\mu = 4$) und Planck der Fall ist. Von diesen drei Gleichungen können allerdings nur die beiden zuletzt genannten in Frage kommen, da die Rayleigh'sche Formel, wie die Herren Lummer und Pringsheim gezeigt haben, in dem Gebiet kurzer Wellenlängen versagt. Auch zeigt sie gegenüber unseren Beobachtungen erhebliche systematische Abweichungen. Zur Wiedergabe unserer Beobachtungen sind die Gleichungen (4a) und (5) beide wohl geeignet, doch verdient die Planck'sche ihrer grösseren Einfachheit wegen den Vorzug.[1]) Da sie für kurze Wellen in die Wien'sche Formel übergeht, so gilt sie auch für das Gebiet der sichtbaren Strahlen, für welche das Wien'sche Gesetz experimentell erwiesen ist.[2])

1) Inzwischen ist es Hrn. Planck gelungen, seine Formel unter Zugrundelegung der elektromagnetischen Strahlungslehre und durch Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung theoretisch herzuleiten. Vgl. M. Planck, Verhandl. d. Deutschen Physik. Gesellsch. **2.** p. 237—245. 1900; Ann. d. Phys. **4.** p. 553. 1901.

2) Vgl. F. Paschen u. H. Wanner, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin p. 5. 1899; H. Wanner, Ann. d. Phys. **2.** p. 141. 1900; O. Lummer u. E. Pringsheim, vorgetragen in der Deutschen Physik. Gesellsch., Sitzung vom 1. März 1901.

(Eingegangen 10. Februar 1901.)

2. *Elektrodynamische Elementargesetze;* *von E. Wiechert.*

(Aus den Archives Néerlandaises, livre jubilaire, dédié à H. A. Lorentz, p. 549. 1900.)

I. Grundlagen der Theorie.

1. *Vorwort.* Die neuere, sich auf Maxwell stützende Elektrodynamik ist durch Unterscheidung zwischen Aether und Materie im Innern der sinnlich wahrnehmbaren Körper in so weitem Maasse zu den Ansichten der älteren Schule zurückgekehrt, dass der einstige Gegensatz nicht mehr besteht. Die „*elektrischen Teilchen*“ der alten Theorien sind wiederum zu Recht gelangt; wir haben aber gelernt, die Vermittelung ihrer Wechselwirkungen durch das Zwischenmedium zu verfolgen. So ist das grosse Problem gelöst, welches vor Maxwell zwar vielfach formulirt wurde, aber allen Bemühungen widerstand; und Maxwell's Beitrag erscheint nicht mehr als ein Umsturz des Bestehenden, sondern als ein Fortschritt im natürlichen Gange der Entwickelung.

H. A. Lorentz war der erste, der den Unterschied zwischen Aether und Materie in der Maxwell'schen Theorie mit Erfolg verwertete, und er machte dabei von vornherein auf die Annäherung an die älteren Theorien aufmerksam, welche sich dann einstellt. In der Ueberzeugung, dass hierauf im Interesse unserer Wissenschaft nicht genug Gewicht gelegt werden kann, will ich versuchen, hier einen weiteren Baustein für den Zusammenschluss der alten und neuen Theorien erbringen.

In den Bezeichnungen schliesse ich mich an meinen Beitrag zur Festschrift für die Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals zu Göttingen, 1899[1]); auf diesen verweise ich auch für nähere Ausführungen.

2. Die Namen „*Aether*“ und „*Materie*“ gebrauche ich in ganz ähnlichem Sinne wie H. A. Lorentz. Da ich überdies

---

1) Bei B. G. Teubner, Leipzig.

schon mehrfach Gelegenheit genommen habe, mich über diesen Punkt auszusprechen, so werden hier wenige Worte genügen.

Das optische Verhalten strömender Flüssigkeiten und ähnliche Erscheinungen zeigen, dass die sinnlich wahrnehmbare Materie bei ihren Bewegungen selbst im Innern die Lichtwellen nicht mit sich fortträgt; auch die Aberration des Lichtes führt, wie H. A. Lorentz gezeigt hat, zu demselben Schlusse. Indem wir das Licht nach Maxwell als einen elektrodynamischen Vorgang auffassen, sind wir gezwungen, im Innern der Materie noch einen Träger der elektrodynamischen Erscheinungen anzunehmen, der sich an den sinnlich wahrnehmbaren Bewegungen nicht beteiligt. *Um diese Thatsache bequem in Worte zu kleiden, unterscheiden wir zwischen Aether und Materie.* Speculationen über ihr gegenseitiges Verhältnis sind für die unmittelbaren Zwecke der Elektrodynamik nicht notwendig; so können wir es zum Beispiel dahingestellt sein lassen, ob es sich um verschiedene Stoffe, oder um denselben Stoff in verschiedenen Zuständen handelt. Materie und Aether sind uns nur Bilder, die wir von unserem menschlichen Standpunkt in der Natur sehen; dem weiteren Fortschritt der Wissenschaft bleibt überlassen, zu entscheiden, was ihnen in Wirklichkeit entspricht.

Während die Materie uns in mannigfachsten Variationen der Art, der Anhäufung und der Bewegung entgegentritt, genügt für die Darstellung unserer Erfahrungen die Annahme, dass der Aether die ganze uns zugängliche Welt ohne merkliche Lücken und ohne merkliche Bewegungen überall mit denselben äusserst einfachen Eigenschaften erfüllt. Dieses gilt auch von dem Bereiche, den die Materie beansprucht, sodass sie ganz von dem Aether durchtränkt erscheint, ohne ihn merklich zu verdrängen.

Zur Kennzeichnung der elektrodynamischen Eigenschaften des Aethers genügt eine einzige Constante, die Lichtgeschwindigkeit V bei Abwesenheit der Materie. Zur Beschreibung der elektrodynamischen Vorgänge müssen gerichtete Grössen, Vectoren, verwendet werden.

3. Wir wollen von der *Optik im freien Aether* ausgehen. Für sie können Vectoren sehr verschiedener physikalischer Be-

deutung in Betracht gezogen werden. Ist K ein solcher Vector, dann darf als Schwingungsgleichung für eine Componente K_ν parallel der beliebigen Richtung ν angenommen werden:

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 K_\nu}{\partial t^2} = V^2 \left(\frac{\partial^2 K_\nu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 K_\nu}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 K_\nu}{\partial z^2} \right).$$

Dabei gilt die folgende Bedingung als Ausdruck der Transversalität der Schwingungen und der Annahme, dass auch der Fall der Erregungslosigkeit möglich ist:

$$(2) \qquad \frac{\partial K_x}{\partial x} + \frac{\partial K_y}{\partial y} + \frac{\partial K_z}{\partial z} = 0.$$

Zu jedem herausgegriffenen Vector K lässt sich ein gewisser zweiter H zuordnen, der mit ihm in reciproker Beziehung steht. Wir erhalten H durch die Definitionsgleichungen

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial H_x}{\partial t} = V\left(\dfrac{\partial K_z}{\partial y} - \dfrac{\partial K_y}{\partial z} \right), \\ \dfrac{\partial H_y}{\partial t} = V\left(\dfrac{\partial K_x}{\partial z} - \dfrac{\partial K_z}{\partial x} \right), \\ \dfrac{\partial H_z}{\partial t} = V\left(\dfrac{\partial K_y}{\partial x} - \dfrac{\partial K_x}{\partial y} \right), \end{cases}$$

$$(4) \qquad \frac{\partial H_x}{\partial y} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0.$$

Sie ergeben mittels (1) und (2) als Analogon zu (3):

$$(5) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial K_x}{\partial t} = -V\left(\dfrac{\partial H_z}{\partial y} - \dfrac{\partial H_y}{\partial z} \right), \\ \dfrac{\partial K_y}{\partial t} = -V\left(\dfrac{\partial H_x}{\partial y} - \dfrac{\partial H_z}{\partial x} \right), \\ \dfrac{\partial K_z}{\partial t} = -V\left(\dfrac{\partial H_y}{\partial x} - \dfrac{\partial K_x}{\partial y} \right), \end{cases}$$

und als Analogon zu (1):

$$(6) \qquad \frac{\partial^2 H_\nu}{\partial t^2} = V^2 \left(\frac{\partial^2 H_\nu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_\nu}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_\nu}{\partial z^2} \right).$$

Das Formelsystem (2), (3), (4), (5) als Ersatz für (1) und (2) bez. (4) und (6) wurde von Hertz 1884 aus der Maxwell'schen Theorie herausgelöst.

Für die Elektrodynamik kommt noch ein drittes System in Betracht, welches in vielen Fällen vorteilhafter ist als das zweite und sich enger an Maxwell anschliesst. In ihm wird das *Vectorpotential* eines der Vectoren K und H benutzt. Wir

wollen H auswählen und das Potential mit Γ bezeichnen, dann ist zu setzen:

$$(7)\qquad H_x = -\left(\frac{\partial \Gamma_z}{\partial y} - \frac{\partial \Gamma_y}{\partial z}\right), \quad H_y = -\left(\frac{\partial \Gamma_x}{\partial z} - \frac{\partial \Gamma_z}{\partial x}\right),$$
$$H_z = -\left(\frac{\partial \Gamma_y}{\partial x} - \frac{\partial \Gamma_x}{\partial y}\right).$$

Damit wird Γ noch nicht bestimmt; vor allem kommt in Betracht, dass der Wert von

$$\frac{\partial \Gamma_x}{\partial x} + \frac{\partial \Gamma_y}{\partial y} + \frac{\partial \Gamma_z}{\partial z}$$

willkürlich bleibt; eine passende Verfügung behalten wir uns vor.

Der Ansatz (7) erfüllt (4) und ergiebt wegen (3):

$$-\frac{\partial^2 \Gamma_z}{\partial y\,\partial t} + \frac{\partial^2 \Gamma_y}{\partial z\,\partial t} = V\left(\frac{\partial K_z}{\partial y} - \frac{\partial K_y}{\partial z}\right)$$

nebst zwei ähnlichen Gleichungen. Das ganze System zeigt, dass VK sich von dem Vector $(-\partial \Gamma_x/\partial t,\ -\partial \Gamma_y/\partial t,\ -\partial \Gamma_z/\partial t)$ nur um einen Vectoranteil unterscheiden kann, der ein scalares Potential besitzt. Bezeichnen wir dieses mit Φ, so ist zu setzen:

$$(8)\qquad K_\nu = -\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} - \frac{1}{V}\frac{\partial \Gamma_\nu}{\partial t},$$

wobei ν eine beliebige Richtung bedeutet. Hiermit ist nun auch das System (3) erfüllt. Es bleiben uns noch (2) und (5), (2) ergiebt:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{1}{V}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \Gamma_x}{\partial x} + \frac{\partial \Gamma_y}{\partial y} + \frac{\partial \Gamma_z}{\partial z}\right) = 0.$$

Mittels (5) folgt für eine beliebige Richtung ν:

$$\frac{\partial^2 \Gamma_\nu}{\partial t^2} = V^2\left(\frac{\partial^2 \Gamma_\nu}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 \Gamma_\nu}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Gamma_\nu}{\partial z^2}\right)$$
$$- V\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + V\left(\frac{\partial \Gamma_x}{\partial x} + \frac{\partial \Gamma_y}{\partial y} + \frac{\partial \Gamma_z}{\partial z}\right)\right).$$

Ueber die Unbestimmtheit in Γ verfügend setzen wir nun:

$$(9)\qquad \frac{\partial \Phi}{\partial t} + V\left(\frac{\partial \Gamma_x}{\partial x} + \frac{\partial \Gamma_y}{\partial x} + \frac{\partial \Gamma_z}{\partial z}\right) = 0.$$

Dann folgt als Ersatz für (2) und (5):

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = V^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right); \tag{10}$$

$$\frac{\partial^2 \Gamma_\nu}{\partial t^2} = V^2 \left(\frac{\partial^2 \Gamma_\nu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Gamma_\nu}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Gamma_\nu}{\partial z^2} \right). \tag{11}$$

(9), (10), (11) in Verbindung mit (7) und (8) stellen das angekündigte *Maxwell'sche Gleichungssystem* dar. Wie wir erkennen, ist es nicht symmetrisch. Das scheint zunächst ein Nachteil (der übrigens leicht beseitigt werden könnte), ist es aber in Wirklichkeit nicht, denn bei der Einordnung der Theorie der Optik in die Theorie der Elektrodynamik kommen wir so in die Lage, uns genau der erfahrungsgemäss bestehenden Unsymmetrie der elektrischen und magnetischen Erscheinungen anzupassen.

Maxwell benutzte nicht die vereinfachende Beziehung (9). Ihm war nämlich Γ nicht wie uns eine blosse mathematische Hülfsgrösse, sondern eine Function des Zustandes von besonderer Bedeutung, und so musste er den Wert von

$$\frac{\partial \Gamma_x}{\partial x} + \frac{\partial \Gamma_y}{\partial y} + \frac{\partial \Gamma_z}{\partial z},$$

obgleich „not related to any physical phenomenon", unbestimmt lassen. In einer interessanten in Abschnitt 12 citirten Arbeit von Levi-Civita (1897) ergab sich (9) als Folgerung aus hypothetischen Annahmen über Φ und Γ.

4. *Elektrische Ladung.* Nach Maxwell's Theorie lassen sich die elektrische und die magnetische Erregung im freien Aether durch eines der Vectorenpaare K und H der Optik darstellen. Da wir die soeben berührte Unsymmetrie berücksichtigen müssen, ist in unserem Falle die „*elektrische Kraft*" mit K, die „*magnetische Kraft*" mit H zu bezeichnen.

Für einen Raum, in dem die Gleichungen (2) und (4) überall erfüllt sind, ergeben sich für jede geschlossene Fläche die Sätze:

$$\int^0 d\sigma\, K_\nu = 0, \qquad \int^0 d\sigma\, H_\nu = 0.$$

$d\sigma$ bedeutet ein Oberflächenelement, ν die Normale; der Index ^{0} soll daran erinnern, dass es sich um eine geschlossene

Fläche handelt. Liegt die Fläche zwar selbst im freien Aether, umschliesst sie aber Materie, so werden (2) und (4) unbrauchbar, und es lässt sich mittels (3) und (5) nur folgern, dass die Flächenintegrale von der Zeit unabhängig sind; (2) und (4) ergeben dann zugleich, dass alle Flächen, welche dieselbe Materie umschliessen, auch dieselben Werte der Integrale haben müssen. Die Erfahrung lehrt, dass nur für die elektrische Erregung, nicht aber für die magnetische, von 0 verschiedene Werte auftreten können.

Wir setzen demgemäss:

$$\int^{0} d\sigma\, K_\nu = 4\pi e\,, \qquad \int^{0} d\sigma\, H_\nu = 0\,.$$

Die Grösse e, welche auf die nach aussen weisende Normale bezogen werden soll, hängt dann allein von der eingeschlossenen Materie ab, nicht von der besonderen Gestalt der umschliessenden Fläche. Sie heisst die „*Gesamtmenge der in der Materie enthaltenen Elektricität*“.

Kommen zwei Körper in zeitweilige Berührung, so zeigen sie erfahrungsgemäss oftmals nachher andere Ladungen als vorher. Nach unseren eben abgeleiteten Sätzen muss dabei die Summe der Ladungen die Berührung überdauern, der eine Körper muss also gerade so viel gewonnen haben, als der andere verloren hat. Der *Satz von der Erhaltung der Elektricität* erscheint hiernach als Folgerung aus (5).

Aus der Elektrolyse ist zu schliessen, dass die elektrische Ladung an der molecularen Structur der Materie Anteil hat, indem die einzelnen Atome oder Atomgruppen nur eine ganz bestimmte positive oder negative Ladung oder ein ganzzahliges Vielfaches von dieser annehmen können.

5. *Was bedeutet nun eine Veränderung der Ladung?* Bis vor kurzem bot diese Frage für die Elektrodynamik besondere Schwierigkeiten. H. A. Lorentz schrieb 1895[1]): „Ist somit die Annahme dieses Ueberganges oder Austausches der Ionenladungen — eines freilich noch sehr dunklen Vorganges — die unerlässliche Ergänzung jeder Theorie, welche eine Fortführung

1) Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern p. 6 und 7. Leiden 1895.

der Elektricität durch Ionen voraussetzt, so besteht ein anhaltender elektrischer Strom auch nie in einer Convection *allein*, . . . Hr. Giese ist der Meinung, dass in den Metallen eine wirkliche Convection gar nicht im Spiele sei. Da es aber nicht möglich scheint, das „Ueberspringen“ der Ladungen in die Theorie aufzunehmen, so wolle man entschuldigen, dass ich meinerseits von einem solchen Vorgange gänzlich absehe und mir einen Strom in einem Metalldraht einfach als eine Bewegung geladener Teilchen denke.“ Ganz ähnlich musste ich mich in meinen theoretischen Arbeiten über die Elektrodynamik verhalten. Befriedigend erscheint nur ein Ausweg, auf den unter anderen Helmholtz 1881 in einem Faraday zu Ehren gehaltenen Vortrag hinwies: *Wir müssen die Elektricität ganz so körperlich auffassen wie die Materie, das heisst, wir müssen auch ihr bestimmte unveränderliche Atome zuschreiben.*

Als *„imponderabel“* im Sinne der älteren Anschauungen dürfen wir die elektrischen Atome freilich nicht ansehen, denn als Folge der mit der Bewegung im Aether verbundenen elektrodynamischen Vorgänge ergiebt sich eine *kinetische Energie*, also *Masse* im Sinne der Mechanik. Bedenken wir noch den Anteil, welchen die elektrischen Teilchen an dem Aufbau der sinnlich wahrnehmbaren Materie nehmen, so erscheinen sie als diese selbst. „Es bietet sich so die lockende Aussicht, Materie und Elektricität unter einem höheren Gesichtspunkt zu vereinigen.“ Als ich dieses in einer 1894 veröffentlichten Skizze einer Theorie der Elektrodynamik schrieb, musste der rein hypothetische Charakter scharf hervorgehoben werden. Noch im Frühjahr 1896 vermochte ich bei der ausführlichen Darstellung der Theorie als Grenzen für das Atomgewicht der besonderen elektrischen Atome, welche bei dem Wechsel der molecularen Ladungen ausgetauscht werden, nur die recht weit auseinander liegenden Zahlen 10^{-7} und 1 anzugeben. Seit jener Zeit aber ergab sich schnell grössere Sicherheit. Es kam im selben Jahre die Entdeckung Zeeman's und ihre Erklärung durch H. A. Lorentz, welche die Vermutung nahelegt, dass das Atomgewicht der besonderen elektrischen Atome etwa $^1/_{1000}$ ist. Mich selbst führten im Winter Untersuchungen über die Kathodenstrahlen zu der Folgerung, dass

diese aus den besonderen elektrischen Atomen bestehen, und dass ihr Atomgewicht etwa $^1/_{2000}$ bis $^1/_{4000}$ beträgt.[1])

Es ist wohl bekannt, eine wie grosse Zahl von Arbeiten später erschienen ist, welche diese Resultate befestigen und nach vielen Seiten hin ergänzen. Die Zahlwerte für beide Phänomene wurden genauer bestimmt und kamen einander näher.

6. *Elektronentheorie der Elektrodynamik.* Fassen wir alles zusammen, so kann nun mit grosser Zuversicht folgendes behauptet werden:

Die Ladung eines jeden materiellen Teilchens ist diesem ein für allemal eigentümlich, ändert sich also niemals.

Um den eigentlichen Sinn der Hypothese recht scharf zu erfassen, muss man sich erinnern, dass wir in der „Menge der Elektricität" ein Maass für die elektrodynamische Verkettung mit dem Aether erkannten. Es tritt dann sogleich hervor, dass weiter nichts ausgesagt wird, als dass die elektrodynamische Verkettung mit dem Aether, soweit sie sich in der „Menge der Elektricität" messen lässt, jedem materiellen Teilchen ein für allemal eigentümlich ist.

Ein elektrischer Leitungsstrom ist hiernach stets zugleich als Strom materieller Teile aufzufassen. Für die elektrolytische Leitung wurde dieses seit langem anerkannt. Neu ist nur, dass wir auch für die metallische Leitung etwas Aehnliches annehmen müssen. Sollte es allein besondere negative elektrische Atome geben und nicht auch positive Atome ähnlicher Art, so würde die Bewegung nur in der negativen Richtung des elektrischen Stromes erfolgen.

Wie H. A. Lorentz zuerst gezeigt hat, ist es möglich, *die elektrodynamischen Vorgänge allein als Folge von Bewegungen elektrischer Teilchen anzusehen.* Es mag wohl sein, dass die wirklichen Erscheinungen damit nicht erschöpft werden, wir haben aber jedenfalls bei der Ausarbeitung der Theorie vorläufig das Recht, diese vereinfachende Voraussetzung zu machen.

Damit kommen wir nun zu den Grundvorstellungen der alten Theorien zurück. Der ganze Unterschied ist, dass wir die elektrischen Flüssigkeiten nicht mehr imponderabel, sondern materiell

1) E. Wiechert, Phys.-ökonom. Gesellsch. zu Königsberg i. Pr. 38. 7. Januar 1897.

auffassen. Die kleinste moleculare Ladung hat von Stoney (1874) den Namen „*Elektron*" erhalten. Da wir sie in den Mittelpunkt unserer Theorie stellen, können wir diese auch die „*Elektronentheorie*" der Elektrodynamik nennen.

7. *Feldgleichungen.* Für den freien Aether nahmen wir an (Abschnitt 3):

$$\frac{\partial K_x}{\partial t} = -V\left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right), \quad \frac{\partial H_x}{\partial t} = V\left(\frac{\partial K_z}{\partial y} - \frac{\partial K_y}{\partial z}\right),$$

$$\frac{\partial K_y}{\partial t} = -V\left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial H_y}{\partial t} = V\left(\frac{\partial K_x}{\partial z} - \frac{\partial K_z}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial K_z}{\partial t} = -V\left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial H_z}{\partial t} = V\left(\frac{\partial K_y}{\partial x} - \frac{\partial K_x}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial K_x}{\partial x} + \frac{\partial K_y}{\partial y} + \frac{\partial K_z}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0.$$

Für materielle Systeme ändern sich diese Gleichungen, weil wir auf die Elektronen Rücksicht nehmen müssen. Doch ist es nicht nötig, noch weitere Hypothesen zu machen, denn unsere Annahme, dass der Aether mit gleichen Eigenschaften auch die Materie durchdringt, führt das hingeschriebene System über in

$$(12) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial K_x}{\partial t} = -V\left(\dfrac{\partial H_z}{\partial y} - \dfrac{\partial H_y}{\partial z}\right) - 4\pi\gamma_x, \\ \dfrac{\partial K_y}{\partial t} = -V\left(\dfrac{\partial H_x}{\partial z} - \dfrac{\partial H_z}{\partial x}\right) - 4\pi\gamma_y, \\ \dfrac{\partial K_z}{\partial t} = -V\left(\dfrac{\partial H_y}{\partial x} - \dfrac{\partial H_x}{\partial y}\right) - 4\pi\gamma_z. \end{cases}$$

$$(13) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial H_x}{\partial t} = V\left(\dfrac{\partial K_z}{\partial y} - \dfrac{\partial K_y}{\partial z}\right), \\ \dfrac{\partial H_y}{\partial t} = V\left(\dfrac{\partial K_x}{\partial z} - \dfrac{\partial K_z}{\partial x}\right), \\ \dfrac{\partial H_z}{\partial t} = V\left(\dfrac{\partial K_y}{\partial x} - \dfrac{\partial K_x}{\partial y}\right). \end{cases}$$

$$(14) \quad \frac{\partial K_x}{\partial x} + \frac{\partial K_y}{\partial y} + \frac{\partial K_z}{\partial z} = 4\pi\chi,$$

$$(15) \quad \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0,$$

wobei γ den elektrischen Strom, χ die elektrische Dichte bezeichnet, und als Folge der vorstehenden Gleichungen

$$(16) \quad -\frac{\partial \chi}{\partial t} = \frac{\partial \gamma_x}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_z}{\partial z}$$

hervorgeht. *Dieses System fasst alle Erfahrungssätze über die elektrische und magnetische Felderregung zusammen.* K, H, γ, χ stellen innerhalb der Materie Mittelwerte dar, wie es der Annahme der molecularen Constitution entspricht.

γ summirt eine Reihe verschiedener physikalischer Vorgänge: die „*Convection*", den „*Leitungsstrom*", die „*dielektrische Polarisation*" und die „*Magnetisirung*".

Das Gleichungssystem (12) bis (16) lehnt sich an Hertz (und Heaviside) an. In der Maxwell'schen Darstellungsweise erhalten wir für die Bezeichnungen des Abschnitts 3:

$$\text{(17)} \quad \begin{cases} H_x = -\left(\frac{\partial \Gamma_z}{\partial y} - \frac{\partial \Gamma_y}{\partial z}\right), \quad H_y = -\left(\frac{\partial \Gamma_x}{\partial z} - \frac{\partial \Gamma_z}{\partial x}\right), \\ H_z = -\left(\frac{\partial \Gamma_y}{\partial x} - \frac{\partial \Gamma_x}{\partial y}\right). \end{cases}$$

$$\text{(18)} \quad K_\nu = -\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} - \frac{1}{V}\frac{\partial \Gamma_\nu}{\partial t},$$

$$\text{(19)} \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = V^2\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\right) + 4\pi V^2 \chi,$$

$$\text{(20)} \quad \frac{\partial^2 \Gamma_\nu}{\partial t^2} = V^2\left(\frac{\partial^2 \Gamma_\nu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Gamma_\nu}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Gamma_\nu}{\partial z^2}\right) + 4\pi V \gamma_\nu,$$

$$\text{(21)} \quad -\frac{\partial \chi}{\partial t} = \frac{\partial \gamma_x}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_z}{\partial z}.$$

Die letzte Gleichung formulirt den Satz von der Erhaltung der Elektricität; die Beziehung:

$$\text{(22)} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} + V\left(\frac{\partial \Gamma_x}{\partial x} + \frac{\partial \Gamma_y}{\partial y} + \frac{\partial \Gamma_z}{\partial z}\right) = 0$$

erscheint hier als Folge von (19), (20), (21).

Das System (17) bis (21) ist mit dem System (12) bis (15) ganz gleichwertig, kann also wie dieses als Fundamentalsystem für die Felderregungen genommen werden.

8. *Einwirkung des Aethers auf die Materie.* Bisher haben wir allein die Erregung des Aethers beachtet, sodass die Grundlagen für die Theorie der Elektrodynamik noch nicht vollständig sind. Es fehlt die Festellung der Einwirkung des Aethers auf die Materie. H. A. Lorentz hat als der erste (1892) gezeigt, dass dafür die beiden folgenden Hypothesen genügen:

Ein elektrisches Teilchen der Ladung e erfährt unabhängig von seiner Bewegung wegen der elektrischen Erregung des Aethers eine mechanische Kraft $\parallel K$ *von der Intensität* $e K$.

Ein elektrisches Teilchen der Ladung e, das sich mit der Geschwindigkeit v bewegt, erfährt wegen der magnetischen Erregung des Aethers eine mechanische Kraft $\perp v$ *und* $\perp H$ *von der Intensität* $e v H \sin(v, H) / V$.

9. *Schlussbemerkungen.* Der Kreis der grundlegenden Hypothesen für eine Theorie der Elektrodynamik ist nun vollständig. Es sind ihrer angesichts der Fülle der umfassten Erscheinungen nur sehr wenige, und alle schliessen sich enge an die Erfahrung, oder wählen aus dem Möglichen das Einfachste heraus: die Gesetze der Lichtbewegung im freien Aether, Maxwell's Annahme, dass dabei magnetische und elektrische Erregungen ins Spiel kommen, die Voraussetzung eines überall vorhandenen, überall ruhenden, überall gleich beschaffenen Trägers dieser Erregungen, den wir „Aether" nennen, die Vorstellung, dass die Wechelwirkungen zwischen Aether und Materie sich allein an elektrische Teilchen und ihre Bewegungen knüpfen, endlich die beiden Gesetze des vorigen Abschnittes.

Der elektrodynamischen Energie wurde bisher noch nicht gedacht. Es geschah dieses absichtlich, um zu zeigen, dass sie bei der Feststellung der Grundvorstellungen nicht berücksichtigt zu werden braucht. Wenn man nun aber das Princip der Energie anwendet, so ergiebt sich, dass dem elektrodynamisch erregten Aether Energie zugeschrieben werden muss, und dass man den Anforderungen des Principes am einfachsten mittels der Maxwell'schen Energieformel und der Poynting'schen Vorstellung der Energieströmung genügt.

II. Elementargesetze.

10. *Formulirung des Problems.* Charakteristisch für die entwickelte Theorie ist es, dass sie eine Fortpflanzung der elektrodynamischen Erregungen mit der Lichtgeschwindigkeit im freien Aether annimmt. Es entsteht daher die Vermutung, dass es möglich sein müsse, die jeweilige Erregung an irgend einer Stelle als Folge von Vorgängen darzustellen, die in jeder Raumstelle zu so weit zurückliegenden Zeiten stattfanden, als

jener Ausbreitungsgeschwindigkeit entspricht. Da wir ferner annehmen, dass alle Aethererregungen ihren Ursprung in den elektrischen Teilchen haben, so werden wir vermuten, dass es auch möglich sein müsse, im Sinne der alten Theorien die entscheidenden Vorgänge allein auf diese elektrischen Teilchen zu beziehen.

Aehnliche Probleme sind in der Elasticitätstheorie sowie in der Optik schon vielfach behandelt worden, und wir kommen leicht zu unserem Ziel, wenn wir von den so entwickelten Methoden Gebrauch machen. Ich will im Folgenden den Weg gehen, auf welchen von Beltrami das Huygens'sche Princip analytisch formulirt wurde.

11. *Elementargesetz für Raumelemente.* Es wäre nicht zweckmässig, direct an die Gleichungen für K und H anzuknüpfen, weil die Trennung beider Vectoren zu unbequemen Nebenbedingungen führt. Man pflegt in solchen Fällen passende Hülfsgrössen einzuführen. In unserem Falle ist das in Γ und Φ schon geschehen, wir werden also ohne weiteres das System:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = V^2\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\right) + 4\pi V^2 \chi, \tag{19}$$

$$\frac{\partial^2 \Gamma_\nu}{\partial t^2} = V^2\left(\frac{\partial^2 \Gamma_\nu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Gamma_\nu}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Gamma_\nu}{\partial z^2}\right) + 4\pi V^2 \frac{\gamma_\nu}{V} \tag{20}$$

zur Bestimmung von Φ und Γ verwerten können.

Beltrami[1]) benutzt folgenden mathematischen Hülfssatz: Ist U eine Function der Coordinaten x, y, z und r, so gilt für einen beliebigen Raumpunkt (0):

$$4\pi U_0 = \int d\sigma \left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{U}{r}\right)\cos(n,r) - \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n}\right)$$
$$+ \int \frac{d\omega}{r}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)\right),$$

wenn unter r die Entfernung von (0) verstanden wird, das erste Integral sich auf eine beliebige den Punkt (0) umgebende

1) E. Beltrami, R. Accad. d. Lincei, Rend. (2) 4. p. 51. 1895, eine deutsche Darstellung giebt W. Voigt, Compendium d. theoret. Physik 2. p. 776. Leipzig 1896.

Fläche, das zweite sich auf den eingeschlossenen Raum bezieht. n bedeutet die nach innen weisende Normale. Bei der Differentiation nach r hat man x, y, z, bei den Differentiationen nach n, x, y, z dagegen r als constant anzusehen. In unserem Falle denken wir uns die Fläche ins Unendliche gerückt und nehmen an, dass dann das zugehörige Integral gleich Null gesetzt werden darf. Dann bleibt:

$$4\pi U_0 = \int \frac{d\omega}{r}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)\right).$$

Hierin setzen wir $r = (t_0 - t)V$, wobei t_0 als Constante, t als Variable aufgefasst wird, sodass U in eine Function von x, y, z und t übergeht, und erhalten:

$$4\pi (U_0)_{t=t_0} = \int \frac{d\omega}{r}\left(\frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)\right)_{t=t_0-\frac{r}{V}}.$$

Wenden wir diesen Satz auf Φ und Γ_ν an, so ergiebt sich mittels der Differentialgleichungen (19) und (20) sofort:

$$\Phi_{t=t_0} = \int \frac{d\omega}{r}\chi_{t=t_0-\frac{r}{V}}, \tag{23}$$

$$(\Gamma_\nu)_{t=t_0} = \int \frac{d\omega}{r}\left(\frac{\gamma_\nu}{V}\right)_{t=t_0-\frac{r}{V}}, \tag{24}$$

womit folgendes ausgesagt ist: *Man erhält den Wert von Φ und Γ_ν für irgend eine Stelle (0) und irgend eine Zeit t_0 durch Summation der Anteile*

$$\frac{d\omega}{r}\chi \quad \text{und} \quad \frac{d\omega}{r}\frac{\gamma_\nu}{V}$$

für alle Volumenelemente $d\omega$. Dabei bedeutet r den Abstand des Volumenelementes von (0) und sind für χ bezüglich γ_ν diejenigen Werte zu wählen, welche zu einer so weit zurückliegenden Zeit bestanden, dass eine damals mit der Lichtgeschwindigkeit ausgehende Erregung gerade zur Zeit t_0 in (0) eingetroffen wäre. Die Potentialanteile der einzelnen Volumenelemente scheinen sich hiernach mit Lichtgeschwindigkeit auszubreiten.

In den Gesetzen (23) und (24) nebst den Formeln (17), (18) zur Bestimmung von K und H und dem Satze von der Erhaltung der Elektricität (21) ist uns eine neue *Darstellung der Feldgleichungen gegeben, welche nach dem Vorbild der alten Theorien die Nahwirkungen durch Fernkräfte ersetzt.*

12. *Historische Bemerkungen.* Die Formel (19) mit dem sich anschliessenden Satze (23), der hier unter Benutzung eines Beltrami'schen Hülfssatzes abgeleitet wurde, suchte schon Riemann[1]) 1858 für die Elektrodynamik zu verwerten. Da er aber nur auf die elektrische Kraft — nicht auch auf die magnetische — Rücksicht nahm, musste sein Vorgehen unfruchtbar bleiben. (23) und (24) oder entsprechende Sätze wurden dann später von Poincaré[2]) (1891) und in ausgedehntestem Maasse von H. A. Lorentz[3]) (1892 und 1895) verwertet. Levi-Civita[4]) zeigte 1897, dass man zu den Hertz-Heaviside'schen Formeln gelangt, wenn für die Helmholtz'sche Theorie ähnliche Formeln wie (23) und (24) angenommen werden.

13. *Elementargesetz für Elektronen.* Es bleibt uns nun noch ein letzter Schritt: *Wir müssen nach dem Vorgang von W. Weber die elektrodynamische Wirkung der Materie in die Anteile der einzelnen Elektronen auflösen.* Damit kommen wir denn zu dem eigentlichen Thema der vorliegenden Arbeit.

Zunächst könnte vermutet werden, dass im Anschluss an (23) und (24) für ein einzelnes *Elektron der Ladung* $\iota = \int d\omega\,\chi$ *und der Geschwindigkeit* v einfach

$$\Phi_{t=t_0} = \frac{\iota}{r_{t=t_0-\frac{r}{V}}}, \qquad (\Gamma_\nu)_{t=t_0} = \iota\left(\frac{1}{r}\,\frac{v_\nu}{V}\right)_{t=t_0-\frac{r}{V}},$$

zu setzen sei, und in der That wurde das seiner Zeit von Riemann für Φ vorausgesetzt. Dieser Weg führt aber zu Widersprüchen mit den fundamentalen Annahmen unserer Theorie, wie sich zum Beispiel bei der Behandlung irgend einer der Probleme in Teil III sogleich zeigen würde, ist also ungangbar. Es liegt dies daran, dass es nicht erlaubt ist, schon vor der Anwendung der Formeln (23) und (24) zu der Grenze eines punktförmigen Körpers überzugehen; jene Formeln gelten

---

1) B. Riemann, Pogg. Ann. **131.** p. 237. 1867.

2) H. Poincaré, Compt. rend. **113.** p. 515. 1891.

3) H. A. Lorentz, La théorie électromagnétique de Maxwell etc. Leiden 1892, auch Arch. Néerl. **25.** p. 363. 1892; Versuch einer Theorie etc., Leiden 1895.

4) Levi-Civita, Nuovo Cimento (4) **6.** p. 93. 1897.

ja für *räumlich* verteilte Elektricität, verlangen also, dass der Grenzübergang erst nach ihrer Anwendung gemacht werde. Es kommt auf dasselbe hinaus, wenn wir sagen, dass die Formeln (23) und (24) nur auf unendlich kleine, nicht aber auf punktförmige Körper angewandt werden dürfen.

Dabei soll noch angenommen werden, dass der Körper, den wir Elektron nennen wollen, allseitig symmetrisch gebaut sei und keine Drehungen ausführe. Andernfalls müssten Mittelwerte gebildet werden.

(1) sei diejenige Lage des Körpermittelpunktes zu der früheren Zeit t_1, von der aus eine mit der Lichtgeschwindigkeit V ausgehende Erregung gerade zur Zeit t_0 im Punkte (0) ankäme. Wird dann der Abstand (0)—(1) mit r_1 bezeichnet, so gilt:

$$t_1 = t_0 - \frac{r_1}{V}.$$

Wegen der vorausgesetzten unendlich kleinen Ausdehnung des Elektrons kommen bei der Anwendung von (23):

$$\Phi_{t=t_0} = \int \frac{d\omega}{r} \chi_{t=t_0-\frac{r}{V}}$$

nur Zeiten t und Entfernungen r in Betracht, die unendlich nahe an t_1 und r_1 liegen. Die scheidenden Kugelflächen dürfen im Bereiche des Elektrons als Ebenen gelten. $r - r_1$ ist ihr Abstand von (1). Bei der Integration ordnet sich jeder Ebene ein gewisser Schnitt durch das Elektron zu; wir fragen, wie dessen Abstand R vom Mittelpunkt mit $r - r_1$ zusammenhängt. Ist v die Geschwindigkeit des Elektrons, so liegt sein Mittelpunkt zur Zeit t in der Entfernung $(t - t_1)\, v \cos(v, r)$ von der Ebene durch (1). Hieraus folgt sogleich:

$$R = r - r_1 - (t - t_1)\, v \cos(v, r),$$

und daher wegen $r = (t_0 - t)\, V$, $r_1 = (t_0 - t_1)\, V$:

$$R = (r - r_1)\left(1 + \frac{v}{V} \cos(v, r)\right).$$

Bei der Integration zur Bildung von Φ sind für jeden Schnitt $r = \text{const.}$ diejenigen Werte χ zu wählen, welche zu R gehören, *die Integration darf also so ausgeführt werden, als wenn das Elektron mit seinem Mittelpunkt in (1) still stände,*

vorausgesetzt, dass wir uns seine Dimensionen ohne Aenderung der χ-Werte parallel r_1 im Verhältnis von

$$|R|:|r-r_1| = \left|1+\frac{v}{V}\cos(v,r)\right|:1$$

verändert denken. Die Zeichen $|\ |$ sollen andeuten, dass die absoluten Werte zu nehmen sind. Die Variation des Nenners r kommt bei unendlich kleinen Dimensionen nicht in Betracht, so erhalten wir denn

$$\Phi_{t=t_0} = \left(\frac{1}{r\left|1+\frac{v}{V}\cos(v,r)\right|}\int d\omega\,\chi\right)_{t=t_0-\frac{r}{V}}$$

$$= \iota\left(\frac{1}{r\left|1+\frac{v}{V}\cos(v,r)\right|}\right)_{t=t_0-\frac{r}{V}}.$$

Für Γ_ν gestaltet sich alles ähnlich, wobei $\iota\, v_\nu$ für $\int d\omega\,\chi_\nu$ zu setzen ist, wir erhalten also als *Elementargesetz für ein einzelnes Elektron* das Gleichungspaar:

$$\Phi_{t=t_0} = \iota\left(\frac{1}{r\left|1+\frac{v}{V}\cos(v,r)\right|}\right)_{t=t_0-\frac{r}{V}}. \tag{25}$$

$$(\Gamma_\nu)_{t=t_0} = \iota\left(\frac{\frac{v_\nu}{V}}{r\left|1+\frac{v}{V}\cos(v,r)\right|}\right)_{t=t_0-\frac{r}{V}}.$$

Bei der Bildung von $\cos(v,r)$ ist für r die von (0) zum Elektron hinführende Richtung zu nehmen, $v\cos(v,r)$ bedeutet also die von (0) fortweisende Componente von v.

Ganz wie zu erwarten, wird durch die Bedingung $t = t_0 - (r/V)$ für die Bestimmung von Φ bez. Γ_ν diejenige frühere Lage des Elektrons ausgewählt, von welcher aus eine mit der Lichtgeschwindigkeit V sich ausbreitende Erregung zur Zeit t_0 in den betrachteten Punkt eintrifft. Eventuell giebt es mehrere solche Lagen, dann ist Φ bez. Γ_ν als Summe der einzelnen Anteile zu setzen.

Solange v kleiner als die Lichtgeschwindigkeit V ist, kann $1 + v\cos(v,r)/V$ nur positiv sein. Für $v > V$ sind auch negative Werte möglich; in einem solchen Falle kommt die Bedingung zur Geltung, dass der absolute Wert gelten soll: es ist dann $-(1 + v\cos(v,r)/V)$ einzusetzen.

Sind im Felde beliebig viele Elektronen vorhanden, so addiren sich ihre durch (25) *und* (26) *bestimmten Anteile zu* Φ *und* Γ_ν*; wir erhalten dann unter Hinzunahme von*

$$K_\nu = -\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} - \frac{1}{V}\frac{\partial \Gamma_\nu}{\partial t} \text{ und } H_\nu = -\left(\frac{\partial \Gamma_\mu}{\partial \lambda} - \frac{\partial \Gamma_\lambda}{\partial \mu}\right),$$

wobei λ, μ, ν *eine beliebige cyklische Folge der* x, y, z, x . . . *bedeutet, eine Darstellung der Felderregung, welche im Sinne der W. Weber'schen Anschauungen auf die einzelnen elektrischen Teilchen zurückgeht.*

Charakteristisch ist, dass wir die Elektronen als punktförmig ansehen. In Fällen, wo dieses nicht erlaubt sein sollte, müssten wir die Elektronen in Volumenelemente auflösen, und ι durch $\chi\, d\omega$ ersetzen.

III. Einige Anwendungen des Elementargesetzes der Elektronen.

14. *Lineare stationäre oder halbstationäre Ströme.* Um die Brauchbarkeit des Elementargesetzes (25), (26) der Elektronen zu zeigen, sollen nun noch einige Anwendungen gegeben werden. Zunächst wenden wir uns zu dem klassischen Problem der älteren Theorien, welches durch die linearen Ströme geboten wird.

Die Ströme seien stationär, ihre Leiter in *Ruhe*. Um Φ und Γ für den Punkt (0) zu bilden, ist es unsere Aufgabe, die Anteile, welche durch das Elementargesetz angegeben werden, über alle Elektronen zu summiren. Wir denken uns um (0) zwei Kugelflächen r und $r - dr$ construirt, welche das Linienelement $d\lambda$ aus einem der Stromleiter herausschneiden, und für die Anwendung des Elementargesetzes das Zeitelement zwischen

$$t = t_0 - \frac{r}{V} \text{ und } t + dt = t_0 - \frac{r - dr}{V}$$

von der Länge

$$dt = \frac{dr}{V}$$

abgrenzen. Welche Elektronen kommen für dt in Betracht? Da wir nicht durchweg gleiche Geschwindigkeit voraussetzen dürfen, betrachten wir zunächst diejenige Gruppe, deren Geschwindigkeit parallel zu $d\lambda$ zwischen v und $v + dv$ liegt.

$d\chi$ sei die Liniendichte ihrer Elektricität, also $d\chi\, d\lambda$ die Elektricitätsmenge, welche sie für $d\lambda$ ergeben. Ein Elektron, welches sich zur Zeit t auf der Kugelfläche r, im Endpunkt von $d\chi$ befand, ist zur Zeit $t + dt$ um

$$v\,dt = \frac{v}{V}\,dr = \frac{v}{V}\cos(v, r)\,d\lambda$$

herausgerückt. Bei der Summation gehören also zu dt bez. dr und $d\lambda$ nicht nur die Elektronen auf einer Strecke $d\lambda$, sondern alle auf einer Strecke

$$d\lambda + v\,dt = d\lambda\left(1 + \frac{v}{V}\cos(v, r)\right),$$

und $d\lambda$ ergiebt demgemäss zu Φ den Beitrag:

$$d\Phi = \int d\chi\,\frac{d\lambda\left(1 + \frac{v}{V}\cos(v, r)\right)}{r\left(1 + \frac{v}{V}\cos(v, r)\right)} = \frac{d\lambda \int d\chi}{r} = \frac{de}{r},$$

wenn de die jeweilig auf $d\lambda$ befindliche Elektricitätsmenge bedeutet. *Für Φ gilt hiernach auch in stationären linearen Stromsystemen die Formel der Elektrostatik:*

$$\Phi = \int \frac{de}{r}.$$

Um Γ zu bilden, müssen wir bedenken, dass die Elektronen mit einer zwischen v und $v + dv$ liegenden Geschwindigkeit, zur Stromstärke i den Beitrag $di = v\,d\chi$ liefern, also zu Γ_v den Beitrag:

$$\frac{d\chi\, d\lambda\left(1 + \frac{v}{V}\cos(v, r)\right)}{v\left(1 + \frac{v}{V}\cos(v, r)\right)}\,\frac{v\cos(v, \nu)}{V} = \frac{di\, d\lambda\cos(\lambda, r)}{Vr}.$$

Hieraus folgt für $d\lambda$ der Anteil

$$d\Gamma_\nu = \frac{i}{V}\cdot\frac{d\lambda\cos(\lambda, r)}{r},$$

und für das Stromsystem im ganzen die bekannte Formel:

$$\Gamma_\nu = \int \frac{i}{V}\cdot\frac{d\lambda\cos(\lambda, r)}{r},$$

welche die Verteilung der magnetischen Kraft angiebt und in Verbindung mit dem zweiten Satz von Abschnitt 8 über die

mechanische Einwirkung des magnetisch erregten Aethers auch die ponderomotorischen Kräfte zwischen Stromsystemen der Erfahrung entsprechend darstellt.

Verändern sich die Ströme sehr langsam, sind sie „*halbstationär*“, so werden unsere Formeln für Φ und Γ doch noch näherungsweise gültig bleiben. Wir erhalten dann mittels

$$K_\nu = -\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} - \frac{1}{V}\frac{\partial \Gamma_\nu}{\partial t}$$

in dem zweiten Gliede rechts die „*inducirte elektromotorische Kraft*“. Integriren wir über einen geschlossenen Ring, so ergiebt sich sofort die Neumann'sche Formel, zum Zeichen, dass unsere Rechnung auch hier zu richtigen Resultaten führt. Bei der Induction in bewegten Körpern kommt gemäss dem zweiten Satz in Abschnitt 8 ein Anteil wegen der Bewegung im magnetischen Felde hinzu, welcher ebenfalls der Erfahrung genau entspricht.

15. *Elementargesetz für Volumenelemente.* Für körperliche Stromsysteme muss das Elementargesetz der Elektronen zu seinem Ausgangspunkt, dem in Abschnitt 11 angegebenen Elementargesetz für Volumenelemente zurückführen. Das dem wirklich so ist, kann man leicht nachweisen, wenn man ähnlich wie im vorigen Abschnitt die Elektronen bei der Summation ihrer Anteile zu Φ und Γ_ν für den Raumpunkt (0) und die Zeit t_0 nach den in Rechnung kommenden Entfernungen r und Zeiten t ordnet.

Wieder mögen

$$t = t_0 - \frac{r}{V}, \qquad t + dt = t_0 - \frac{r - dr}{V}, \qquad dt = \frac{dr}{V}$$

zusammengehören. v_r sei die von (0) fortgerichtete Geschwindigkeitscomponente. Wir richten die Untersuchung zunächst auf die Elektronen, für welche v_r zwischen v_r und $v_r + dv_r$ liegt; die Raumdichte ihrer Elektricität sei $d\chi$. Die zur Zeit t im Abstande r befindliche Schicht hat zur Zeit $t + dt$ einen um

$$v_r\, dt = \frac{v_r}{V}\, dr = \frac{v}{V}\cos(v, r)\, dr$$

grösseren Abstand erreicht. Für dr, dt kommt hiernach eine Elektronenschicht von der Dicke

$$dr + \frac{v}{V}\cos(v,r)\,dr = \left(1 + \frac{v}{V}\cos(v,r)\right)dr$$

in Rechnung. Ihr Anteil an Φ ist

$$d\Phi = \int d\sigma\, dr \frac{d\chi\left(1 + \frac{v}{V}\cos(v,r)\right)}{r\left(1 + \frac{v}{V}\cos(v,r)\right)} = \int d\sigma\, dr \frac{d\chi}{r},$$

wenn $d\sigma$ ein Oberflächenelement bezeichnet. Integriren wir über χ und r, so folgt:

$$\Phi_{t=t_0} = \int \frac{d\omega}{r} \chi_{t=t_0-\frac{r}{V}},$$

das heisst, die frühere Formel. Für Γ_ν ergiebt sich ähnlich:

$$d\Gamma_\nu = \int d\sigma\, dr \frac{d\chi\, v_\nu\left(1 + \frac{v}{V}\cos(v,r)\right)}{rV\left(1 + \frac{v}{V}\cos(v,r)\right)} = \int d\sigma\, dr \frac{d\chi\, v_\nu}{rV}.$$

Nun ist $d\chi\, v_\nu$ der Anteil der herausgegriffenen Elektronengruppe an $d\gamma_\nu$; benutzen wir dies, integriren über γ und r, so folgt der noch fehlende Satz:

$$(\Gamma_\nu)_{t=t_0} = \int \frac{d\omega}{r}\left(\frac{\gamma_\nu}{V}\right)_{t=t_0-\frac{r}{V}}.$$

16. *Ein einzelnes Elektron in gleichförmiger geradliniger Bewegung.*[1]) v sei die Geschwindigkeit. Wir beziehen uns auf ein Coordinatensystem, dessen z-Axe $\parallel v$ ist, und dessen Anfangspunkt im Orte des Elektrons zu derjenigen Zeit t_0 liegt, für welche wir die Verteilung von Φ und Γ suchen. So wird sich unmittelbar die Verteilung der elektrodynamischen Erregungen relativ zum Elektron ergeben.

Eine ganz einfache Rechnung lehrt, dass für den Raumpunkt (0) diejenige Lage (1) des Elektrons in Betracht zu ziehen ist, für welche r den Wert:

$$\left(\frac{v}{V}z + \sqrt{(x^2+y^2)\left(1 - \frac{v^2}{V^2}\right) + z^2}\right)\left(1 - \frac{v^2}{V^2}\right)^{-1}$$

und

$$r\left(1 + \frac{v}{V}\cos(v,r)\right)$$

1) Dasselbe Problem für Ueberlichtgeschwindigkeit wird ebenfalls im Jubiläumbande für H. A. Lorenz (p. 652) und völlig dem hier eingeschlagenen Wege entsprechend von meinem verehrten Göttinger Collegen Th. Des Coudres behandelt (Zusatz 7. III. 1901).

den Wert

$$\sqrt{(x^2 + y^2)\left(1 - \frac{v^2}{V^2}\right) + z^2}$$

hat; wir erhalten also:

$$\Phi = \frac{\iota}{\sqrt{(x^2 + y^2)\left(1 - \frac{v^2}{V^2}\right) + z^2}},$$

$$\Gamma_\nu = \frac{v_\nu}{V} \frac{\iota}{\sqrt{(x^2 + y^2)\left(1 - \frac{v^2}{V^2}\right) + z^2}}.$$

Hieraus in Verbindung mit

$$K_\nu = -\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} - \frac{1}{V}\frac{\partial \Gamma_\nu}{\partial t}, \quad H_\nu = -\left(\frac{\partial \Gamma_\mu}{\partial \lambda} - \frac{\partial \Gamma_\lambda}{\partial \mu}\right)$$

$$\lambda, \mu, \nu = \ldots x, y, z, x, y, \ldots$$

folgt in der That die bekannte Verteilung der Felderregungen, wenn man noch beachtet, dass wegen des von uns angenommenen sich bewegenden Coordinatensystems

$$\frac{\partial \Gamma_\nu}{\partial t} \text{ durch } -V\frac{\partial \Gamma_\nu}{\partial x}$$

zu ersetzen ist.

17. *Schwingendes Elektron.* Zum Schluss mag der für die Optik interessante Fall betrachtet werden, dass ein Elektron Sinusschwingungen vollführt. Solche Schwingungen der allgemeinsten Art lassen sich für die Theorie in lineare Schwingungen auflösen, wir können uns daher auf die Untersuchung *linearer Schwingungen* beschränken.

Der Anfangspunkt des Coordinatensystems möge in den Schwingungsmittelpunkt gelegt werden, die z-Axe der Schwingungslinie parallel. Dann dürfen wir schreiben:

$$\zeta = Z \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

wobei ζ die jeweilige z-Coordinate des Elektrons, Z der grösste Ausschlag, T die Periode ist. Das ausgesandte Licht hat die Wellenlänge $\lambda = VT$.

ϱ sei der Abstand des Punktes (0) vom Anfangspunkt der Coordinaten, also vom Schwingungsmittelpunkt. *Wir beschränken*

uns auf den Fall, dass Z als unendlich klein gegenüber λ und ϱ gelten darf. Dann ist in den Formeln (25), (26) rechts:

$$\frac{1}{r\left(1+\frac{v}{V}\cos(v,r)\right)} \quad \text{durch} \quad \frac{1}{\varrho}\left(1+\frac{\zeta z}{\varrho^2}+\frac{v z}{V\varrho}\right)$$

und

$$t = t_0 - \frac{r}{V} \quad \text{durch} \quad t = t_0 - \frac{\varrho}{V} = t_0 - T\frac{\varrho}{\lambda}$$

zu ersetzen, und wir erhalten, wenn in den Schlussformeln t an Stelle von t_0 geschrieben wird:

$$\Phi = \frac{\iota}{\varrho} + \frac{\iota Z}{\varrho}\frac{z}{\varrho}\left(\frac{1}{\varrho}\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{\varrho}{\lambda}\right)+\frac{2\pi}{\lambda}\cos\left(\frac{t}{T}-\frac{\varrho}{\lambda}\right)\right)$$

$$\Gamma_x = 0, \quad \Gamma_y = 0, \quad \Gamma_z = \frac{\iota Z}{\varrho}\frac{2\pi}{\lambda}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{\varrho}{\lambda}\right).$$

Die Formeln liefern einen wohlbekannten Fall der Ausstrahlung von einem „*leuchtenden Punkt*".

Ueber die ausgestrahlte Energie giebt am einfaahsten der Poynting'sche Satz Aufschluss. Wenden wir ihn auf sehr grosse Kugelflächen an, so folgt:

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{e^2 Z^2}{3}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4 V,$$

wobei $-dE$ der Energieverlust des schwingenden Systems während dt bezeichnet.

Hieran knüpft sich eine interessante Folgerung über die *Dämpfung der Schwingungen eines Elektrons* die unter der Wirkung einer mit der Entfernung proportionalen Centralkraft erfolgen. Damit die abgeleiteten Sätze näherungsweise gültig bleiben, müssen wir annehmen, dass die Dämpfung nur gering ist. Bedeutet m die effective Masse, $k\zeta$ die zurückziehende Kraft, so ist abgesehen von dem geringfügigen Einfluss der Dämpfung:

$$m\frac{d^2\zeta}{dt^2} = -k\zeta$$

zu setzen, woraus folgt:

$$\frac{k}{m} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2,$$

und für die Energie der Schwingungen:

$$E = \tfrac{1}{2}kZ^2 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 Z^2 m.$$

In Verbindung mit unserer Formel für $-dE/dt$ ergiebt sich so für die „*Relaxationszeit*“, das heisst die Zeit, in welcher die Amplitude auf den 1/2,818 ... Wert ihrer Grösse herabsinkt, der Wert

$$\tau = 2\frac{E}{\frac{dE}{dt}} = \frac{3}{4\pi^2}\cdot\frac{m}{\iota}\cdot\frac{\lambda^2 V}{\iota},$$

und für den Weg, den das Licht während der Relaxationszeit zurücklegt, der Wert:

$$w = \tau V = \frac{3}{4\pi^2}\cdot\frac{m}{\iota}\cdot\frac{\lambda^2 V^2}{\iota}.$$

Wir wollen diese Formel auf den Fall der Aussendung des Lichtes einer Spectrallinie anwenden. λ setzen wir rund gleich $^1/_{20000}$; für ι/m mag der Wert $4 . 10^{17}$ angenommen werden, welcher dem Zeemanphänomen und den Kathodenstrahlen ungefähr entspricht. ι ist nur ungenau bekannt; je nachdem man für die Anzahl der Molecüle in einem Cubikcentimeter Gas bei 0° C. und unter dem Normaldruck

$$N = 10^{19} \quad \text{oder} \quad N = 10^{20}$$

setzt — womit die möglich scheinenden Grenzen wohl etwa gekennzeichnet sind —, ergiebt sich:

$$\iota = 13 . 10^{-10} \quad \text{oder} \quad \iota = 1{,}3 . 10^{-10},$$

und wir erhalten:

$$w = 3 \text{ m} \quad \text{oder} \quad w = 30 \text{ m}.$$

Hiermit können Beobachtungen über Interferenzen bei grossen Gangunterschieden verglichen werden. Als höchste Wegdifferenz, bei welcher noch Interferenzen zu erkennen waren, ergab sich etwa $^1/_2$ Meter.

Wir werden daraus schliessen müssen, dass ausser der Abnahme der Schwingungen infolge der Lichtaussendung noch andere störende Ursachen wirksam waren, die stärker zur Geltung kamen. Setzen wir, was den Beobachtungen etwa entsprechen wird:

$$w > 0{,}5 \text{ m},$$

so folgt:

$$\iota < 80 . 10^{-10}, \quad N > \tfrac{1}{6}\, 10^{19}.$$

(Eingegangen 5. Februar 1901.)

3. *Ueber die Wärmeabsorption durch Kohlensäure; von Svante Arrhenius.*

(Bearbeitung einer der schwedischen Akademie der Wissenschaften am 9. Januar 1901 vorgelegten Abhandlung.)

In einer Abhandlung vom Jahre 1896[1]) versuchte ich den Einfluss des Kohlensäuregehaltes der Atmosphäre auf die Erdtemperatur zu berechnen. Dazu benutzte ich die Beobachtungen von Langley[2]) über die Strahlung des Mondes, woraus die Absorption der Kohlensäure und des Wasserdampfes berechnet wurde. Inzwischen zeigte es sich, dass die so erhaltenen Zahlen der Absorption nicht mit neueren Erfahrungen zu vereinigen waren, weshalb eine Neubestimmung der Absorption der Kohlensäure erwünscht erschien. Dieselbe habe ich im Institut von Prof. H. Rubens in Charlottenburg ausgeführt und erlaube ich mir hier meinen besonderen Dank Hrn. Rubens für seine liebenswürdigen Ratschläge und seine Hülfe bei der Arbeit auszusprechen.

Die Versuchsanordnung war folgende. Eine Wärmequelle, bestehend aus einem Leslie'schen Würfel (100 ° C.) oder einem Hohlkörper aus berusstem Kupferblech, der in einen Kohlensäure-Aetherbrei (– 80° C.) tauchte, sandte Strahlen aus, welche — im letzten Falle durch einen um 45 ° gegen die Horizontalebene geneigten Silberspiegel — längs der Axe eines Rohres von 33 mm innerem und 50 mm äusserem Durchmesser gerichtet wurden. Die Innenwände des eisernen Rohres waren mit einer stark absorbirenden Schicht von Eisenoxyd bedeckt und die Enden desselben wurden durch Ringe von Messing, in deren

---

1) Sv. Arrhenius, Bihang der Stockh. Akad. **22**. I. Nr. 1. 1896; Phil. Mag. (5) **41**. p. 237. 1896.

2) S. P. Langley, Memoirs of the nat. Ac. of Sc. **4**. 9th mem. 1890.

Mitte 1 cm dicke und 3 cm im Durchmesser haltende Steinsalzplatten eingekittet waren, vermittelst Schraubenkappen zugeschlossen. Die Wärmestrahlung ging durch diese Röhre zu einer Rubens'schen Thermosäule, welche mit einem Du Bois-Rubens'schen Panzergalvanometer in Verbindung stand. Der Weg der Wärmestrahlen betrug von der Wärmequelle bis zur Röhre 17 bez. 26,5 cm, in der Röhre 50 cm (ausser dem Wege durch die Steinsalzplatten), und von der Röhre bis zur Thermosäule 26,3 cm. Zwischen Wärmequelle und Rohr waren mehrere feste Schirme mit Diaphragmen und ein beweglicher zum Abschluss von fremden Strahlen aufgestellt, zwischen Rohr und Thermosäule und um die letztere waren röhrenförmige Vorrichtungen aus Papier und ein hölzernes Gehäuse zur Verhinderung von Luftströmungen aufgebaut.

Die Anordnung ähnelt in vielen Beziehungen derjenigen, welche Tyndall bei seinen bekannten Versuchen über Wärmeabsorption in Gasen benutzt hat.[1]) In das Rohr konnte von einer Kohlensäurebombe Kohlensäure eingefüllt werden, wobei Drucke von 1—8 Atmosphären, die auf einem Metallmanometer abgelesen werden konnten, zur Verwendung kamen. Wenn nötig konnte die Kohlensäure durch eine Luftpumpe aus dem Rohr entfernt und durch Luft ersetzt werden. Die Wärmestrahlung, welche bei diesen Versuchen auf dem Galvanometer abgelesen wurde, war die Differenz zwischen der Strahlung der Wärmequelle und der Thermosäule (15 ^{0} C.).

Es ist wohl nicht nötig, die Bestimmung der Absorption näher zu beschreiben, sondern ich kann, indem ich betreffs näherer Details auf die in der Stockholmer Akademie publicirte Abhandlung verweise, zur Wiedergabe der Beobachtungen übergehen. Dabei wird unter Länge (l) der absorbirenden Schicht das Product aus der Länge der Röhre und dem Druck in Atmosphären der Kohlensäure in demselben verstanden. Unter A ist die Absorption in Procenten tabellirt. $1 - A/100$ wird der Kürze halber a genannt. Die directen Beobachtungen gaben folgende Werte, wobei die Versuche mit dem Leslie'schen Würfel mit I, diejenigen mit der Kohlensäure-Aetherkühlung mit II bezeichnet sind:

1) J. Tyndall, Contributions to mol. physics p. 15. 1872.

I.		II.	
l (cm)	A_1	l (cm)	A_2
50	10,4	50	15,0
140	14,3	130	19,4
155	15,0	220	22,3
170	15,8	260	23,9
200	15,9	355	26,8
275	18,1		
300	18,3		

Es fällt auf, dass die unter A_2 stehenden Ziffern durchgängig grösser sind als die unter A_1 stehenden, für ungefähr gleich grosse l-Werte gültigen. Um dies näher zu erforschen, habe ich durch Interpolation folgende Werte berechnet:

l (cm)	A_2	A_1	$A_2 : A_1$	$\log a_2$	$\log a_1$	$\log a_2 : \log a_1$
50	15,0	10,4	1,44	−0,0706	−0,0477	1,48
130	19,4	13,9	1,40	−0,0937	−0,0650	1,44
220	22,3	16,4	1,36	−0,1096	−0,0778	1,41
260	23,9	17,6	1,36	−0,1186	−0,0841	1,41
(355	26,8	18,8	1,43	−0,1355	−0,0904	1,50)

Der letzte Wert, der durch eine mässige Extrapolation gewonnen ist, scheint anzudeuten, dass die in den ersten Ziffern ausgesprochene Tendenz des Quotienten, mit steigendem l-Werte zu sinken, wahrscheinlich nur auf Zufall beruht. Da eine Einheit in der letzten Decimale einem Fehler von etwa 0,1 Proc. im A-Wert entspricht, und wohl Fehler von 0,5 Proc. in diesen Werten vorkommen können, so ist es wohl erlaubt einen constanten Mittelwert 1,44 für das Verhältnis $\log a_2 : \log a_1$ anzunehmen. Von diesem Wert werden wir unten bei den Berechnungen Gebrauch machen.

Mein Hauptzweck war die Absorption der Kohlensäure für relativ hohe l-Werte (über 50 cm) kennen zu lernen. Aus Tyndall's Daten[1]) kann man Werte der Absorption für niederere l-Werte erhalten. Sie beziehen sich auf die Strahlung eines 100^0 warmen schwarzen Körpers gegen eine Thermosäule von Zimmertemperatur. Seine Werte sind folgende:

l (cm)	A_1	$\log a_1$	l (cm)	A_1	$\log a_1$
2,03	1,4	−0,0061	12,18	6,1	−0,0273
4,06	2,1	−0,0092	14,2	6,7	−0,0301
6,09	3,0	−0,0132	20,3	6,9	−0,0311
8,12	4,0	−0,0177	40,6	10,0	−0,0458
10,15	5,1	−0,0227	60,9	11,8	−0,0545

1) J. Tyndall, l. c. p. 37.

Sie stimmen, wie man sieht, sehr gut mit meinen Versuchen überein, welche unter nahezu denselben Versuchsbedingungen ausgeführt sind. Für $l = 50$ erhält man aus Tyndall's Daten $A_1 = 10{,}9$, während von mir $A_1 = 10{,}4$ beobachtet wurde.

Im Folgenden ist es für die Berechnungen von Wichtigkeit, eine empirische Formel darzustellen, welche das Beobachtungsmaterial innerhalb der Versuchsfehler wiedergiebt. Eine solche Formel, welche für unendliche l-Werte einen A-Wert gleich 100 aus theoretischen Gründen (vgl. weiter unten) geben soll, ist folgende:

$$\log a = -D\{(1 + B\,l)^c - 1\}.$$

Durch Ausprobiren findet man folgende Werte der Constanten:

$$D_1 = 0{,}0028 \text{ bez. } D_2 = 0{,}0040, \quad B = 1 \quad c = 0{,}25.$$

Die folgende Tabelle erlaubt einen Vergleich der beobachteten Zahlen mit den berechneten. Die Versuche von Tyndall sind durch ein T, die von mir durch ein A gekennzeichnet. log a ist ein berechneter Wert.

	l (cm)	$\log a$	$A_{\text{ber.}}$	$A_{\text{beob.}}$	Diff.
I. T.	2,03	−0,0088	2,0	1,4	+0,6
I. T.	4,06	−0,0140	3,2	2,0	+1,2
I. T.	6,09	−0,0176	4,0	3,0	+1,0
I. T.	8,12	−0,0206	4,6	4,0	+0,6
I. T.	10,15	−0,0232	5,2	5,1	+0,1
I. T.	12,18	−0,0253	5,7	6,1	−0,4
I. T.	14,2	−0,0273	6,1	6,7	−0,6
I. T.	20,3	−0,0320	7,1	6,9	+0,2
I. T.	40,6	−0,0430	9,4	10,0	−0,6
I. A.	50,0	−0,0466	10,2	10,4	−0,2
II. A.	50,0	−0,0669	14,3	15,0	−0,7
I. T.	60,7	−0,0503	10,9	11,8	−0,9
II. A.	130	−0,0953	19,7	19,4	+0,3
I. A.	140	−0,0681	14,5	14,3	+0,2
I. A.	155	−0,0707	15,0	15,0	±0,0
I. A.	170	−0,0730	15,5	15,8	−0,3
I. A.	200	−0,0771	16,3	15,9	+0,4
II. A.	220	−0,1141	23,1	22,3	+0,8
II. A.	260	−0,1208	24,3	23,9	+0,4
I. A.	275	−0,0858	17,9	18,1	−0,2
I. A.	300	−0,0883	18,4	18,3	+0,1
II. A.	355	−0,1338	26,5	26,8	−0,3

Eine Abweichung scheint bei den niedrigsten Werten zwischen der Rechnung und der Beobachtung zu bestehen, sicher ist aber diese Abweichung nicht, denn es wäre wohl denkbar, dass auch diese Differenzen innerhalb der Versuchsfehler fallen, wie wohl für die übrigen der Fall ist. Es scheint demnach als ob man die gefundene Formel zu Berechnungen innerhalb des Gebietes $A_1 = 5$ bis $A_1 = 18,5$ oder $A_2 = 7$ bis $A_2 = 27$, l-Werten von 10 bis 350 entsprechend, benutzen könnte. Und nach der guten Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Berechnung scheint es wohl möglich bis zu Werten von A_1 und A_2, die 25 bez. 35 erreichen, die Formel zur Extrapolation zu verwenden, ohne allzu grosse Fehler (von mehr als 1 Proc. in A) zu machen. Diese Extrapolation ist für einen (geringen) Teil der Rechnungen betreffs der Kohlensäureabsorption in der Atmosphäre nötig, man kommt dabei zu l-Werten, die 1000 erreichen, also 20 Atmosphären Druck in dem benutzten Apparat entsprechen, einem Druck, bei dem es mir leider wegen Undichtigkeiten nicht gelang, Beobachtungen auszuführen.

Mit Hülfe der oben gegebenen Formel habe ich eine Tabelle berechnet über die Länge der Kohlensäureschichten, welche genügen, um einen bestimmten Procentsatz der Wärmestrahlung zu absorbiren. In dieser Tabelle sind zwei Werte l_1 und l_2 angeführt, welche den beiden oben erwähnten Wärmequellen entsprechen. Folgender Auszug möge genügen:

A	l_1	l_2	A	l_1	l_2
5	9,7	5,0	25	900	300
10	49	20,7	30	(1840)	580
15	155	60	35	(3350)	1080
20	400	142	(40	5860	1920)

Es gilt jetzt die Einwirkung einer gegebenen Kohlensäureatmosphäre (in welche andere, nicht merklich absorbirende Gase, wie Sauerstoff und Stickstoff, eingemischt sein können) auf die Temperatur einer davon eingehüllten schwarzen Kugel, die wie die Erde eine constante Wärmezufuhr erhält, zu berechnen. Die Wirkung dieser Atmosphäre, die wir uns genau so wie die Erdatmosphäre constituirt denken können, vorausgesetzt dass die anderen wärmeabsorbirenden Gase, hauptsächlich Wasserdampf, entfernt sind, beruht darauf, dass Teile derselben eine (viel) niedrigere Temperatur als die Kugeloberfläche be-

sitzen. Denn wenn die Kohlensäure durchgängig dieselbe Temperatur besässe wie die Kugeloberfläche, so würde die Strahlung nach aussen sich so verhalten, wie wenn die Kugel von einem partiell durchsichtigen Glas von derselben Temperatur umgeben wäre. Von den Spectralgebieten, von welchen dieses Glas etwas von der Strahlung des unterliegenden schwarzen Körpers absorbirte, würde sie genau ebensoviel ausstrahlen. Wenn nun die Kohlensäure der Kugelatmosphäre von der Strahlung der Kugel im ganzen z. B. 20 Proc. absorbirte und gleich viel emittirte, so könnte man sich dieselbe in 20 Schichten zerlegt denken, wovon jede je ein Procent emittirte. Da nun Absorption und Emission einander parallel gehen, so wird die Verteilung und Dicke der Schichten genau dieselbe sein, wie die Verteilung und Dicke von 20 Schichten, welche zusammen 20 Proc. und jede für sich 1 Proc. einer von aussen kommenden Strahlung absorbirten. Es ist also leicht, mit Hülfe der letzten Tabelle für eine senkrecht gegen die Kugeloberfläche ausgehende Strahlung die betreffende Verteilung der Schichten zu berechnen. Nun gehen aber die Strahlen nicht nur senkrecht gegen die Kugeloberfläche, sondern auch in alle anderen Richtungen. Demzufolge wird die durchstrahlte Schicht im Mittel grösser, als wenn die Strahlung nur senkrecht zur Oberfläche hinausginge, und dadurch wächst auch die Absorption der Atmosphäre. Wenn die Absorption proportional der Weglänge wäre, so würde der anzubringende Reductionsfactor gleich 2 sein. Dies trifft für ausserordentlich geringe Kohlensäuremengen zu. Wegen der starken Abweichung von dieser Proportionalität fällt aber dieser Reductionsfactor geringer aus, und zwar habe ich mich durch mechanische Quadratur überzeugt, dass die Wirkung so gross ist, wie wenn die durchstrahlte Schicht 1,70 bis 1,75 mal so dick wäre wie die Schicht, welche bei Strahlung senkrecht zur Kugeloberfläche durchlaufen wird.

Wir können also jetzt die Lage und die Dicke der Schichten in der genannten Atmosphäre berechnen, welche je ein Procent der totalen Strahlung von der Kugel absorbiren und emittiren. Denken wir uns jetzt die Temperatur nicht gleichmässig, sondern etwa wie in der Atmosphäre verteilt, sodass die äusseren Schichten bedeutend niedriger temperirt sind, wie die inneren.

Die Absorption wird dadurch nicht nennenswert verändert, sondern wir können die Schichtenverteilung unverändert behalten ohne merkliche Fehler zu begehen. Dagegen sinkt die Emission ganz enorm und zwar besonders in den äussersten Schichten. Dieses Sinken ist für verschiedene Wellenlängen verschieden und kann nach der Wien'schen Formel, mit der Planck'schen Correction, berechnet werden. Da nun bei dieser Strahlung die Verhältnisse so ähnlich wie möglich mit denjenigen der Erde angenommen werden, so spielt die Strahlung der Kohlensäure von der Wellenlänge 14,5 μ die ganz überwiegende Hauptrolle, sodass diejenige bei 2,6 μ bez. 4,2 μ vernachlässigt werden kann. (Dadurch wird die Abnahme der Strahlung mit sinkender Temperatur etwas geringer angenommen als sie in Wirklichkeit ist.) Um einen Begriff von dieser Abnahme zu geben, mögen folgende relative Werte der Emission (E) eines schwarzen Körpers in Bezug auf die Wellenlänge 14,5 μ angeführt werden:

$T =$	+23,2	−15,4	−54,0	−92,7	−131,4	−170,0	−182,9° C.
$E =$	1,68	1,00	0,50	0,19	0,043	0,0031	0,0001.

Die Strahlung der niedrigst temperirten äussersten Schichten ist so gut wie Null, d. h. sie halten die betreffende Strahlung vollkommen zurück.

Die Strahlung dieser Kugel verhält sich also ungefähr wie diejenige der Sonne. Wenn dieser Himmelskörper keine absorbirende Dunsthülle besässe, so würde er aussehen wie eine gleichmässig leuchtende Scheibe mit einem continuirlichen Spectrum. Anstatt dessen sehen seine Ränder dunkler aus als die Mitte, weil die absorbirende Schicht da dicker ist, und auch die Emission der mittleren Teile ist bedeutend herabgesetzt, wie die Absorptionslinien im Spectrum andeuten. Man schätzt, dass auf diese Weise die halbe Wärmestrahlung der Sonne erspart wird. Ebenso wird der Wärmeverlust der betrachteten schwarzen Kugel vermindert und ihre Temperatur steigt demgemäss, bis wieder Gleichgewicht mit der constanten Wärmezufuhr eintritt. Die dazu nötige Temperaturerhöhung kann leicht mit Hülfe des Stefan-Boltzmann'schen Gesetzes berechnet werden.

Um nun weiter zu kommen, muss man sich eine Vorstellung bilden, wie die Temperatur mit der Höhe abnimmt. Wir wollen da annehmen, dass die Temperaturverteilung eben-

dieselbe ist wie in unserer Atmosphäre. Diese ist bis zu Höhen von etwa 5500 m (einem Druck von 380 mm entsprechend) recht genau bekannt. Für grössere Höhen muss man sie berechnen. Nach Hann nimmt die Temperatur um etwa 0,57°, nach den Tabellen von v. Bezold etwa 0,8° für je 100 m ab. Für grössere Höhen wird diese letztere Zahl unzweifelhaft die richtigere sein und zwar, wie v. Bezold hervorhebt, wahrscheinlicherweise überschritten werden. Indessen unterscheiden sich die Rechnungsresultate nach der einen oder anderen Annahme recht wenig, weshalb ich mit dem Mittelwert gerechnet habe, obgleich der schützende Effect der Kohlensäure dadurch wahrscheinlicherweise etwas unterschätzt wird.

Nun ist weiter zu bemerken, dass die oben gefundenen Absorptionsdaten für Kohlensäure zwischen Steinsalzplatten von 1 cm Dicke gültig sind. Diese Steinsalzplatten besitzen aber, wie Rubens und Trowbridge[1]) gezeigt haben, eine stark ausgeprägte selective Absorption, welche übrigens derjenigen des Wasserdampfes für Wellenlängen von 13 μ ab nicht unähnlich ist. Wegen dieser Wirkung der Steinsalzplatten ist eine Correction einzuführen, wodurch die Absorption der Kohlensäure in den beiden untersuchten Fällen auf 93 bez. 79 Proc. reducirt wird.

Die wärmehaltende Eigenschaft der Kohlensäure wird am leichtesten ersichtlich, wenn man die Temperaturänderung der schwarzen Kugel berechnet, welche erfolgen würde, wenn die Kohlensäure, deren Menge gleich derjenigen in unserer Atmosphäre angenommen wird, aus ihrer Atmosphäre entfernt oder auf das Viertel oder die Hälfte dieses Betrages reducirt bez. auf das Doppelte oder Vierfache vergrössert werden würde. Diese Aenderung ist in folgender Tabelle aufgeführt, und zwar sind zwei Werte eingetragen: einer, der gilt, wenn die oben angeführte Reduction nicht angebracht wird, ein anderer nach erfolgter Reduction. Die Temperatur bei der Menge 1,0 (der jetzigen Kohlensäuremenge in der Atmosphäre entsprechend) wird gleich 15° C. angenommen.

Kohlensäuremenge	0	0,25	0,5	1,0	2,0	4,0
Temperaturänderung (unred.)	−14,5	−6,0	−3,2	0	+4,0	+9,9
„ (red.)	−12,2	−5,0	−2,8	0	+3,3	+7,6

1) H. Rubens u. J. Trowbridge, Wied. Ann. **60.** p. 724. 1897.

Wenn man nun diese Berechnungen auf die irdischen Verhältnisse anwenden will, so tritt eine Complication dadurch ein, dass in unserer Atmosphäre sich ein anderer stark wärmeabsorbirender Stoff, der Wasserdampf, befindet. Wenn nun der Wasserdampf keine gemeinsamen Absorptionslinien mit der Kohlensäure besässe, so würde dadurch nur die Absorption der Kohlensäure in Procenten von der nach der Wasserdampfabsorption übrigen Strahlung vergrössert werden. Der Wasserdampf besitzt nun mehrere starke Absorptionsbänder bei niederer Wellenlänge und ausserdem, nach den Untersuchungen von Rubens und Aschkinass[1]), eine beinahe vollkommene Absorption der Strahlung von Wellenlängen über 16 μ. In dieser letzten Beziehung ähnelt der Wasserdampf sehr dem Steinsalz, welches auch Strahlen von Wellenlängen über 16 μ beinahe vollkommen zurückhält. Es scheint deshalb natürlich, die in der Atmosphäre vorwaltenden Verhältnisse eher nach den oben gegebenen uncorrigirten Ziffern als nach den für die Absorption durch das Steinsalz corrigirten zu beurteilen. Die an anderen Stellen des Wärmespectrums vorkommende Absorption des Wasserdampfes, welche mehrere ausgeprägte Maxima besitzt, dürfte eher weniger von der Kohlensäurestrahlung als von den übrigen Strahlen absorbiren. Zwar fällt das Kohlensäuremaximum bei 2,6 μ in der Nähe des Wassermaximums bei 2,64 und ein Teil der Strahlen von Wellenlängen um 2,6 μ dürfte sowohl durch Kohlensäure, als auch durch Wasserdampf Absorption erleiden. Ebenso absorbirt der Wasserdampf merklich in der Nähe von 14,5 μ. Aber die Coincidenz dürfte bei einer näheren Untersuchung sich mehr als scheinbar wie als wirklich herausstellen, da die Absorptionsbänder nach Langley's Messungen[2]), worüber weiter unten gesprochen wird, nicht continuirlich sind, sondern aus discreten Linien mit schnell nach den Seiten abnehmender Stärke bestehen. Dazu kommt, dass in den höheren Luftschichten, wo der eigentliche wärmeschützende Effect seinen hauptsächlichen Sitz hat, ausserordentlich geringe Wasserdampfmengen vorkommen, sodass nur die allerkräftigsten Absorptionsbänder,

1) H. Rubens u. E. Aschkinass, Wied. Ann. **64.** p. 598. 1898.
2) Vgl. die Zeichnungen von S. P. Langley in Rep. Brit. Ass. **64.** p. 473—474. 1894.

wie dasjenige bei Wellenlängen über 16 μ, eine merkliche Wirkung ausüben. So z. B. dürfte nach v. Bezold's Tabellen die Wasserdampfmenge über 8000 m Höhe nicht so gross sein wie die absorbirende Menge bei den Versuchen von Rubens und Aschkinass.

Die Ab- oder Zufuhr einer bestimmten Kohlensäuremenge zu der übrigens unveränderten jetzigen Erdatmosphäre bringt deshalb wahrscheinlich eher eine grössere als eine geringere Einwirkung auf die Temperatur der Erde mit sich, als die oben stehenden unreducirten Ziffern angeben. Die Erde kann nämlich sehr nahe als ein schwarzer Körper behandelt werden.

Dagegen spielt der Wasserdampf eine andere Rolle, wodurch der Effect der Kohlensäuregehaltsänderung verschärft wird, was ich schon in meiner vorigen Arbeit über dieses Thema hervorgehoben habe. Wenn nämlich zufolge der Kohlensäurezunahme die Temperatur der Erdoberfläche steigt, so wächst dadurch der Wasserdampfgehalt der Luft. Dadurch wird die Absorption in der Atmosphäre vergrössert und der Wärmeschutz effectiver. Da keine Daten jetzt vorliegen, woraus dieser Wärmeschutz berechnet werden kann, so benutze ich das alte Resultat, wozu ich in meiner vorigen Untersuchung, gestützt auf Langley's mangelhafte Daten gelangte. Danach sollte der vom Verdampfen des Wassers hervorgebrachte Zuschuss in dem Effect bei niederem Kohlensäuregehalt etwa ein Drittel, bei hohem ein Sechstel des directen Effectes der Kohlensäure ausmachen. Nach den damals ausgeführten Berechnungen sollte einem Sinken des Kohlensäuregehaltes der Luft auf 0,5 eine Temperaturerniedrigung von 5,3 ° C. entsprechen. Von diesen 5,3 ° entspringt ein Viertel der Wasserdampfabnahme und 4,0 ° der directen Kohlensäurewirkung, während jetzt 3,2 ° berechnet wurden. Ebenso würde nach der alten Berechnung dem dreifachen Kohlensäuregehalt der jetzigen eine Temperatursteigerung von etwa 8,2 ° C. entsprechen, wovon 7 ° auf die directe Kohlensäurewirkung kämen, was dem neuberechneten Wert (7,1 °) sehr wohl entspricht. Die neue Berechnung führt demnach zu Ergebnissen, die mit denjenigen der alten entweder gänzlich übereinstimmen, oder jedenfalls annähernd gleich sind. Da die ganze Berechnung nur darauf

abgesehen ist, einen Annäherungswert für den betreffenden Effect zu geben, so kann man wohl behaupten, dass die neue Berechnung in der Hauptsache zu demselben Ziel führt wie die alte.

Ebenso erscheint es mir immer noch plausibel, die genannte Wirkung des Wasserdampfes ungefähr ebenso gross zu schätzen, wie ich 1896 gethan habe. Da diese Wirkung in Gegenden mit geringer Wasserdampfmenge grösser ausfällt, wie in solchen mit hoher, trägt dieser Effect wesentlich dazu bei, die Temperaturungleichheiten auf der Erde auszugleichen.

In einer neuerdings erschienenen Abhandlung hat Hr. Ångström Resultate erhalten, welche mit den oben angeführten in grellstem Widerspruche stehen.[1] Da die Schlüsse Hrn. Ångström's auf theoretischen Betrachtungen beruhen, die durch die oben angeführten Versuche als unhaltbar erwiesen sind, so will ich kurz auf seine Ansichten eingehen.

Hr. Ångström berechnet die Energieverteilung im Wärmespectrum nach dem inzwischen von Hrn. Planck corrigirten Gesetz von Wien. Dabei scheint er auch nicht die Rückstrahlung des kälteren Körpers in Betracht zu ziehen. Diese Vernachlässigungen, von welchen der letzterwähnte jedenfalls bei einigermaassen genauen Rechnungen wohl recht bedenklich erscheinen könnte, sind in dem vorliegenden Falle ohne nennenswerten Belang. Hr. Ångström nimmt weiter eine Maximalabsorption an, welche er so bestimmt, dass er den Absorptionsbändern der Kohlensäure eine bestimmte Breite erteilt und wohl annimmt, dass die Absorption innerhalb dieses Gebietes vollständig ist. Wie er näher dies ausgeführt hat, darüber giebt er keine Nachricht; nach der in seinem Aufsatze gedruckten Figur scheint er für das Band bei 14,5 μ zwei Breiten anzunehmen, nämlich 3 μ (13—16 μ) und 2 μ (13,5—15,5 μ). Nach dieser Schätzungsweise würde die maximale Absorption der Kohlensäure für eine Strahlung eines 15 gradigen schwarzen Körpers gegen einen schwarzen Körper von -80° 16,7 bez. 10,9 Proc. betragen. Diese Ziffern stimmen, soweit man verlangen kann, mit den von Ångström gegebenen „etwa 10—16 Proc.“ (für die Strahlung eines -77 gradigen Körpers gegen den leeren Raum).

1) K. Ångström, Ann. d. Phys. 3. p. 720. 1900.

Nun zeigen aber die oben angeführten Versuche, dass bei einer Länge der absorbirenden Kohlensäureschicht von 355 ccm die betreffende Absorption 26,8 Proc. erreicht. Und der Gang der Ziffern in der Nähe dieses Punktes ist so regelmässig, dass man sicher voraussehen kann, dass die Absorption bei steigender Länge der absorbirenden Schicht weit über 30 Proc. gehen wird. Um nun aber sicher die Fehler der Extrapolation zu vermeiden, bleiben wir bei den beobachteten 26,8 Proc. Corrigirt man nun wegen der Absorption des Steinsalzes, so erhält man einen 0,79 mal so grossen Wert, d. h. 21 Proc. Dieser Wert liegt nun bedeutend höher (4,3 Proc.) als der nach Hrn. Ångström's Methode berechnete Maximalwert, der erst bei unendlich grosser Dicke der absorbirenden Schicht (nach Hrn. Ångström) erreicht werden sollte.

Da eine so grosse Differenz nicht gern Versuchsfehlern zugeschrieben werden kann, erübrigt nur ein Schluss, dass die Berechnungsweise des Hrn. Ångström auf unrichtigen Principien begründet ist. Dies ist auch von vornherein wahrscheinlich. Bei stetig zunehmender Schichtendicke nimmt die Absorption stetig zu und nähert sich allmählich dem Wert 100 Proc. Darauf deuten alle unsere bisherigen Kenntnisse. So z. B. zeichnet sich ja die Natriumflamme durch zwei feine charakteristische Linien aus, die jedenfalls viel schärfer sind als die Kohlensäurebänder. Bei zunehmendem Natriumgehalt der Flamme steigt die Emission immer mehr und zwar anfangs proportional der Natriumsalzmenge, später innerhalb eines sehr grossen Intervalls proportional der Quadratwurzel daraus. Ein niedriger Grenzwert der Emission, welche den beiden scharfen Natriumlinien entsprechen würde, ist gar nicht aufzufinden. Allmählich erscheint dagegen ein schwacher Hintergrund des Spectrums von continuirlichem Licht, der mit steigendem Salzgehalt an Stärke zunimmt.[1]) Es muss also die Natriumflamme in genügend dicker Schicht sich sehr nahe wie ein schwarzer Körper verhalten. Wasserstoff giebt schon in ziemlich dünner Schicht ein continuirliches Spectrum.

Ebenso verhält sich die Absorption der Gase. Jodgas oder Stickstoffsuperoxyd geben in dünner Schicht sehr scharfe

1) Gouy, Ann. d. chim. et de phys. (5) 18. p. 23. 1879.

Spectrallinien, in mässig dicker Schicht erscheinen sie ganz undurchsichtig. Noch auffallender ist das Verhalten des Wassers. In dünner Schicht ist flüssiges Wasser für sichtbare Strahlen vollkommen durchsichtig. Eine genügend dicke Schicht — man schätzt sie auf etwa 500 m — vermag aber Sonnenlicht vollkommen auszulöschen. Ebenso verhält sich aller Wahrscheinlichkeit nach die Kohlensäure, wenn die durchstrahlte Schicht dick genug wird, sie möge gasförmig oder flüssig sein.

Es ist demnach zu erwarten, dass, bei zunehmender Dicke der absorbirenden Kohlensäureschicht, immer neue Absorptionsstreifen auftreten, die bei dünner Schicht zu schwach ausgeprägt sind, um sich bemerkbar zu machen. In dieser Hinsicht sind die Zeichnungen von Langley[1]) über die atmosphärischen Absorptionsbänder sehr instructiv. Die erste dieser Zeichnungen endet rechts am Bande, wo sowohl Wasserdampf als auch Kohlensäure eine starke Absorption besitzt. Obgleich dieses Band einer durchstrahlten Schicht von mehr als 250 cm Kohlensäure und einer Wasserdampfmenge von gleicher Grössenordnung entspricht, besteht es aus mehreren discreten Linien und nicht aus einem breiten dunklen Band, wie man nach Hrn. Ångström's Schlussweise vermuten sollte. Bei immer mehr zunehmender Dicke werden sich diese Linien offenbar verbreitern und auch neue Streifen an ihren Seiten zum Vorschein kommen. Dieser letzte Umstand wird durch die abnehmende Stärke der Linien zur Seite des Bandes angedeutet. Durch diese beiden Umstände steigt die Absorption immer weiter mit zunehmender Dicke der absorbirenden Schicht. Zwar geschieht diese Zunahme sehr langsam, nach den oben angeführten Daten nahezu wie die vierte Wurzel aus der Schichtdicke, wenn diese 100 cm übersteigt; später geht die Zunahme noch langsamer vor sich.

Nachdem Hr. Ångström von den oben angedeuteten Prämissen ausgegangen ist, werden die späteren Schlüsse denselben entsprechend. Er erwähnt, dass Hr. Cand. J. Koch im physikalischen Institut von Hrn. Ångström gefunden hat, dass eine „Kohlensäureschicht von 30 cm Länge und 780 mm Druck ca. 10 Proc. von der Strahlung eines schwarzen Körpers von

1) S. P. Langley, Rep. Brit. Ass. 64. p. 473—474. 1894.

100° absorbirt, und dass, wenn der Druck auf $^2/_3$ reducirt wird, die Absorption sich nur unbedeutend — höchstens mit 0,4 Proc. der Gesamtstrahlung — ändert". Die Daten von Tyndall und die obenstehende Berechnung verlangen anstatt „ca. 10 Proc." etwa 8,6, was, da die Versuchsbedingungen von Hrn. Koch noch unbekannt sind, als eine genügende Uebereinstimmung angesehen werden möge. Dagegen verlangen die Daten von Tyndall bei Abnahme des Druckes auf $^2/_3$ eine Abnahme der Absorption von etwa 1,6 Proc. (die Absorptionsformel verlangt etwa 1,2 Proc.), was nicht ohne weiteres mit Hrn. Koch's Befund als übereinstimmend angesehen werden kann. Vermutlich wird sich Hr. Koch bemühen, in seiner in Aussicht gestellten Abhandlung diese Discrepanz aufzuklären. Hr. Ångström bemerkt zu den Daten von Hrn. Koch: „Eine Schicht von 30 cm Länge hat also die Absorption der Strahlung einer Wärmequelle von 100° beinahe vollständig bewirkt. Aus diesen Untersuchungen" (von Hrn. Koch?) „und Berechnungen" (von Hrn. Ångström?) „geht klar hervor, erstens dass höchstens ca. 16 Proc. von der Erdstrahlung durch die atmosphärische Kohlensäure absorbirt werden, und zweitens dass die Gesamtabsorption sehr wenig von den Veränderungen in dem atmosphärischen Kohlensäuregehalt abhängig ist, solange nämlich dieser nicht kleiner als 0,2 Proc. der jetzt vorhandenen ist." In diese Worte hat Hr. Ångström seine Ansichten betreffs der Absorption der Kohlensäure zusammengefasst.

Es verdient vielleicht noch erwähnt zu werden, dass, wenn die Erdatmosphäre nach Hrn. Ångström's Schätzung 10—16 Proc. der Erdstrahlung absorbirte, sie die Erdtemperatur um etwa 7,4—12,3° erhöhen könnte. Da nun die Eiszeit eine um 4,5° niedrigere Temperatur als die jetzige besass, so könnte man wohl erwarten, dass auch Hr. Ångström in dem partiellen Verschwinden der Kohlensäure aus der Atmosphäre eine mögliche Ursache der Eiszeit erblicken würde. Dem scheint aber nicht so zu sein.

Die Stellung Hrn. Ångström's zu dieser Frage ist um so bemerkenswerter, als er früher die Wirkung der Kohlensäure stark überschätzte, indem er der Ansicht war, dass die atmosphärische Kohlensäure etwa 60 Proc. der Sonnenstrahlung absorbirt. Aus seinen neuen Beobachtungen hat er aber er-

fahren, dass ein Zusatz von Kohlensäure zu einer Menge, die in dem oben verwendeten Maasstabe einen *l*-Wert von etwa 125 cm besitzt, keinen merklichen Einfluss (1,5 Proc.) auf die Sonnenstrahlung ausübt. Dieses Resultat steht dagegen in bester Uebereinstimmung mit den bei der oben ausgeführten Rechnung gemachten Annahmen.[1] Jetzt ist Hr. Ångström zu dem entgegengesetzten Extrem gelangt, hat aber dabei das richtige Verhalten nicht getroffen. Bemerkenswert scheint auch, dass Hr. Ångström für Wasserdampf eine mit der Menge continuirlich steigende Absorption findet, obgleich die durchstrahlte Schicht einem *l*-Wert von etwa 10 000 cm entspricht (also die *l*-Werte der Kohlensäure, mit welchen oben gerechnet wurde, um das 10 fache übertreffen). Warum die Kohlensäure sich so ganz anders als Wasserdampf verhalten sollte, könnte wohl einer Aufklärung bedürfen.

Betreffs der secundären Einflüsse, welche die Kohlensäurewirkung begleiten, verweise ich auf die ausführliche Abhandlung. Nur soviel will ich hier erwähnen, dass wenn die Kohlensäure nicht in den höchsten Schichten eine merkliche Absorption ausübte, so würde der Temperaturfall daselbst nach dem Gesetz für die adiabatische Ausdehnung erfolgen, wie v. Bezold so deutlich in folgenden Worten hervorhebt: „In den grössten Höhen, wo Absorption und Emission verschwinden und beinahe kein Wasserdampf mehr vorhanden ist, bildet adiabatisches Aufsteigen und Niedersinken trockener Luft die einzige Ursache der Temperaturenänderung mit der Höhe.“[2] Nun ist nach den von ihm angeführten Ziffern diese Grenze auch in 10 000 m Höhe bei weitem nicht erreicht, sondern der Temperaturfall ist nur 0,81 mal so gross, wie man nach Hrn. v. Bezold's Aeusserung vermuten sollte. Dieses Plus in der Lufttemperatur rührt ohne Zweifel von der Absorption der Sonnen- und Erdstrahlung durch die Kohlensäure her. Wenn nun noch mehr Kohlensäure in der Luft vorhanden wäre, so würde der Temperaturfall noch mehr von den adiabatischen Verhältnissen abweichen. Wie gross diese Aenderung sein kann, hängt von der Lebhaftigkeit der auf- und niedersteigenden Luftströme ab,

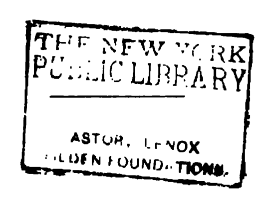
1) Vgl. die ausführliche Abhandlung und Bihang. d. Stockh. Akad. 22. p. 29. 1896.

2) W. v. Bezold, l. c. p. 18.

welche den adiabatischen Zustand hervorzubringen streben, verglichen mit der Strahlung der Kohlensäure, welche einen geringeren Temperaturfall begünstigt. Durch die stärkere Erwärmung der Luft am Tag und Abkühlung in der Nacht, welche als Folge der erhöhten Absorption eintreten würde, würden wiederum die Luftbewegungen, welche zum Herstellen des adiabatischen Zustandes streben, verstärkt werden. Es ist offenbar sehr schwer, diesen complicirten Einfluss zu schätzen. Wahrscheinlicherweise wird die betreffende Aenderung recht gering sein. Ausserdem bewirkt eine recht bedeutende Aenderung im Temperaturfall (sobald dieser nur die Hälfte des adiabatischen Temperaturfalles überschreitet) einen relativ sehr geringen Einfluss auf den schützenden Effect der Kohlensäure, weshalb ich die Rechnungen so ausgeführt habe, als ob der Temperaturfall constant so verbliebe wie er jetzt ist.

Dagegen würden die verstärkten Luftströmungen dazu beitragen, die Temperaturunterschiede zwischen den polaren und den äquatorialen Gegenden der Erde auszugleichen, wozu im allgemeinen eine Erhöhung der atmosphärischen Absorption hinführt.

(Eingegangen 19. Januar 1901.)



4. *Ueber die Oberflächenspannung mit Oel bedeckter Wasseroberflächen und die Wirkungsweite der Molecularkräfte;* *von Rudolf H. Weber.*

Wenn man auf eine Wasseroberfläche einen Tropfen Olivenöl aufsetzt, so sieht man, dass sich die ganze Oberfläche mit einer Art Haut überzieht. Es bleibt aber ein scharf begrenzter Oeltropfen zurück, der seine Dimensionen sehr stark ändert, wenn man durch Vergrössern oder Verkleinern der durch die Oelschicht anomal gemachten Oberfläche deren Oberflächenspannung ändert. Mit der Grössenänderung des Tropfens ist natürlich eine Aenderung des Randwinkels verbunden, und zwar zeigt es sich, dass diese Aenderung beträchtlich ist bei verhältnismässig kleinen Aenderungen der Oberflächenspannung. Wenn es also gelingt, den Randwinkel hinreichend genau zu messen, so muss sich daraus eine empfindliche Methode ableiten, die Abhängigkeit der Oberflächenspannung einer anomalen Oberfläche von deren Grösse zu bestimmen. Ich habe auf Anregung von Hrn. Geh. Rat Quincke einige Versuche angestellt, um diesen Zweck zu erreichen, wobei ich zunächst annahm, dass bei dem Tropfen die Grenzflächenspannung Wasser gegen Oel constant bliebe.

Um eine Wasseroberfläche von veränderlicher Grösse zu erhalten, wurde der von Frl. Pockels[1]) angegebene Trog verwandt. Derselbe bestand aus einem parallelepipedischen Blechkasten von 70 cm Länge, 5 cm Breite und 3 cm Tiefe. Ist dieser Trog mit Wasser bis zum Rande gefüllt, so ermöglicht es ein Messingstreifen von etwa 8 cm Länge die Oberfläche von der einen Schmalseite an durch Verschieben desselben beliebig zu vergrössern, und damit eine Oelhaut auf ihr auszudehnen. Um das Wasser zwecks Herstellung einer

1) A. Pockels, Nature **43.** p. 437. 1891.

frischen Oberfläche über die Wände des Troges überfliessen lassen zu können, war derselbe etwas erhöht in einen zweiten niederen und breiteren Trog aus Zinkblech gestellt, der an einem Ende einen Ausfluss zum Ansetzen eines Gummischlauches besass (vgl. Fig. 1).

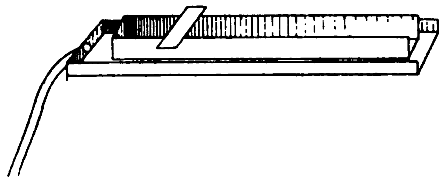


Fig. 1.

Das verwandte Oel war Olivenöl, das mit Alkohol wiederholt ausgeschüttelt war, um Oelsäure zu entfernen.[1] Bei dieser Gelegenheit möchte ich bemerken, dass es mir nicht gelungen ist, selbst nach oft wiederholtem Ausschütteln ein Oel zu erhalten, das sich auf Wasser gar nicht mehr ausbreitet.

Bestimmung des Randwinkels.

Das von einem Schnittbrenner ausgehende Licht traf das Randelement des Oeltropfens und wurde von hier gegen einen um eine horizontale Axe drehbaren Spiegel *S* reflectirt (vgl. Fig. 2). An der Drehaxe befand sich ein Zeiger, der auf einer Kreisteilung die Einstellung des Spiegels ablesen liess. Zunächst wurde der

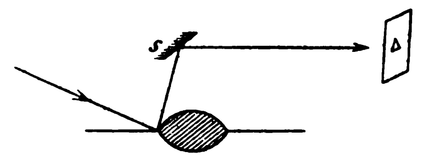


Fig. 2.

Spiegel so orientirt, dass er parallel der Wasseroberfläche stand Das geschah durch Einstellen der Spiegelbilder der Pupille im Spiegel auf das Spiegelbild der Pupille im der Wasseroberfläche. Diese Stellung des Spiegels zählte als Nullstellung. Hierauf wurde der Spiegel um 90° gedreht, sodass er von der Lichtquelle abgewandt war. Jetzt wurde ein Diopter so gestellt, dass sein Spiegelbild in die Verlängerung der Einfalls-

1) A. Pockels, Wied. Ann. 67. p. 672. 1899.

lote zu liegen kommt. Ist dies erreicht, so sind bei beliebiger Stellung des Spiegels — einen kleinen Spiegel vorausgesetzt — nur solche Strahlen durch das Diopter sichtbar, die senkrecht auf dasselbe zulaufen.

Die Messung des Randwinkels beruht darauf, das man den Spiegel so lange dreht, bis das Spiegelbild der Flamme im Oeltropfen eben verschwindet. Das letzte sichtbare Spiegelbild ist das des Randelementes.

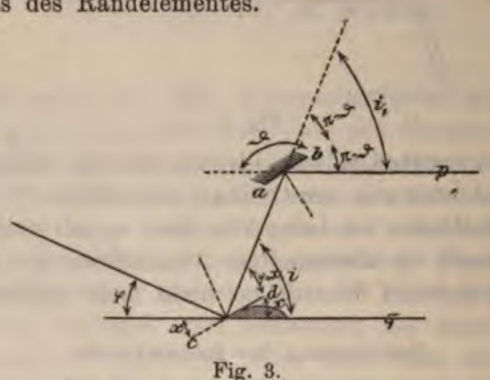


Fig. 3.

Es bedeute (Fig. 3) ab die Spiegelfläche, cd die Fläche des Randelementes, x den Randwinkel, also den spitzen Winkel, den das Randelement mit der Horizontalebene bildet, ϑ den Einstellungswinkel, φ den Winkel, den der in das Randelement einfallende Strahl mit der Wasseroberfläche bildet.

Es ist dann wegen der Parallelität von p und q: $\sphericalangle i = \sphericalangle i_1$, also:

$$(\varphi + x) + x = 2(\pi - \vartheta),$$

$$x = \pi - \vartheta - \frac{\varphi}{2}.$$

Der Winkel φ wird dadurch bestimmt, dass das von der Lichtquelle direct in den Spiegel fallende Licht durch das Diopter tritt. Es ergab sich so:

$$\frac{\varphi}{2} = 17,1^{\circ}.$$

Da die Lichtquelle nicht in unendlicher Entfernung lag, so musste wegen des Abstandes des Spiegels von der Wasseroberfläche hieran noch eine Correction angebracht werden, die sich leicht aus dem Abstand der Lichtquelle vom Oeltropfen

und dem des Spiegels von der Wasseroberfläche berechnet. Sie betrug $+0{,}4^0$, sodass in der Rechnung

$$\frac{\varphi}{2} = 17{,}5^0$$

zu setzen ist.

Es muss bemerkt werden, dass diese Messungen nur dann den Randwinkel ergeben, wenn die Wasseroberfläche um den Oeltropfen herum nicht deformirt ist. Von vornherein ist das nicht anzunehmen. Doch ergaben Beobachtungen mittels Spiegelung sowohl als mittels Brechung, dass bei einigermaassen kleinen Randwinkeln nicht einmal qualitativ eine Deformation nachzuweisen war.

Berechnung der Oberflächenspannung.

Es sei α_1 die Oberflächenspannung der anomalen Wasseroberfläche, α_{12} die Grenzflächenspannung Oel gegen Wasser, α_2 die Capillarconstante des Olivenöls (vgl. auch Fig. 4), dann ist:

$$\alpha_{12}^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - 2\,\alpha_1\,\alpha_2 \cos x,$$

oder

$$\alpha_1 = \alpha_2 \cos x + \sqrt{\alpha_{12}^2 - \alpha_2^2 \sin^2 x}.$$

Fig. 4.

Die Constante α_{12} hatte ich nach der Methode der flachen Tropfen von Quincke[1]) bestimmt, und zwar in der Weise, dass eine Oelblase in einem Trog mit Wasser unter eine horizontale Glasplatte gebracht wurde. Die Theorie ergiebt nur dann richtige Werte, wenn die Kuppe der Oelblase als horizontal anzusehen ist, und die Horizontaldimensionen gross gegenüber den Verticaldimensionen sind. Das ist nun bei einem solchen Oeltropfen kaum zu erreichen, sodass der gefundene Wert

$$\alpha_{12} = 2{,}63\,\frac{\text{mg}}{\text{mm}}$$

1) G. Quincke, Pogg. Ann. **139.** p. 5. 1870.

als zu gross anzusehen ist. Die Constante α_2 habe ich mittels capillarer Steighöhe zu

$$\alpha_2 = 3,386 \frac{\text{mg}}{\text{mm}}$$

ermittelt.

Der bequemeren Rechnung willen wurden die Werte α_1 für diese Werte α_{12} und α_2 und für die Winkel 0, 5, 10 bis 25° berechnet und auf Curvenpapier aufgetragen. Man konnte so zu jedem Werte x den zugehörigen Wert α_1 direct ablesen.

Die Beobachtungen.

Der Oeltropfen wurde mittels eines dünnen Glasstabes auf die Oberfläche des Wassers aufgesetzt, und zwar an einer Stelle derselben, wo vom Boden der Wanne aus ein dünner Platindraht bis an die Oberfläche reichte. Dieser Draht diente dazu, den Oeltropfen an seiner Stelle festzuhalten. Seine Länge war so gewählt, dass er bis in den Oeltropfen hinein, nicht aber aus ihm herausragte. Er verursachte also keine Deformation der freien Oberfläche des Oeltropfens. In der folgenden Tabelle sind drei Versuchsreihen mit den zugehörigen Randwinkeln zusammengestellt.

	I.		II.		III.	
l	$\sphericalangle x$	α_1	$\sphericalangle x$	α_1	$\sphericalangle x$	α_1
2,5 cm	20,5°	5,540 $\frac{\text{mg}}{\text{mm}}$	18,5°	5,631 $\frac{\text{mg}}{\text{mm}}$	26,5°	5,152 $\frac{\text{mg}}{\text{mm}}$
5	13,5	5,800	12,0	5,848	19,8	5,563
10	9,7	5,906	8,0	5,940	13,5	5,805
20	7,3	5,953	5,5	5,976	8,5	5,925
10	9,9	5,900	7,5	5,948	13,4	5,810
5	14,5	5,773	11,5	5,862	19,3	5,588
2,5	20,4	5,542	17,5	5,682	26,5	5,152

l bedeutet die Länge der Wasseroberfläche im Trog in Centimetern. $5\,l$ ist also die Oberfläche in Quadratcentimetern. Die drei Versuchsreihen sind mit demselben Oeltropfen hergestellt, die zweite um eine Viertelstunde später als die erste. Bei der dritten war durch wiederholtes Zusammenschieben der Oelhaut die Oberfläche künstlich verunreinigt.

Wie man sieht, wurde die Oberfläche zwischen zwei Winkelmessungen aufs doppelte vergrössert und dann wieder in der

gleichen Weise bis zum Anfangswert verkleinert. Der Hin- und Rückweg ergab nahezu die gleichen Werte. Aus den Tab. I und II, sowie später aus IV, V, VI scheint zu folgen, dass die Oberfläche mit der Zeit reiner wird. Das ist aber nur richtig, wenn man die Grenzflächenspannung α_{12} als unabhängig von der Grösse der Grenzfläche Oel-Wasser betrachten darf. Eine Wiederholung des Versuches ergab folgende Tabelle.

	IV.		V.		VI.	
l	$\sphericalangle x$	α_1	$\sphericalangle x$	α_1	$\sphericalangle x$	α_1
2,5 cm	14,0°	5,788 $\frac{mg}{mm}$	12,3°	5,840 $\frac{mg}{mm}$	11,5°	5,865 $\frac{mg}{mm}$
5	9,0	5,915	7,6	5,942	7,6	5,942
10	4,6	5,988	4,5	5,990	4,5	5,990
20	2,3	6,010	2,4	6,008	2,4	6,008
10	4,3	5,991	3,5	6,000	3,5	6,000
5	7,6	5,942	7,1	5,958	6,6	5,962
2,5	13,3	5,816	11,7	5,862	11,5	5,865

Diese drei Versuchsreihen sind wieder mit ein und demselben Tropfen je um eine Viertelstunde später ausgeführt. Der Hin- und Rückgang ist wieder annähernd der gleiche. Man kann daraus schliessen, dass in der kurzen Zeit, die die Beobachtungen einer Verticalcolumne beanspruchen, keine weitere Ausbreitung erfolgt. Das ist nicht mehr der Fall bei den folgenden Versuchsreihen. Zunächst wurde in umgekehrter Reihenfolge vorgegangen, indem der Oeltropfen auf eine Oberfläche von 20 cm Länge aufgesetzt und dieselbe dann verkleinert wurde. Die Resultate sind die folgenden:

VII.

l	$\sphericalangle x$	α_1
20 cm	10,5°	5,884 $\frac{mg}{mm}$
10	14,2	5,784
5	18,6	5,628
2,5	23,5	5,372
5	15,5	5,740
10	10,3	5,888
20	5,5	5,977

Um über ein grösseres Gebiet hin den Verlauf der Capillarconstanten zu erhalten, wurde noch ein Versuch gemacht, bei dem mit 1,25 cm Oberfläche begonnen und die Vergrösserung derselben bis 60 cm ausgedehnt wurde. Es zeigte sich auch hier, dass bei der Verkleinerung die Werte von α_1 für gleiche Wasseroberfläche grösser waren, als bei der Vergrösserung.

VIII.

l	$\sphericalangle x$	α_1	l	$\sphericalangle x$	α_1
1,25 cm	23,5°	5,373 $\frac{mg}{mm}$	60 cm	2,5°	6,010 $\frac{mg}{mm}$
2,5	16,5	5,706	50	2,3	6,010
5	9,5	5,906	40	2,3	6,010
10	6,1	5,968	30	2,3	6,010
20	4,5	5,990	20	2,3	6,010
30	3,5	6,000	10	3,0	6,006
40	3,3	6,002	5	5,5	5,976
50	2,6	6,010	2,5	8,5	5,925
60	2,5	6,010	1,25	13,5	5,807

Vergleiche mit der Cohäsionswaage.

Es ist bisher angenommen, dass die Grenzflächenspannung α_{12} constant bleibt. Schon die zeitliche Zunahme von α_1 bei gleicher Wasseroberfläche in den Tab. I, II und III, IV, V spricht aber gegen diese Annahme. Es wurden deshalb Parallelversuche mit der Cohäsionswaage gemacht, die dann umgekehrt α_{12} aus α_1, α_2 und dem Randwinkel berechnen liessen. Als Waage diente eine Mohr'sche Waage, an deren einem Arm ein am unteren Rande platinirtes Platinblech[1]) von nebenstehender Gestalt (Fig. 5) befestigt war. Die Länge der unteren Kante betrug 26,0 mm. Ist P mg das Abreissgewicht, so ist demnach

Fig. 5.

$$\alpha_1 = \frac{P}{52} \frac{mg}{mm}.$$

1) F. Nansen, On Hydrometers and the surface tension of liquids. The Norwegian North Polar Expedition 1893—1896. Scientific results. **10.** p. 61. 1900.

Um die Bestimmung möglichst schnell durchführen zu können, wurde nicht das einer bestimmten Oberflächengrösse zukommende Abreissgewicht, sondern die einem bestimmten Abreissgewicht entsprechende Oberflächengrösse bestimmt. Es wurde also ein passend gewähltes Gewicht auf den zweiten Arm der Waage aufgesetzt, die Oberfläche so weit ausgedehnt, dass sie das Platinblech eben trug, und nun verkleinert, bis es abriss. Die Waage befand sich in der Höhe, dass das Abreissen bei der Nullstellung der Zunge erfolgte.

Es ergaben sich folgende Versuchsreihen:

IX.

l	$\sphericalangle x$	G	α_1 ber.	α_1 beob.	α_{12}
8 cm	11,5°	5,00	5,86 $\frac{mg}{mm}$	4,80 $\frac{mg}{mm}$	1,628 $\frac{mg}{mm}$
10	8,0	5,10	5,94	4,90	1,616
12	6,0	5,30	5,97	5,09	1,755
16	3,25	5,50	6,00	5,28	1,889

X.

l	$\sphericalangle x$	G	α_1 ber.	α_1 beob.	α_{12}
4,0 cm	12,0°	5,30	5,845 $\frac{mg}{mm}$	5,10 $\frac{mg}{mm}$	1,912 $\frac{mg}{mm}$
6,0	8,0	5,50	5,935	5,29	2,003
9,5	5,05	5,70	5,982	5,48	2,139
17,8	4,0	5,90	5,993	5,67	2,290

XI.

l	$\sphericalangle x$	G	α_1 beob.	α_{12}
8,5 cm	10,0°	5,40	5,19 $\frac{mg}{mm}$	1,946 $\frac{mg}{mm}$
9,7	9,5	5,50	5,28	2,020
11,5	8,2	5,60	5,38	2,089
13,5	7,2	5,70	5,47	2,158
16,4	6,0	5,80	5,57	2,237
23,0	5,5	5,90	5,67	2,329
17,2	6,0	5,80	5,57	2,237
12,4	7,5	5,60	5,38	2,071
10,5	9,0	5,50	5,28	2,010
9,0	10,7	5,40	5,19	1,965

Den Gewichten der Mohr'schen Waage liegt 0,5 g als Einheit zu Grunde. Die Columne G enthält die Gewichte in dieser Einheit. Es ist also

$$P = \frac{G}{2}.$$

Die vierte Columne enthält die Werte von α_1, berechnet aus x und dem Werte

$$\alpha_{12} = 2{,}63 \, \frac{\text{mg}}{\text{mm}},$$

die fünfte die aus G beobachteten Werte α_1, und die letzte die Werte α_{12}, die sich aus der Formel:

$$\alpha_{12}^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - 2\,\alpha_1\,\alpha_2 \cos x$$

ergeben.

Der nach der früheren Methode gefundene Wert von α_{12} war, wie man sieht, wesentlich zu gross. Ferner ist in der That α_{12} ebenfalls veränderlich. Durch Hydrolyse des Oels oder ähnliche Wirkung bildet sich demnach auf der Grenzfläche von Oel und Wasser eine Schicht einer fremden Flüssigkeit aus, die bei der Vergrösserung der Grenzfläche ihre Dicke ändert. Der Grössenordnung nach stimmen diese Werte von α_{12} übrigens mit dem von Quincke[1]) ermittelten — 2,09 mg/mm — überein.

Die mit Oel bedeckte Wasseroberfläche zeigt ein inhomogenes Aussehen. Sie ist mit allerlei Zeichnungen und Trübungen bedeckt. Bringt man aber nur sehr geringe Mengen Oel auf das Wasser, so bleibt die Oberfläche vollkommen klar, während die Capillarconstante wesentlich herabgesetzt wird.

Um einen Anhalt über die Dicke einer solchen Oelschicht zu erhalten, wurde ein dünner Platindraht, der mit Oel benetzt war, auf einer empfindlichen Waage mit Spiegelablesung gewogen, etwa 5 mm tief in die frisch hergestellte Wasseroberfläche getaucht und nach dem Verdunsten des Wassers wieder gewogen. Es ergab sich die Oelmenge

0,057 mg.

---

1) G. Quincke, Pogg. Ann. **130**. p. 19. 1870.

Die Wasseroberfläche hatte die Grösse von 100 cm², sodass sich pro cm² die Oelmenge

$$\sigma = 570 . 10^{-6} \text{ mg}$$

ergiebt. Aus dem specifischen Gewicht des Oels 0,915 findet man somit die Dicke

$$d = 6,23 . 10^{-6} \text{ mm.}$$

XII.

l	$d . 10^6$	$\sigma\, 10^6$	α_1
10 cm	12,46 mm	1140 $\frac{\text{mg}}{\text{cm}^2}$	5,82 $\frac{\text{mg}}{\text{mm}}$
15	8,31	760	5,87
20	6,23	570	5,92
30	4,16	385	6,01
40	3,11	285	6,04

Diese Tabelle enthält die Dicken d und die Oelmengen pro cm² σ, die sich beim Vergrössern und Verkleinern der Oberfläche ergaben, und in der letzten Columne die zugehörigen Werte der Capillarconstanten, bestimmt mit der Cohäsionswaage. Beim Verkleinern der Oberfläche unter 20 cm traten Trübungen auf (vgl. später die Bestimmung des Molecularwirkungsradius). Wie aus den Werten α_1 folgt, bilden die bei den früheren Versuchen sich ausbreitenden Oelmengen weit dickere Schichten, als hier.

Eine Wiederholung der Versuche gab eine Abweichung in den zu einem bestimmten Werte von d gehörigen Werten von α_1. Diese Abweichung mag damit zusammenhängen, dass sich α_1 bei constanter Wasseroberfläche und kleinen Oelmengen zeitlich verändert, und es nicht möglich ist, sofort nach Aufbringen des Oels die Messungen anzustellen. Die Werte der zweiten Beobachtung sind:

l	$d . 10^6$	$\sigma . 10^6$	α_1
18,0 cm	4,01 mm	367 $\frac{\text{mg}}{\text{mm}}$	5,96 $\frac{\text{mg}}{\text{mm}}$
11,5	6,35	580	5,81

Der Minimalwert von d.

Wenn uns die auf die genannte Weise berechneten Werte d wirklich die Dicke einer homogenen Schicht angeben, so haben wir es hier jedenfalls mit Schichtdicken zu thun, die weit unter dem doppelten Radius der Molecularwirkungssphäre, der der Grössenordnung nach etwa bei 100 $\mu\mu$ zu suchen ist[1]), liegen. Für eine Schicht dieser Dicke müsste sich ergeben

$$\alpha_1 = \alpha_{12} + \alpha_2 ,$$

also etwa 5,4 mg/mm. Es ist dies der kleinste Wert, den wir erwarten dürfen. Ich habe nun auf folgende Weise die Schichtdicke zu vergrössern gesucht. Etwa 10 cm von der einen Querseite der Wanne entfernt wurde eine Brücke aufgesetzt, bei 20 cm eine zweite. Vor die erste Brücke und zwischen die erste und zweite wurde eine gewisse Oelmenge aufgebracht. Dann wurde die erste Brücke entfernt, die zweite bis an ihre Stelle herangeschoben und die erste an die Stelle der zweiten gelegt. Hierauf wird wieder zwischen beiden Brücken eine Oelschicht erzeugt, und so fort in der gleichen Weise verfahren. Der kleinste Wert von α_1, den ich auf diese Weise noch sicher constatiren konnte, betrug

$$3{,}4 \frac{\text{mm}}{\text{mg}} .$$

Es werden von hier an die Versuche unsicher, da das Platinblech, auch jedesmal frisch ausgeglüht, sehr rasch seine Benetzbarkeit infolge der grossen Oelmenge verliert. Es ist jedoch sehr wohl möglich, dass dieser Wert von α_1 noch nicht den Grenzwert bildet. Das Resultat, dass wir bis zu Werten, die weit kleiner als $\alpha_1 + \alpha_{12}$ sind, gelangen können, beweist wieder, dass wir es nicht mit einer normalen Oelschicht auf Wasser zu thun haben, sondern mit der Schicht einer durch das Wasser veränderten Flüssigkeit.

Der kleinste Wert der Oberflächenspannung α_1 der verunreinigten Oberfläche, der überhaupt auftritt, müsste jeden-

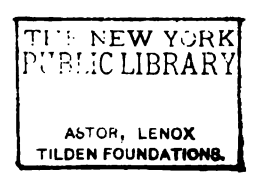
---

1) G. Quincke, Pogg. Ann. **137**. p. 413. 1869.

falls dann erreicht sein, wenn die Dicke der ausgebreiteten Schicht — gleichgültig aus welcher Substanz dieselbe besteht — gleich dem Durchmesser der Molecularwirkungssphäre ist. Wenn wir aus den ersten und letzten Werten für die Dicke d und für α_1 der Tab. XII den zu 3,4 mg/mm gehörigen Wert von d linear extrapoliren, also wenn wir die Gleichung

$$d = a\,\alpha_1 + b$$

zu Grunde legen, so ergiebt sich für



$$\alpha_1 = 3{,}4$$

und ist

$$d = 2\,l = 115 \text{ mm},$$

wenn l den Radius der Wirkungssphäre bedeutet. Dieser Wert stimmt mit den Messungen von Quincke nahezu überein, der $2\,l = 100\,\mu\mu$ gefunden hat. Die Uebereinstimmung wird noch besser, wenn man bedenkt, dass bei der Berechnung der Dicke die Oelschicht als gleich dick an allen Stellen angenommen ist, während man bei passender Beleuchtung bei nicht zu dünnen Schichten (vgl. p. 715) runde Oellinsen von grösserer Dicke als die Umgebung erkennen kann. Die wirkende Oelschicht war demnach in Wirklichkeit kleiner als 115 $\mu\mu$.

Uebrigens ist die Extrapolation in der angegebenen Weise nur sehr angenähert zulässig, und die durch das Wasser bewirkte Aenderung der dünnen Oelhaut kann auch die Messungen beeinflusst haben.

Einen Minimalwert der Oberflächenspannung für geringe Dicken (etwa 10 oder 17 $\mu\mu$) der Oelhaut, wie er nach den Untersuchungen von Reinold und Rücker[1]) und Sir W. Thomson[2]) zu erwarten wäre, habe ich nicht gefunden.

Paraffinöl auf Wasser.

Um ausser Olivenöl noch eine andere Flüssigkeit zu untersuchen, verwandte ich Paraffinöl. Dieses zeigt ein ganz anderes Verhalten, wenn man es auf Wasser bringt. Es bleibt auch

1) A. W. Reinold und A. W. Rücker, Wied. Ann. 44. p.
2) W. Thomson, Popular lectures 1. p. 9. 1886.

hier ein scharf begrenzter Tropfen liegen. Die Capillarconstante des Wassers aber wird nur ausserordentlich wenig herabgesetzt. Eine frische Wasseroberfläche zeigte immer die Constante

$$\alpha_1 = 7,37 \frac{\text{mg}}{\text{mm}}\,^{1)}$$

und dieser Wert hielt sich lange constant. Bringt man nun einen Tropfen Paraffinöl darauf, so ändert sich die Constante zeitlich entsprechend folgender Tabelle.

t	α_1
0 Min.	7,37 $\frac{\text{mg}}{\text{mm}}$
2	7,36
7	7,35
12	7,35

Dieser geringen Abnahme von α_1 entsprechend fand auch eine messbare Aenderung des Randwinkels beim Verkleinern und Vergrössern der Oberfläche nicht statt. Gleichwohl aber sieht man bei günstiger Beleuchtung, dass die Wasseroberfläche von einer Oelhaut bedeckt ist, ähnlich der bei Olivenöl.

Schlussfolgerungen.

1. Die Versuche I—VIII geben uns zwar nicht die wirklichen Werte der Oberflächenspannung α_1; es folgt aber aus ihnen, dass sich der Randwinkel des Oels beim Vergrössern und Verkleinern der Wasseroberfläche continuirlich ändert. Einen maximalen Grenzwert des Winkels habe ich nicht erreicht.

2. Die Grenzflächenspannung Oel gegen Wasser ist auch mit der Grösse der Grenzfläche veränderlich.

---

1) Es war dies der grösste Wert, den ich mit der angewandten Cohäsionswaage erhielt. Auch in Glasgefässen, die leichter zu reinigen sind, als der angewandte Trog, bekam ich ihn nicht grösser. F. Nansen findet (l. c. p. 71 und 56) für die Oberflächenspannung des Wassers im Maximum 7,5, im Minimum 4,4 mg/mm.

3. Die Versuche mit der Cohäsionswaage ergaben, dass die Oberflächenspannung der anomalen Wasseroberfläche weit kleinere Werte annehmen kann, als man nach der Formel

$$\alpha_1 = \alpha_{12} + \alpha_2 = 5,4$$

erwarten sollte.

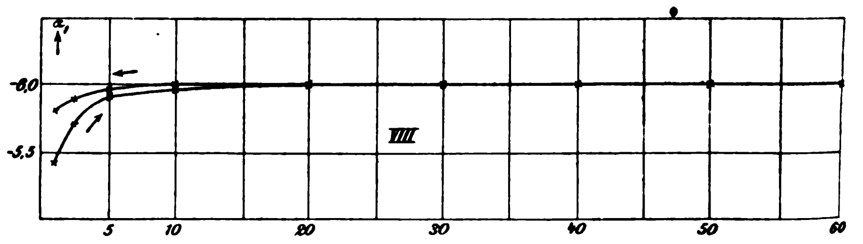
Aus diesen drei Punkten ist zu schliessen, dass auf der Wasseroberfläche, und zwar sowohl an ihrer Grenze gegen Oel, wie auch gegen Luft eine Flüssigkeitsschicht veränderter Eigenschaften ausgebreitet ist. Die unter dem Einfluss der Capillarkräfte stehenden Flüssigkeiten Wasser und Oel bilden eine von beiden verschiedene Grenzschicht, die entweder dadurch gebildet wird, dass die gegenseitige Löslichkeit infolge der Capillarkräfte geändert ist, oder die durch Hydrolyse des Oels zu stande kommt. Welche von diesen beiden Möglichkeiten der Fall ist, darüber müssen weitere Experimente entscheiden. Wahrscheinlicher erscheint mir Hydrolyse, da Paraffinöl, obwohl es sich scheinbar ausbreitet, keine so grosse Aenderung von α_1 verursacht.

Erklärung der Curven.

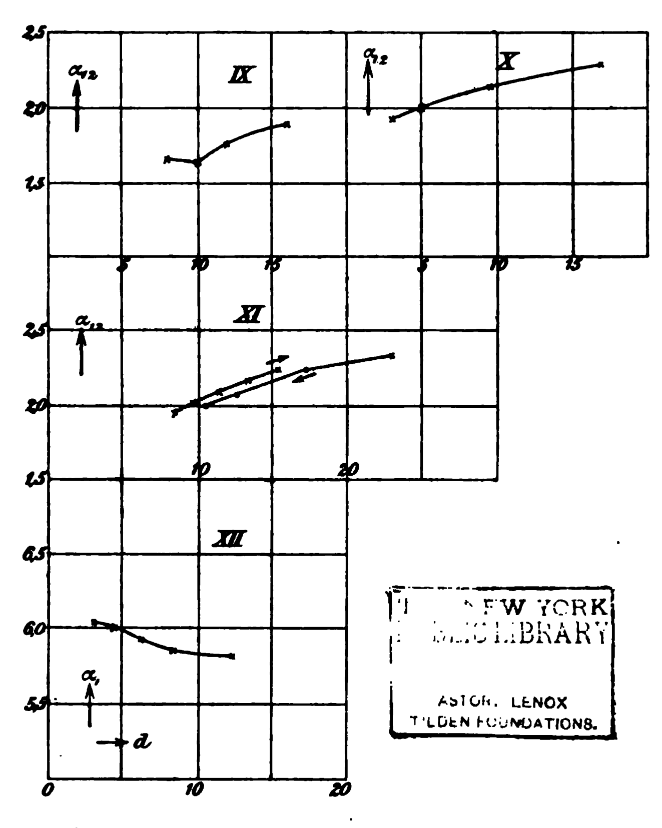
Die auf p. 720 u. 721 angefügten Curven gehören zu den mit gleicher Nummer versehenen Versuchsreihen. Die Curven I—XI haben als Abscisse die Länge der Wasseroberfläche in cm, die Curven I—VIII als Ordinaten die Werte α_1, IX—XI die Werte α_{12} in mg/mm. Die letzte Curve, XII, hat die berechneten Dicken d der Schicht in $\mu\mu$ zur Abscisse und wieder α_1 zur Ordinate.

Zum Schluss erlaube ich mir, Hrn. Geheimrat Quincke meinen herzlichsten Dank für seine liebenswürdige Unterstützung auszusprechen.

(Eingegangen 19. Januar 1901.)



Curven I—VIII.



Curven IX—XII.

5. *Beiträge zur Kenntnis der Vorgänge in Inductionsapparaten;* *von K. R. Johnson.*

(Fortsetzung von p. 137. Bd. 4. 1901.)

Es wurde in meiner letzten Mitteilung der Widerstand der secundären Funkenstrecke des Inductoriums besprochen, wobei ich zu der Schlussfolgerung kam, dass dieser Widerstand etwa 100 oder 1000 Megohm betrug. Ich hatte dabei die überdies von mir niemals verstandene Hypothese von H. Hertz über die Vorgänge im Oscillator so ganz vollständig vergessen, dass ich nicht einmal bemerkte, dass ich mich in Widerspruch mit derselben befand und sogar in einer am Ende vorigen Jahres zu Hrn. Poincaré gesandten Arbeit über die Funkenentladungen die Bedeutung dieser Entladungen als maassgebend für die Impulse, mittels welcher Hertz'sche Wellen erzeugt werden, darlegte, eine Anschauung, die bekanntlich von den Herren Poincaré und Bjerknes bestritten worden ist. Von Hrn. Bjerknes, der mir gütigst seine Apparate ebenso wie seine veröffentlichten Arbeiten zur Verfügung stellte, wurde ich an die Hertz'sche Hypothese erinnert. Da ich jedoch wegen der Schwierigkeiten der diesbezüglichen Beobachtungen wohl kaum einige nennenswerte Beobachtungsresultate erhoffen kann, so scheint es mir am besten, sogleich die theoretischen Schlussfolgerungen, zu denen ich gekommen bin, zuerst wieder zu entwickeln, obwohl sie mit der oben erwähnten Theorie, die ihre Geburt so grossen Namen verdankt, in Widerspruch kommen.

Die Erscheinungen, die im primären Hertz'schen Leiter, im Oscillator stattfinden, wurden bekanntlich von H. Hertz mit der Bewegung eines Pendels verglichen, und zwar wurde dabei angenommen, dass die Schwingungen zwischen den beiden am Ende des Oscillators befestigten Capacitäten nur durch die Funkenstrecke lediglich gehen und dass die Funkenstrecke mit einem metallischen Widerstand äquivalent sein sollte.

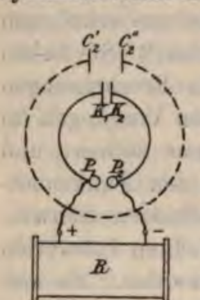
Diese Anschauung führt mit Notwendigkeit zu der Schlussfolgerung, dass die Funkenstrecke einen Widerstand von nur einigen Ohm besitzt, wie ihn auch Hr. Bjerknes aus der Dämpfung berechnet hat.[1]) Dieses Resultat kommt somit ganz in Widerspruch mit den Werten des Widerstandes zu der Funkenstrecke, die ich neuerdings ermittelt habe.[2]) Jedoch stimmen meine Werte bezüglich ihrer Grössenordnung und Variationen nicht nur mit den früher citirten, sondern auch mit den von Hrn. Drude mittels des Resonators gefundenen Werten von 520—2780 Megohm überein.[3]) Wenn auch diese Umstände nicht genügen, um die Hertz'sche Hypothese fallen zu lassen, so gewinnen sie jedoch an Stärke und Gewicht von den Betrachtungen der Herren Hagenbach und Zehnder, und die von ihnen gegen die Hertz'sche Hypothese erhobenen Einwände mögen deswegen hier erwähnt werden.[4]) Sie heben nachdrücklich hervor, dass die besprochenen Erscheinungen in einem notwendigen Zusammenhange mit den Vorgängen im secundären Kreise des benutzten Inductoriums stehen, und dass folglich die Vorgänge im Oscillator von den Funkenentladungen regulirt werden, d. h. dass die primären Schwingungen von einer Reihe im Sinne des beim Oeffnen inducirten Stromes gehender Funkenentladungen erregt werden. So weit wollen wir der Anschauung der Herren Hagenbach und Zehnder beitreten; wenn sie aber die Zeitabstände der elementaren Funken als maassgebend für die Schwingungsdauer betrachten und selbst die Resonanz von den Zeitintervallen der Partialfunken abhängig machen, so können wir dieser Meinung nicht beistimmen. Die Zeitabstände der einzelnen elementaren Funken variiren in den oben erwähnten Versuchen von Hrn. Moll[5]) etwa von 0,0002 bis 0,0020 Sec. und diese Abstände sind von der Schwingungsdauer des Resonators allzu verschieden, um eine solche Annahme zu erlauben. Im Gegenteil scheinen diese Angaben eher zu beweisen, dass die Zeitintervalle der partialen Funken gegenüber der Schwingungs-

---

1) V. Bjerknes, Wied. Ann. **55.** p. 124. 1895.
2) K. R. Johnson, Ann. d. Phys. **4.** p. 137. 1901.
3) P. Drude, Wied. Ann. **53.** p. 721. 1894.
4) A. Hagenbach u. L. Zehnder, Wied. Ann. **43.** p. 610. 1891.
5) T. Moll, Bih. till. K. Sv. Vet. Akad. Handl. Bd. **12.** 1886.

dauer des Resonators so gross sind, dass die von einem einzelnen Funken erregten Schwingungen vollständig gedämpft werden müssen, ehe sie ein folgender Funke wieder erweckt. Dass Funkenentladungen eine schwingende Bewegung hervorrufen, ist leicht aus dem Wollaston-Faraday'schen Versuche, an welchen ich früher erinnert habe, zu ersehen.[1]) Die von den Wollaston'schen Elektroden entwickelte Gasmenge wurde ja vergrössert, wenn Funken in eine parallel geschaltete Funkenstrecke schlugen, und dieser Zuwachs kann offenbar von nichts anderem, als von der von den Entladungen vergrösserten Amplitude der Schwingungen herrühren.

Der primäre Leiter, der Oscillator, besteht aus zwei ganz symmetrischen Hälften (I) und (II) (vgl. beistehende Figur) und beim Oeffnen des Batteriestromes läuft der inducirte Strom von dem einen Pole P_2 des Inductoriums durch die secundäre Spule zum anderen Pole P_1, wo bald, infolge der erhöhten Potentialdifferenz, ein Funke von P_1 zu P_2 überspringt. Dabei wird das Potential der Kugel P_1 plötzlich vermindert und das Potential der Kugel P_2 fast gleichzeitig erhöht. Durch Zufliessen der vom inducirten Strome geführten Elektricitätsmenge steigt das Potential wieder an P_1 und fällt an P_2, bis die zur Entladung nötige Potentialdifferenz erreicht wird etc. Bei jeder einzelnen Funkenentladung bewirkt das Herabsetzen des Potentiales in P_1 eine Strömung vom Condensator K_1 nach der Kugel P_1 zu und das Erhöhen des Potentiales an P_2 bewirkt zur selben Zeit eine Strömung von P_2 nach K_2. Das Potential steigt zuletzt in P_1 und K_2 zu einem Maximum, dann kehren die etwas gedämpften Ströme in den Richtungen $P_1 K_1$ und $K_2 P_2$ wieder zurück etc., bis zuletzt wegen der Dämpfung die Schwingungen ganz aufhören.



Es sei λ_1 der Coefficient der Selbstinduction jedes Halbteiles des Oscillators und ϱ_1 dessen Widerstand; λ_2 der Coefficient der Selbstinduction des Resonators und ϱ_2 der zugehörige

1) K. R. Johnson, Ann. d. Phys. 3. p. 461. 1900. Ausführlicher ist dieser Umstand in der zu L'éclairage électr. gesandten Arbeit besprochen.

Widerstand. Mit μ bezeichnen wir den Coefficienten der gegenseitigen Induction zwischen dem secundären Leiter und einem Halbteile des primären, mit γ die Capacität der Kugeln P_1 oder P_2, mit γ_1 diejenige des Condensators $K_2' K_2''$. Für die Ströme, i_1 in jeder Hälfte des Oscillators und i_2 im Resonator, erhält man folgende Gleichungen:

$$(53)\quad \begin{cases} \lambda_1 \dfrac{d i_1}{d t} + \mu \dfrac{d i_2}{d t} + \varrho_1 i_1 = v - V_1 = E_1, \\ \lambda_2 \dfrac{d i_2}{d t} + 2\mu \dfrac{d i_1}{d t} + \varrho_2 i_2 = E_2, \\ i_1 = -\gamma \dfrac{d v}{d t} = \gamma_1 \dfrac{d V}{d t}, \\ i_2 = -C_2 \dfrac{d E_2}{d t}, \end{cases}$$

wo v das Potential der Kugel P_1, V das Potential der Metallscheibe K_1, und E_2 die Potentialdifferenz des secundären Condensators zur Zeit t bedeuten. Die Zeit t wird von der Entladung des partialen Funkens an gerechnet. Die Gleichungen sind offenbar dieselben, die im allgemeinen für die gegenseitige Induction zweier Leiter gelten, nur mit dem Unterschiede, dass in der zweiten Gleichung (53) das Glied $2\mu(d i_1 / d t)$ den Coefficienten 2μ wegen des Einflusses der beiden Hälften des Oscillators enthält.

Aus den beiden Ausdrücken des primären Stromes erhält man

$$(54)\quad i_1 = -\frac{\gamma\gamma_1}{\gamma + \gamma_1} \frac{d(v - V)}{d t} = -C_1 \frac{d E_1}{d t},$$

wenn $\gamma_1 \gamma_2 / (\gamma_1 + \gamma_2)$ mit C_1 und $v - V$ mit der Potentialdifferenz E_1 ersetzt werden. Bei Eliminiren von i_1 und i_2 aus den Gleichungen (53) erhält man

$$(55)\quad \begin{cases} \lambda_1 C_1 \dfrac{d^2 E_1}{d t^2} + \mu C_2 \dfrac{d^2 E_2}{d t^2} + \varrho_1 C_1 \dfrac{d E_1}{d t} + E_1 = 0, \\ \lambda_2 C_2 \dfrac{d^2 E_2}{d t^2} + 2\mu C_2 \dfrac{d^2 E_1}{d t^2} + \varrho_2 C_2 \dfrac{d E_2}{d t} + E_2 = 0. \end{cases}$$

Die Integrale dieser Gleichungen hängen von den Wurzeln der algebraischen Gleichung

$$(56)\quad \begin{cases} (\lambda_1 \lambda_2 - 2\mu^2) C_1 C_2 z^4 + (\lambda_1 \varrho_2 + \lambda_2 \varrho_1) C_1 C_2 z^3 \\ \qquad + (\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \varrho_1 C_1 \varrho_2 C_2) z^2 \\ \qquad + (\varrho_1 C_1 + \varrho_2 C_2) z + 1 = 0 \end{cases}$$

ab, und wenn die Wurzeln derselben mit $-q_1 \pm p_1 i$ und $-q_2 \pm p_2 i$ bezeichnet werden, so hat man zu den Differentialgleichungen (55) folgende Lösungen:

$$
(57)\quad \begin{cases} E_1 = A_1\, \varepsilon^{-q_1 t} \sin p_1\, t + B_1\, \varepsilon^{-q_1 t} \cos p_1\, t \\ \qquad\qquad + A_2\, \varepsilon^{-q_2 t} \sin p_1\, t + B_2\, \varepsilon^{-q_2 t} \cos p_2\, t, \\ E_2 = X_1\, \varepsilon^{-q_1 t} \sin p_1\, t + Y_1\, \varepsilon^{-q_1 t} \cos p_1\, t \\ \qquad\qquad + X_2\, \varepsilon^{-q_2 t} \sin p_2\, t + Y_2\, \varepsilon^{-q_2 t} \cos p_2\, t. \end{cases}
$$

Die Gleichung (56) ist offenbar die häufiger vorkommende Beziehung, die gegenseitige Induction zwischen zwei Leitern darstellt, obwohl das Quadrat des Coefficienten der gegenseitigen Induction hier mit der Zahl 2 multiplicirt worden ist. Die gegenseitige Induction ist ganz schwach und unter dieser Voraussetzung ist das Problem bereits von Hrn. Erskine behandelt worden.[1]) In seiner Arbeit giebt er die Annäherungswerte der Wurzeln $-q_1 \pm p_1 i$ und $-q_2 \pm p_2 i$; es scheint jedoch rätlich, die Integrationsconstanten X_1, Y_1 X_2 und Y_2 zuerst ohne Zuhülfenahme der Annäherungswerte zu bestimmen. Es sei Q_0 die Elektricitätsmenge, die bei einem einzelnen partialen Funken von Kugel P_1 zu P_2 übertragen wird; das Potential der ersten Kugel wird dann um die Grösse Q_0/γ plötzlich vermindert, und das Potential der zweiten Kugel P_2 um dieselbe Grösse vermehrt, und man erhält somit die Anfangsbedingungen

$$
(E_1)_0 = -\frac{Q_0}{\gamma}, \quad (E_2)_0 = 0, \quad (i_1)_0 = 0 \text{ und } (i_2)_0 = 0.
$$

Aus den Differentialgleichungen (55) erhält man somit folgende Werte der Differentialquotienten von E_1 und E_2 zur Zeit $t = 0$:

$$
\left(\frac{d E_1}{d t}\right)_0 = 0, \qquad \left(\frac{d E_2}{d t}\right)_0 = 0,
$$

$$
\left(\frac{d^2 E_1}{d t^2}\right)_0 = \frac{Q_0}{\gamma} \cdot \frac{1}{\lambda_1 C_1 \Delta}, \qquad \left(\frac{d^2 E_2}{d t^2}\right)_0 = -\frac{2\mu}{\lambda_1 \lambda_2 C_2 \Delta} \cdot \frac{Q_0}{\gamma},
$$

$$
\left(\frac{d^3 E_1}{d t^3}\right)_0 = -\frac{1}{\lambda_1 C_1 \Delta^2} \cdot \left(\frac{\varrho_1}{\lambda_1} + \frac{2\mu^2}{\lambda_1 \lambda_2} \cdot \frac{\varrho_2}{\lambda_2}\right) \frac{Q_0}{\gamma},
$$

$$
\left(\frac{d^3 E_2}{d t^3}\right)_0 = \frac{2\mu}{\lambda_1 \lambda_2 C_2 \Delta^2} \left(\frac{\varrho_1}{\lambda_1} + \frac{\varrho_2}{\lambda_2}\right) \frac{Q_0}{\gamma}.
$$

1) J. A. Erskine, Wied. Ann. **66.** p. 269. 1898.

Beim Differentiiren der letzten Gleichung (57) und Einsetzen der obigen Anfangswerte erhält man somit

$$
(58)\quad \begin{cases} Y_1 + Y_2 = 0, \\ X_1 p_1 + X_2 p_2 - Y_1 q_1 - Y_2 q_2 = 0, \\ 2 q_1 X_1 p_1 + 2 q_2 X_2 p_2 + Y_1 (p_1^2 - q_1^2) \\ \qquad + Y_2 (p_2^2 - q_2^2) = \dfrac{2\mu}{\lambda_1 \lambda_2 C_2 \Delta} \cdot \dfrac{Q_0}{\gamma}, \end{cases}
$$

$$
(58\text{a})\quad \begin{cases} X_1 p_1 (3 q_1^2 - p_1^2) + X_2 p_2 (3 q_2^2 - p_2^2) \\ \qquad + Y_1 q_1 (3 p_1^2 - q_1^2) + Y_2 q_2 (3 p_2^2 - q_2^2) \\ \qquad = \dfrac{2\mu}{\lambda_1 \lambda_2 C_2 \Delta^2} \left(\dfrac{\varrho_1}{\lambda_1} + \dfrac{\varrho_2}{\lambda_2} \right) \dfrac{Q_0}{\gamma}. \end{cases}
$$

Die Grösse Q_0/γ wird mit Q_0'/C_1 ersetzt, und aus der zweiten und dritten der obigen Gleichungen erhält man:

$$
(59)\quad \begin{cases} 2 X_1 p_1 = \dfrac{2\mu Q_0'}{(q_1 - q_2) \lambda_1 C_1 \lambda_2 C_2 \Delta} - \dfrac{Y_1 (p_1^2 + q_1^2) + Y_2 (p_2^2 + q_2^2)}{q_1 - q_2} + 2 q_1 Y_1, \\ 2 X_2 p_2 = \dfrac{-2\mu Q_0'}{(q_1 - q_2) \lambda_1 C_1 \lambda_2 C_2 \Delta} + \dfrac{Y_1 (p_1^2 + q_1^2) + Y_2 (p_2^2 + q_2^2)}{q_1 - q_2} + 2 q_2 Y_2, \end{cases}
$$

und beim Einsetzen dieser Werte in der letzten Gleichung ergiebt sich:

$$
(59\text{a})\quad Y_1 = - Y_2 = \frac{\dfrac{2\mu Q_0'}{\lambda_1 C_1 \lambda_2 C_2 \Delta^2} \left(\dfrac{\varrho_1}{\lambda_1} + \dfrac{\varrho_2}{\lambda_2} \right) - \dfrac{\mu Q_0' [3 (q_1^2 - q_2^2) - (p_1^2 - p_2^2)]}{(q_1 - q_2) \lambda_1 C_1 \lambda_2 C_2 \Delta}}{N},
$$

wo der Nenner N die folgende Bedeutung hat:

$$
N = \frac{[p_1^2 + q_1^2 - (p_2^2 + q_2^2)]^2 - 4 (q_1 - q_2) [q_2 (p_1^2 + q_1^2) - q_1 (p_2^2 + q_2^2)]}{2 (q_1 - q_2)}.
$$

Mit Hülfe der Gleichungen (6) und (9) in der oben erwähnten Arbeit von Hrn. **Erskine** kann der Zähler in (59a) mittels der Wurzeln ausgedrückt werden, und es ergiebt sich somit:

$$
(60)\quad Y_1 = - Y_2 = 2\mu Q_0' \frac{(p_1^2 + q_1^2)(p_2^2 + q_2^2)[p_1^2 + q_1^2 - (p_2^2 + q_2^2)]}{[p_1^2 + q_1^2 - (p_2^2 + q_2^2)]^2 - 4 (q_1 - q_2) [q_2 (p_1^2 + q_1^2) - q_1 (p_2^2 + q_2^2)]}.
$$

Aus den Gleichungen (59) erhält man:

$$
(61)\quad \begin{cases} X_1 = \dfrac{2\mu Q_0'}{p_1} \cdot \dfrac{(p_1^2 + q_1^2)(p_2^2 + q_2^2)[q_1 (p_2^2 + q_2^2) + (q_1 - 2 q_2)(p_1^2 + q_1^2)]}{[p_1^2 + q_1^2 - (p_2^2 + q_2^2)]^2 - 4 (q_1 - q_2) [q_2 (p_1^2 + q_1^2) - q_1 (p_2^2 + q_2^2)]}, \\ X_2 = \dfrac{2\mu Q_0'}{p_2} \cdot \dfrac{(p_1^2 + q_1^2)(p_2^2 + q_2^2)[q_2 (p_1^2 + q_1^2) + (q_2 - 2 q_1)(p_2^2 + q_2^2)]}{[p_1^2 + q_1^2 - (p_2^2 + q_2^2)]^2 - 4 (q_1 - q_2) [q_2 (p_1^2 + q_1^2) - q_1 (p_2^2 + q_2^2)]}. \end{cases}
$$

Die Integrationsconstanten X_1, Y_1, X_2 und Y_2 sind somit in den Formeln (60) und (61) ohne Annäherungswerte als Functionen der Wurzeln dargestellt.

Wenn nun, wie oben erwähnt, vorausgesetzt wird, dass die von einem einzigen Partialfunken erzeugte Wellenbewegung vollständig gedämpft wird, ehe ein neuer Funken zu stande kommt, und die Zahl der elementaren Funken pro Secunde mit n bezeichnet wird, so wird die Angabe eines zu dem Resonator geschalteten Elektrometers mittels der Beziehung

$$E = K \, . \sqrt{n \int_0^\infty E_2^2 \, dt} \tag{62}$$

ausgedrückt, und es wird unmittelbar eingesehen, dass diese Gleichung die von Hrn. Bjerknes untersuchte Resonanzcurve bezeichnet.

Berechnet man das Integral unter dem Wurzelzeichen, so findet man für dasselbe den folgenden, etwas complicirten Ausdruck:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty E_2^2 \, dt = & \frac{X_1^2 + Y_1^2}{4 q_1} + \frac{X_2^2 + Y_2^2}{4 q_2} - \frac{q_1 (X_1^2 - Y_1^2)}{4 (p_2^1 + q_1^2)} - \frac{q_2 (X_2^2 - Y_2^2)}{4 (p_2^2 + q_2^2)} \\ & + \frac{2 p_1 X_1 Y_1}{4 (p_1^2 + q_1^2)} + \frac{2 p_2 X_2 Y_2}{4 (p_2^2 + q_2^2)} + \frac{(q_1 + q_2)(Y_1 Y_2 - X_1 X_2)}{(p_1 + p_2)^2 + (q_1 + q_2)^2} \\ & + \frac{(q_1 + q_2)(Y_1 Y_2 + X_1 X_2)}{\delta (p_1 - p_2)^2 + (q_1 + q_2)^2} + \frac{(p_1 + p_2)(X_1 Y_2 + X_2 Y_1)}{(p_1 + p_2)^2 + (q_1 + q_2)^2} \\ & + \frac{(p_1 - p_2)(X_1 Y_2 - X_2 Y_1)}{(p_1 - p_2)^2 + (q_1 + q_2)^2} \, .\end{aligned}$$

Wie von Hrn. Erskine in seiner oben erwähnten Arbeit bemerkt wird, sind q_1 und q_2 klein gegenüber p_1 und p_2 und dies gilt noch mehr in dem hier zu betrachtenden Falle; demzufolge kann man die obige Gleichung mit guter Annäherung

$$\left\{\begin{aligned}\int_0^\infty E_2^2 \, dt = & \frac{X_1^2 + Y_1^2}{4 q_1} + \frac{X_2^2 + Y_2^2}{4 q^2} + \frac{(q_1 + q_2)(Y_1 Y_2 + X_1 X_2)}{(p_1 - p_2)^2 + (q_1 + q_2)^2} \\ & + \frac{(p_1 - p_2)(X_1 Y_2 - X_2 Y_1)}{(p_1 - p_2)^2 + (q_1 + q_2)^2}\end{aligned}\right. \tag{63}$$

schreiben, und wenn das linke Glied dieser Gleichung mit

$$\frac{E^2}{n K^2}$$

ersetzt wird, so erhält man die Resonanzcurve.

Es soll hier nur ein specieller Fall angenommen werden, nämlich die Beziehung $C_1 \varrho_1 = C_2 \varrho_2$ zwischen den Widerständen und den Capacitäten der beiden Leiter. Dieser Fall ist von Hrn. **Blümcke** behandelt worden, der gezeigt hat, dass unter dieser Voraussetzung die Gleichung (56) exact aufgelöst werden kann.[1]) Was die Auflösung betrifft, genügt es hier, auf seine Arbeit zu verweisen und wir wollen hier nur die dabei ermittelten Werte von p_1, p_2, q_1 und q_2 anführen:

$$q_1 = \frac{C \varrho}{\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 - R},$$

$$q_2 = \frac{C \varrho}{\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + R},$$

$$p_1 = \frac{\sqrt{2(\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2) - C^2 \varrho^2 - 2R}}{\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 - R}$$

$$p_2 = \frac{\sqrt{2(\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2) - C^2 \varrho^2 + 2R}}{\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + R}$$

R bedeutet hier die Wurzel

$$R = \sqrt{(\lambda_1 C_1 - \lambda_2 C_2)^2 + 8 \mu^2 C_1 C_2}.$$

Von den oben erwähnten Werten der Wurzeln erhält man die folgenden Beziehungen:

$$p_1^2 + q_1^2 = \frac{\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + R}{2 \lambda_1 C_1 \lambda_2 C_2 \Delta},$$

$$p_2^1 + q_2^2 = \frac{\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 - R}{2 \lambda_1 C_1 \lambda_2 C_2 \Delta},$$

$$(p_1^1 + q_1^2)(p_2^2 + q_2^2) = \frac{1}{\lambda_1 C_1 \lambda_2 C_2 \Delta},$$

$$(p_1^2 + q_1^2 - (p_2^2 + q_2) = \frac{R}{\lambda_1 C_1 \lambda_2 C_2 \Delta},$$

$$q_2 (p_1^2 + q_1^2) - q_1 (p_2^2 + q_2^2) = 0,$$

$$q_1 - q_2 = \frac{R C \varrho}{\lambda_1 C_1 \lambda_2 C_2 \Delta},$$

$$\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} = 2 \cdot \frac{\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2}{C \varrho},$$

$$\frac{p_1^2 + q_1^2}{q_1} = \frac{p_2^2 + q_2^2}{q_2} = \frac{2}{C \varrho}.$$

---

1) A. **Blümcke**, Wied. Ann. 58. p. 415. 1896.

Die Integrationsconstanten können somit auf folgende Weise ausgedrückt werden:

$$\text{(60a)}\quad \begin{cases} Y_1 = -Y_2 = G\,[p_1^2 + q_1^2 - (p_2^2 + q_2^2)], \\ X_1 = \quad G \cdot \dfrac{q_1 - q_2}{p_1}(p_1^2 + q_1^2), \\ X_2 = -G \cdot \dfrac{q_1 - q_2}{p_2}(p_2^2 + q_2^2), \end{cases}$$

wo mit G die Grösse

$$G = \frac{2\,\mu\,Q_0'(p_1^2 + q_1^2)(p_2^2 + q_2^2)}{[p_1^2 + q_1^2 - (p_2^2 + q_2^2)]^2} = \frac{2\,\mu\,Q_0'}{R^2}\,\lambda_1\,C_1\,\lambda_2\,C_2\,\varDelta$$

bezeichnet wird.

Ferner ergiebt sich:

$$(p_1 - p_2)^2 + (q_1 + q_2)^2 = \frac{\lambda_1\,C_1 + \lambda_2\,C_2 + \dfrac{C^2\,\varrho^2}{2}}{\lambda_1\,C_1\,\lambda_2\,C_2\,\varDelta} - \frac{\sqrt{\dfrac{C^4\,\varrho^4}{4} - C^2\,\varrho^2(\lambda_1\,C_1 + \lambda_2\,C_2) + 4\,\lambda_1\,C_1\,\lambda_2\,C_2\,\varDelta}}{\lambda_1\,C_1\,\lambda_2\,C_2\,\varDelta},$$

woraus folgt, dass diese Grösse von derselben Ordnung wie $p_1^2 + p_2^2$ ist. Beim Betrachten der Gleichung (63) finden wir deshalb, dass dieselbe angenähert

$$\text{(63a)}\qquad J = \int_0^\infty E_2^2\,d\,t = \frac{X_1^2 + Y_1^2}{4\,q_1} + \frac{X_2^2 + Y_2^2}{4\,q_2}$$

geschrieben werden kann. Beim Einsetzen der Werte von X_1, Y_1, X_2 und Y_2, die in den Formeln (60a) gegeben worden sind, erhält man

$$J = \frac{G^2}{4}\left(\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}\right)\frac{R^2}{(\lambda_1\,C_1\,\lambda_2\,C_2\,\varDelta)^2} + G^2(q_1 - q_2)^2\left[\frac{(p_1^2 + q_1^2)^2}{p_1^2\,q_1} + \frac{(p_2^2 + q_2^2)^2}{p_2^2\,q_2}\right],$$

und diese Gleichung wird mit Hülfe der oben erwähnten Beziehungen zwischen p_1, p_2, q_1 und q_2 zu der Form

$$J = \frac{G^2\,R^2}{(\lambda_1\,C_1\,\lambda_2\,C_2\,\varDelta)^2}\left\{\frac{\lambda_1\,C_1 + \lambda_2\,C_2}{2\,C\,\varrho} + 2\,C\,\varrho\left(\frac{p_1^2 + q_1^2}{p_1^2} + \frac{p_2^2 + q_2^2}{p_2^2}\right)\right\}$$

reducirt.

Ferner ist

$$\frac{q_1^2}{p_1^2} + \frac{q_2^2}{p_2^2} = \frac{C^2 \varrho^2 \cdot \left[\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 - \frac{C^2 \varrho^2}{2}\right]}{4 \lambda_1 C_1 \lambda_2 C_2 \Delta - C^2 \varrho^2 (\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2) + \frac{C^4 \varrho^4}{4}},$$

und demgemäss erhält man zuletzt

$$J = \frac{G^2 R^2}{(\lambda_1 C_1 \lambda_2 C_2 \Delta)^2} \cdot \left\{ \frac{\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2}{2 C \varrho} \right.$$
$$\left. + 2 C \varrho \frac{8 \lambda_1 C_1 \lambda_2 C_2 \Delta - C^2 \varrho^2 (\lambda_1 C_1 + \lambda^2 C_2)}{4 \lambda_1 C_1 \lambda_2 C_2 \Delta - C^2 \varrho^2 (\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2) + \frac{C^4 \varrho^4}{4}} \right\}.$$

Wenn man überdies die Bedeutung der Grösse G berücksichtigt, so ergiebt sich:

$$(64) \quad \begin{cases} J = \left(\frac{2 \mu Q_0'}{R}\right)^2 \left\{ \frac{\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2}{2 C \varrho} \right. \\ \qquad \left. + 2 C \varrho \cdot \frac{8 \lambda_1 C_1 \lambda_2 C_2 \Delta - C^2 \varrho^2 (\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2)}{4 \lambda_1 C_1 \lambda_2 C_2 \Delta - C^2 \varrho^2 (\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2) + \frac{C^4 \varrho^4}{4}} \right\}. \end{cases}$$

Wir erinnern uns nun der oben der Wurzel R beigelegten Bedeutung

$$R = \sqrt{(\lambda_1 C_1 - \lambda_2 C_2)^2 + 8 \mu^2 C_1 C_2},$$

und es folgt somit, dass, wenn der Resonanzbedingung $\lambda_1 C_1 = \lambda_2 C_2$ genügt wird, man für den ersten Factor in (64) den Wert

$$\left(\frac{2 \mu Q_0'}{R}\right)^2 = \frac{Q_0'^2}{2 C_1 C_2}$$

erhält, und deswegen ist das Integral J beim Abstimmen auf Resonanz von dem Coefficienten der gegenseitigen Induction unabhängig. Ferner wird in der Gleichung (63) die Beziehung

$$E = K . \sqrt{n J}$$

für den Elektrometerausschlag angegeben werden, und es folgt mithin, dass *beim Erfüllen der Resonanzbedingung die Angabe des Elektrometers von dem Abstande des Resonators zum Oscillator ganz unabhängig ist, nämlich unter der Voraussetzung, dass überdies der Bedingung* $C_1 \varrho_1 = C_2 \varrho_2$ *genügt wird.*

Aus der Gleichung (64) ergiebt sich für die Resonanzcurve die folgende Annäherung:

$$(65) \quad E = 2 K . Q_0' \sqrt{\frac{\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2}{2 C \varrho} \cdot \frac{\mu^2}{(\lambda_1 C_1 - \lambda_2 C_2)^2 + 8 \mu^2 C_1 C_2}}.$$

μ ist im allgemeinen sehr klein gegenüber λ_1 und λ_2, auch bei mässigem Abstande zwischen dem Resonator und dem Oscillator, und eine verhältnismässig kleine Abweichung der Differenz $L_1 C_1 L_2 C_2$ von Null setzt deswegen den Wert des rechten Gliedes bedeutend herab, und es wird deswegen ganz leicht eingesehen, dass die Gleichung (65) eine steile auf- und absteigende Curve, wie die von Hrn. Bjerknes studirte, darstellt.

Wenn der Coefficient der gegenseitigen Induction sich dem Werte Null nähert, so kann diese Annäherung durch das Entfernen des Resonators gegen einen bis ins Unendliche wachsenden Abstand erreicht werden, und es geht somit hervor, dass die *Inductionswirkungen unter Umständen in einer unendlichen Ferne beobachtet werden können*, wenn nämlich den Bedingungen

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\varrho_1}{\varrho_2} = \frac{C_2}{C_1} = C_2\left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma_1}\right)$$

genügt wird.

Die von Hrn. Bjerknes aufgezeichneten Resonanzcurven geben wohl ein Abnehmen des Elektrometerausschlages bei wachsendem Abstande an, was die Vermutung veranlasst, dass die oben erwähnte Bedingung $C_1 \varrho_1 = C_2 \varrho_2$ auch eine notwendige ist, was jedoch aus der obigen Theorie nicht offenbar folgt. Wenn jedoch $C_1 \varrho_1 \gtreqless C_2 \varrho_2$ ist, so können die Grössen p_1 und p_2 nicht ganz unabhängig von den Widerständen bleiben, und die Wurzel R muss deswegen noch ein Glied unter dem Wurzelzeichen enthalten, und dieses Glied kommt dann neben der Grösse $8 \mu_2 C_1 C_2$ in Betracht; wenn jene neben diesem klein wird, was dabei in einem mässigen Abstande zutreffen kann, so wird die Fernwirkung vernichtet. Dass jedoch die Fernwirkungen unter Umständen bei sehr bedeutenden Abständen wahrgenommen werden können, ist ja bei den Versuchen mit der Telegraphie ohne Drähte in genügender Weise nachgewiesen worden.

Bezüglich der von den Herren Zehnder und Hagenbach, besonders von Zehnder hervorgehobenen Einseitigkeit dieser Erscheinungen, kann dieser Umstand in einer theoretischen Darstellung wohl auch eingeräumt werden, wenn man die Asymmetrie des Inductors berücksichtigt, aber es dürften

wohl dabei so viele Gegenstände diese Erscheinung beeinflussen, z. B. eine Differenz zwischen der Elektricitätsmenge, die von dem einen Pole entladen wird, und derjenigen, die der andere empfängt etc., dass diese Ergebnisse eine experimentelle Untersuchung nötig machen.

Einige Schlussbemerkungen über die Resonanz in Telegraphenleitungen mögen wir noch hinzufügen, da diese Erscheinung einen vorzüglichen Beweis für die Anschauung über den Extrastrom beim Unterbrechen eines elektrischen Stromkreises, die wir früher in diesen Annalen veröffentlicht haben, liefert.[1]) In der erwähnten Arbeit habe ich die Ansicht ausgesprochen, dass der Oeffnungsstrom in einer Umsetzung der im Kreise fliessenden Elektricitätsmenge zu Hertz'schen Wellen besteht, wobei jedoch die Wellenbewegung nach einer viertel Schwingungsdauer durch eine Funkenentladung plötzlich abgebrochen wird. Bei Telegraphen- und Fernsprechleitungen, wo die Ströme sehr schwach sind, entsteht im allgemeinen kein Oeffnungsfunke, und die Wellenbewegung muss deswegen ungestört von einer Funkenentladung gedämpft werden. Demzufolge müssen die beim Oeffnen des Stromes einer Telegraphenleitung erzeugten Wellen auch in einer entfernten Telegraphenleitung, die auf Resonanz mit der ersteren abgestimmt worden ist, sich kundgeben können, wenn z. B. in die letztere ein Fernsprecher eingeschaltet worden ist. Solche Beobachtungen sind schon längst an Telegraphenleitungen gemacht worden, deren Abstand bis zu 65 km betrug.[2]) Diese Ergebnisse liefern somit eine experimentelle Bestätigung meiner Theorie des Oeffnungsstromes.

1) K. R. Johnson, Ann. d. Phys. **2.** p. 179. 1900.

2) Preece, Beibl. **12.** p. 72. 1888; Brit. Assoc. Manchester 1887. p. 546.

(Eingegangen 19. Januar 1901.)

6. *Mechanische Schwingungen isolirt gespannter Drähte mit sichtbarer elektrischer Seitenentladung;*
von O. Viol.

(Auszug aus der Rostocker Dissertation.)

I.

Bei einer Untersuchung über elektrische Schwingungen in Drähten, veranlasst durch eine Arbeit des Hrn. W. v. Bezold[1]), ergab sich eine interessante Erscheinung, die, soweit aus der Literatur zu ersehen war, bis jetzt nicht bekannt ist.

Spannt man nämlich einen Draht an beiden Enden isolirt so ein, dass das eine Ende frei bleibt, das andere dagegen durch eine Funkenstrecke mit der einen Conductorkugel einer Influenzmaschine verbunden wird (der andere Pol der Maschine

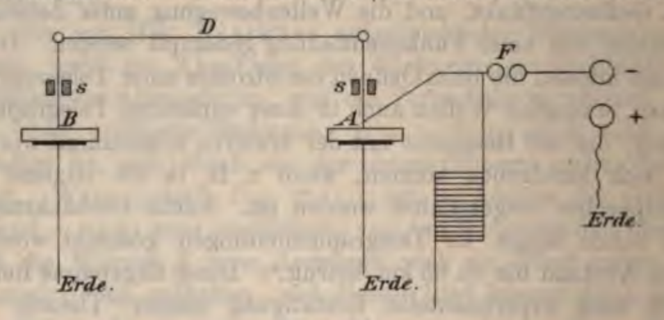


Fig. 1.

ist zur Erde abgeleitet) und lässt eine Entladung durch den Draht gehen, so leuchtet er zwischen den Isolirstellen nicht an seiner ganzen Länge auf, sondern nur in regelmässigen Intervallen, die von dunklen Stellen unterbrochen sind.

Es soll nun im weiteren gezeigt werden, dass man es bei dieser Erscheinung nicht mit elektrischen Wellen, sondern mit mechanischen Schwingungen des Drahtes zu thun hat.

v. Bezold ging bei einem seiner Versuche von der Anordnung, wie sie Fig. 1 zeigt, aus. Von den Conductoren

---

1) W. v. Bezold, Pogg. Ann. **140**. p. 145. 1870.

einer Influenzmaschine war der eine Pol, in den meisten Fällen der positive, zur Erde abgeleitet, während der negative mittels einer Funkenstrecke mit dem zu untersuchenden Draht verbunden war. *A* und *B* sind zwei einseitig belegte Harzkuchen, deren Belegungen zur Erde abgeleitet sind, während stählerne Stricknadeln, bei *s* isolirt eingespannt, als Zuleiter dienten.

Liess man eine Entladung durch das System gehen, so entstanden bei *A* und *B* verschieden grosse Lichtenberg'sche Figuren. Durch Variiren der Drahtlänge *D* brachte v. Bezold die eine Figur zum Verschwinden und glaubte dann einen Knoten der elektrischen Welle erhalten zu haben.

Um den Draht in seiner ganzen Länge untersuchen zu können, wurde er zwischen den Isolirstellen *s s* geradlinig gespannt. Versuche im dunklen zeigten, dass er zwischen *s s* nicht gleichmässig an der ganzen Länge aufleuchtete, sondern unterbrochen von dunklen Stellen.

Da man zuerst glaubte, direct die elektrische Welle zu sehen, so wurde der Versuch gemacht, das Wellenbild durch seine Einwirkung auf die photographische Platte zu fixiren. Man presste sehr empfindliche photographische Platten an den Draht und liess mehrere Entladungen erfolgen. Nach dem Entwickeln der Platten erhielt man aber, wenn die Entladung negativ war, nur einen unregelmässig breiten schwarzen Strich und bei positiver Entladung eine feine Linie mit strahlenförmigen Aesten. Da der Draht nicht gleichmässig an der Platte anlag, so erschien letztere mehr geschwärzt an den Stellen, an denen der Draht dichter anlag, als an den anderen.

Nach Abschluss dieser Untersuchung wurde eine Arbeit des Hrn. Thomas Tommasina[1]) „Ueber einige durch den Erregerdraht Hertz'scher Wellen erzeugte photochemische Wirkungen" veröffentlicht. In dieser behandelt Hr. Tommasina ganz ähnliche Erscheinungen und bringt Abbildungen, wie sie auch zu Anfang der vorliegenden Arbeit erzielt wurden. Die Ursachen der so gewonnenen Resultate sind bereits in

---

1) Thomas Tommasina, Physik. Zeitschr. 1. p. 435. 1900.

einer kurzen Abhandlung[1]): „Mechanische Schwingungen elektrisch leuchtender Drähte“ erörtert.

Ehe nun auf weitere Versuche näher eingegangen wird, ist es vielleicht angebracht, eine kurze Beschreibung der verwendeten Apparate zu geben.

Die ersten Versuche wurden mit einer Holtz'schen Elektrisirmaschine von 42 cm Scheibendurchmesser gemacht. Später wurde eine Wimshurst-Influenz-Elektrisirmaschine mit zwei entgegengesetzt rotirenden Hartgummischeiben von 55 cm Durchmesser verwandt. Diese Maschine wurde durch einen Motor angetrieben, um einen gleichmässigen Gang derselben zu erzielen und auch um ohne fremde Hülfe Beobachtungen machen zu können.

Da der Motor seinen Strom nicht von einer Accumulatorenbatterie erhielt, sondern von der hiesigen Centrale, deren Spannung sehr oft ganz erheblich schwankte, so machte sich dies durch unruhigen Gang der Maschine bemerkbar, was wiederum die Genauigkeit der Resultate beeinflusste.

Auch die Entladung eines Inductoriums mit Teslaanordnung wurde versucht, ohne jedoch nennenswerte neue Resultate zu geben.

Die zur Benutzung kommende Funkenstrecke war für die v. Bezold'schen Versuche besonders angefertigt. Sie sollte möglichst wenig Metall haben, welches eventuell an dem einen Ende des Drahtes als Capacität hätte dienen können. Aus diesem Grunde waren die Kugeln direct auf Hartgummistäben befestigt, welche durch eine Stellvorrichtung gegeneinander verschoben werden konnten. Zum Einklemmen des Drahtes waren an den Kugeln, welche 25 mm Durchmesser besassen, kleine Dübel angelötet.

Das Ablesen der Grösse der Funkenstrecke geschah mittelst Fernrohres für kurze Distanz und einem direct an die Kugeln gehaltenen Glasmaassstab mit Millimeterteilung, wie aus Fig. 2 ersichtlich ist.

Wenn auch bei dieser Anordnung durch die convergenten Lichtstrahlen ein Fehler in der Ablesung entsteht, so ist derselbe doch zu vernachlässigen, wenn man berücksichtigt, dass das Fernrohr 50 cm von den Kugeln entfernt ist und die Ent-

---

1) O. Viol, Physik. Zeitschr. 1. p. 465. 1900.

fernung der letzteren voneinander das Maass von 8 mm nicht überschreitet. Ausserdem springt der Funke ja auch nicht immer genau in der Mittellinie der beiden Kugeln über.

Von Drähten sind solche von verschiedener Dicke und Material zur Untersuchung gekommen. Am besten eignete sich für die vorliegenden Versuche Messingdraht von 0,3 bis 0,5 mm Dicke.

War der Draht dünner wie 0,3 mm, so war die seitliche Entladung so stark, dass eine besondere Erscheinung nicht beobachtet werden konnte. War der Draht dagegen stärker

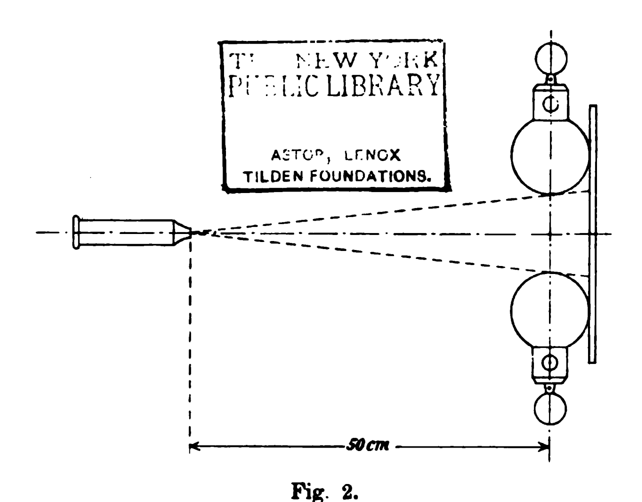


Fig. 2.

als 0,5 mm, so war die Seitenentladung zu schwach. Es kamen daher bei den Versuchen stets Messingdrähte von 0,37 und 0,42 mm Dicke zur Anwendung.

Ausserdem muss noch bemerkt werden, dass zu den vorliegenden Versuchen die Luft sehr trocken sein muss. Die besten Resultate wurden Ende April und Anfang Mai d. J. erzielt, wo die Luft nur 40 Proc. relative Feuchtigkeit besass.

Als Ende Juni einige der Versuche noch einmal wiederholt werden sollten, stiess dies auf grosse Schwierigkeiten und wurde teils unmöglich, da zu dieser Zeit die Luft nach einigen regenreichen Tagen über 70 Proc. relative Feuchtigkeit besass.

II.

Die Seitenentladung eines Drahtes, welcher von einem Strom von sehr hoher Spannung durchflossen wird, ist schon lange beobachtet worden.

Schon van Marum[1]) bemerkte gegen Ende des vorigen Jahrhunderts, als er auf einen dünnen Draht, der am anderen Ende abgeleitet war, einen Funken von seiner grossen Elektrisirmaschine überspringen liess, dass der Draht seiner ganzen Länge nach mit flammendem Licht bedeckt war, welches aus kleinen Strahlen bestand, die aus dem Draht an allen Seiten hervorkamen.

Andere haben wiederum beobachtet, dass der Draht mit leuchtenden Punkten besetzt war. Lodge[2]) benutzte die bei starken Schwingungen an den Drähten auftretenden Seitenentladungen zur Messung der Wellenlängen.

Arons[3]) brachte bei einem seiner Versuche Lecher'sche Drähte in eine Vacuumröhre von 2,5 m Länge. Liess er nun Entladungen durch das System gehen und verdunkelte das Zimmer, so leuchtete die Röhre in ihrer ganzen Länge auf. Legte er aber vor und hinter der Röhre Messingbügel über die beiden Drähte, so teilte sich der Draht in gleichen Abständen in Hell und Dunkel ein und Arons konnte fünf Abteilungen erkennen. Die helle Stelle entsprach einem Bauch, die dunkle einem Knoten der elektrischen Welle.

Tesla[4]) erwähnt eine ähnliche Beobachtung. Ein durch eine mässig evacuirte Röhre gezogener Draht teilte sich beim Anschliessen an den Hochfrequenztransformator in regelmässiger Weise in helle und dunkle Abteilungen.

Coolidge[5]) arbeitete auf diesem Gebiete im Anschluss an Arons weiter. Er benutzte die Lecher'sche Anordnung mit verschiedenen Erregern, und bestimmte nach dieser Methode

---

1) van Marum, Gilb. Ann. **1.** p. 110. 1799.
2) O. J. Lodge, Proc. Roy. Soc. London **50.** p. 2. 1891.
3) L. Arons, Wied. Ann. **45.** p. 553. 1892.
4) N. Tesla, Untersuchungen über Mehrphasenströme, p. 362. Halle 1895.
5) W. D. Coolidge, Wied. Ann. **67.** p. 578. 1899.

die Wellenlänge der Schwingungen, welche die Erreger aussandten.

Mit Berücksichtigung dieser Arbeit lag bei den Resultaten, wie sie die bisher besprochenen Versuche ergeben hatten, die Vermutung nahe, dass man es auch hier mit elektrischen Wellen zu thun habe.

Zunächst war man bestrebt, das Leuchten des Drahtes deutlicher zu machen. Zu diesem Zweck wurde probeweise der Erdschluss hinter der Funkenstrecke fortgelassen; sofort trat das Leuchten deutlicher auf. Da man aber immer noch in Anlehnung an die v. Bezold'sche Anordnung den Erdschluss nicht entbehren zu können meinte, so mussten andere versucht werden. Wasserwiderstände erwiesen sich als unzureichend, da sofort jedes Leuchten aufhörte. Gute Dienste leistete ein feuchtes Brett aus Fichtenholz mit den Dimensionen $60 \times 12 \times 1$ cm.

Weil nun der Erdschluss auf die Erscheinung gar keinen Einfluss zeigte, sondern nur die Intensität des Leuchtens etwas verringerte, so wurde derselbe bei den folgenden Versuchen ganz fortgelassen.

Die Einteilung in helle und dunkle Stellen war nur an demjenigen Teil des Drahtes zu beobachten, welcher isolirt gespannt war, während die beiden Teile vor und hinter dieser Strecke, d. h. bis zur Funkenstrecke und bis zur Probeplatte gleichmässig aufleuchteten. Es wurde daher auch die Nadel von der Probeplatte abgehoben, und den nun folgenden Versuchen lag die Anordnung, wie sie Fig. 3 zeigt, zu Grunde.

Von dem einen Conductor führte ein Draht z zur Funkenstrecke F; der andere Conductor war durch Metalleitung zur Erde abgeleitet. Die Funkenstrecke war durch den Draht l mit dem Prüfungsdraht[1]) L verbunden. Das Spannen und Isoliren des letzteren geschah nach Fig. 3a.

Zwei Hartgummistäbe s waren auf einem Gestell befestigt. An ihren oberen Enden besassen sie Löcher, in welche man durch den conischen Stift K den Draht bequem einklemmen konnte, sodass die Spannung mit der Hand leicht zu reguliren war.

1) Unter Prüfungsdraht sei derjenige Teil verstanden, an welchem die Einteilung in helle und dunkle Stellen untersucht werden soll.

Die Art der Entladung war von wesentlichem Einfluss auf die Erscheinung.

War nämlich der positive Conductor mit der Funkenstrecke verbunden und der negative zur Erde abgeleitet, so zeigte der Prüfungsdraht eine strahlenförmige, nach allen Seiten gleichmässig leuchtende Hülle. Eine Einteilung war nicht zu fixiren, da die hellen Stellen unbeständig sich hin- und herbewegten.

War dagegen der negative Conductor mit der Funkenstrecke verbunden und der positive zur Erde abgeleitet, so

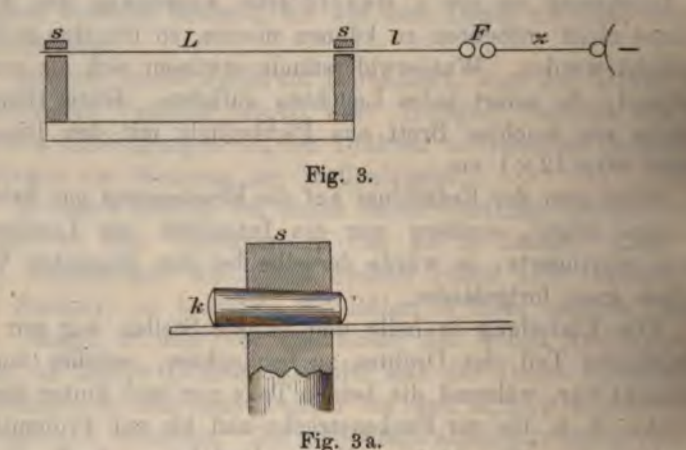


Fig. 3.

Fig. 3a.

zeigte der Draht ein intensives Glimmen, welches fest stehen blieb, wo es einmal aufgetreten war. War eine Einteilung erfolgt, unter Umständen, welche später noch besprochen werden, so blieb dieselbe unverändert. Aus diesem Grunde ist bei allen Versuchen nur diese letztere Schaltung angewendet.

Zunächst war man bemüht, die Einteilung in helle und dunkle Stellen bei gegebener Funkenstrecke bestimmter zu erreichen. Zu diesem Zweck wurde erst der Draht z bei jedem Versuch immer um 1 cm kürzer gemacht. Dies führte nicht zum Ziele. Dann veränderte man in derselben Weise den Draht l, aber mit dem gleichen negativen Resultate.

Es war nicht möglich, bei gegebener Funkenstrecke und Variiren der Drahtlängen eine gleichmässige Einteilung zu erhalten, wie man eigentlich erwarten konnte, wenn man analog

Coolidge elektrische Wellen annahm. In diesem Falle musste man einmal die Drahtlänge treffen, wo die Welle am Ende einen Bauch hatte, um so mehr, als bei einigen Versuchen die Wellenlänge auf 14 cm geschätzt wurde.

Da die Drahtlängen keinen Einfluss zeigten, so wurden L, l und z aus Gründen der bequemen Handhabung und um den ganzen Draht photographiren zu können, in folgenden Längen angewendet:

$$L = 100 \text{ cm}; \; l = 30 \text{ cm}; \; z = 50 \text{ cm}.$$

Bilder, wie sie bis jetzt erzielt wurden, zeigen die Figg. 4 und 5.



Fig. 4.



Fig. 5.

Interessant und auffallend hierbei sind die leuchtenden Punkte inmitten der leuchtenden Stellen, und zwar erscheint dieser Punkt auf dem Bilde viel mehr in die Breite gezogen, als man ihn in Wirklichkeit sah.

Besser ist dies bei Fig. 5 zu sehen. Es hat den Anschein, als ob der Draht in Schwingung gewesen wäre und der Punkt deshalb so breit erscheint.

Woher diese leuchtenden Punkte kommen, konnte nicht aufgeklärt werden. Die Annahme, dass es Staubteilchen sind, an denen die Elektricität mehr ausstrahlt, erwies sich später nicht als stichhaltig; denn diese Punkte wanderten immer mit der Welle mit, und man hatte es ganz in der Hand, die Zahl der Punkte zu vermehren oder zu vermindern.

Dass diese auf dem Prüfungsdraht L sich zeigenden Wellen keine elektrischen sein konnten, war schon dadurch hinlänglich bewiesen, dass die Erscheinung unabhängig von der Länge der Zuleitungsdrähte war.

Ein zweites Kriterium bestand darin, dass man das freie Ende des Drahtes L mit der inneren Belegung einer Leydener Flasche verband, während die äussere zur Erde abgeleitet wurde. Auch dieser Versuch blieb ohne Einfluss auf die Einteilung des Drahtes; nur verzehrte die Leydener Flasche etwas von der Ladung und es leuchtete der Draht schwächer auf.

Es blieb nur übrig, die Wellen als entstanden durch mechanische Schwingungen zu erklären. Diese Ansicht wurde auf Grund folgender Ueberlegung zu erweisen gesucht.

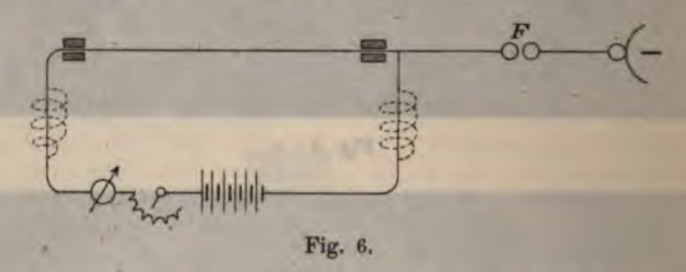


Fig. 6.

Wird ein ausgespannter Platindraht durch einen constanten Strom zum Glühen gebracht und dann in mechanische Schwingungen versetzt, so werden die Stellen, an denen der Draht schwingt, abgekühlt und erscheinen infolge dessen dunkel, während der Draht an den Schwingungsknoten hell aufleuchtet.

Die Schaltung hierzu zeigt Fig. 6.

Der Prüfungsdraht war wie gewöhnlich aufgespannt; ausserhalb der beiden Isolirstellen schloss die Leitung einer Accumulatorenbatterie an. Diese sowohl wie auch die anderen Apparate waren gegen Erdschluss isolirt. Durch allmähliches Ausschalten des Vorschaltewiderstandes wurde der Prüfungsdraht langsam zum Glühen gebracht. Dadurch wird der Draht länger und es muss die eine Isolirstelle zum Verstellen eingerichtet sein, damit der Draht immer die gleiche Spannung behält.

Es wurde Platindraht von 0,2 mm und Messingdraht von 0,37 mm Dicke versucht. Die Befürchtung, dass die bei F überspringende Elektricität fast ganz in der Batterie verzehrt

wird, bestätigte sich. Es wurden deshalb, wie in Fig. 6 punktirt angegeben ist, zwischen Prüfungsdraht und Batterie zwei Widerstände mit grosser Selbstinduction eingeschaltet. Es war nur ein geringer Erfolg zu verzeichnen. Es trat zwar ein anderer Zustand des Drahtes ein, sobald ein Funke bei F übersprang, indem er nur noch stellenweise glühte, sonst aber dunkel erschien, ohne jedoch eine regelmässige Einteilung wahrnehmen zu lassen. Nur die Grundschwingung des Drahtes war scharf markirt zu erhalten, an den Enden hell und in der Mitte dunkel.

Diese Methode war äusserst empfindlich gegen Luftströmungen und der Misserfolg lag vielleicht an dem elektrischen Winde, der von der Maschine ausging.

III.

Die Ansicht, dass die Wellen durch mechanische Schwingungen des Prüfungsdrahtes entstehen, gewann um so mehr an Beweiskraft, als man ein lebhaftes Schwanken des Drahtes l beobachten konnte, sowie ein Funke bei F übersprang.

Um zunächst zu prüfen, ob dieses Schwanken durch äussere Einflüsse bedingt ist, z. B. durch Auseinanderfedern der Funkenstrecke, wurde l zur Spirale gedreht, welche den Stoss auffangen sollte. Die Schwankungen dauerten fort.

Nun wurden, da vielleicht Erschütterungen, verursacht durch die Maschine, sich durch den Tisch fortpflanzten, Maschine, Funkenstrecke und Prüfungsdraht getrennt auf je einen festen Tisch gestellt. Erschütterungen durch den Fussboden waren ausgeschlossen; das Schwanken trat trotzdem auf.

Wurden diese Schwankungen durch die Entladung hervorgerufen, so musste nicht nur der Draht l, sondern auch L schwingen. Eine Untersuchung mit dem Mikroskop, bei einer 30fachen Vergrösserung, zeigte auch deutlich ein Schwingen des Prüfungsdrahtes. Zu nahe durfte man das Mikroskop nicht an den Draht bringen, da man sonst Schläge in das Auge bekam, ausserdem wohl auch die Messingarmatur die Güte der Beobachtung beeinträchtigte.

Spannte man den Prüfungsdraht etwas weniger straff, so konnte man das Schwingen desselben auch mit blossem Auge

sehen; deutlicher, wenn man ihn mittels einer Sammellinse auf einen Schirm projecirte.

Dieses Transversalschwingen hat Hr. O. Lehmann schon früher beobachtet.[1]) Er äussert sich darüber: „Wird der eine Conductor einer Influenzmaschine mit einem mehrere Meter langen mit Staniol bekleideten Brett verbunden, der andere mit einem in etwa 15 cm Entfernung parallel gespannten isolirten feinen Draht, so zeigt sich letzterer längs seiner ganzen Oberfläche mit Glimmlicht bedeckt, welches bei positiver Elektrisirung eine völlig zusammenhängende Hülle bildet, im entgegengesetzen Falle sich aus dicht aneinander gereihten Lichtpunkten zusammensetzt. Bringt man nun eine Neben-

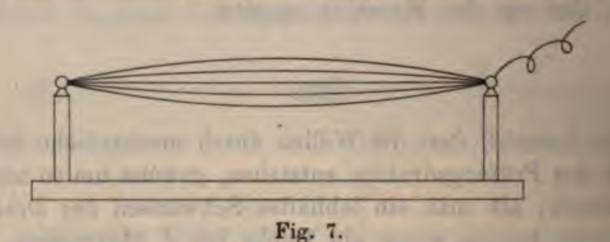


Fig. 7.

schliessung an mit einer 2 cm langen Funkenstrecke, so besetzt sich der Draht, wenn er negativ ist, seiner ganzen Länge nach mit langen, zu seiner Axe senkrechten Büschelstrahlen; ist er positiv, so gerät er in sehr lebhafte Transversalschwingungen, wobei die verschiedenen Schwingungszustände durch plötzliches Aufleuchten infolge rasch nacheinander eintretender Glimmentladungen schön zur Anschauung kommen, ähnlich wie wenn man eine weisse Schnur, welche schwingt, mit rasch intermittirendem Licht beleuchtet.“

Die verschiedenen Schwingungszustände versteht Lehmann hierbei, wie Fig. 7 übertrieben veranschaulicht, so, dass der Draht als ganze Saite schwingt, und die Entfernung von der Mittellage bei jeder neuen Entladung eine andere ist.

Mit dem Mikroskop und auch mit dem Auge konnte man keinen ruhenden Knoten sehen, weshalb man zu der Ansicht gezwungen war, dass der Prüfungsdraht nicht nur im Oberton, sondern auch im Grundton schwingen müsse.

1) O. Lehmann, Wied. Ann. 44. p. 643. 1891.

Rühren die leuchtenden Wellen von der mechanischen Schwin-
ung des Drahtes her, so entsprechen die leuchtenden Stellen den
noten und die dunklen Stellen den Bäuchen. Ein Beweis dafür
t, dass der Draht an beiden eingeklemmten Enden immer hell
uchtete, ganz gleich, wie die Einteilung des Drahtes war.

Bleibt man nicht bei derselben Funkenstrecke, sondern
rändert dieselbe, so ändert sich auch die Zahl der hellen



Fig. 8.



Fig. 9.



Fig. 10.

d dunklen Stellen, und zwar entsprechen der grossen Funken-
recke wenige Einteilungen, der kleinen dagegen viele. Be-
hren sich die beiden Kugeln, so ist der Draht mit leuch-
nden Punkten besetzt.

Versuche, die Einteilungen photographisch zu fixiren, er-
ben wenig scharfe Bilder, da der zur Verfügung stehende
pparat sehr lichtschwach war und man daher sehr nahe an
n Prüfungsdraht herangehen musste, um eine gute Belich-
ng der Platte zu erzielen. Für diese Aufnahmen wäre ein
htstarkes Weitwinkelobjectiv erwünscht gewesen.

Zur Veranschaulichung und zum Beweisen der Thatsachen mögen jedoch die folgenden Aufnahmen genügen.

Die Figg. 8 bis 10 zeigen die Grundschwingung. Es war schwierig, dieselbe während einer kurzen Zeit festzuhalten.



Fig. 11.

Aus diesem Grunde zeigen die Figg. 9 und 10 schon den Anfang des Zerfalles in kleinere Wellen.

Fig. 11 zeigt, wenn auch schwach, drei Bäuche in ziemlich regelmässigen Abständen. Da die photographischen Er-

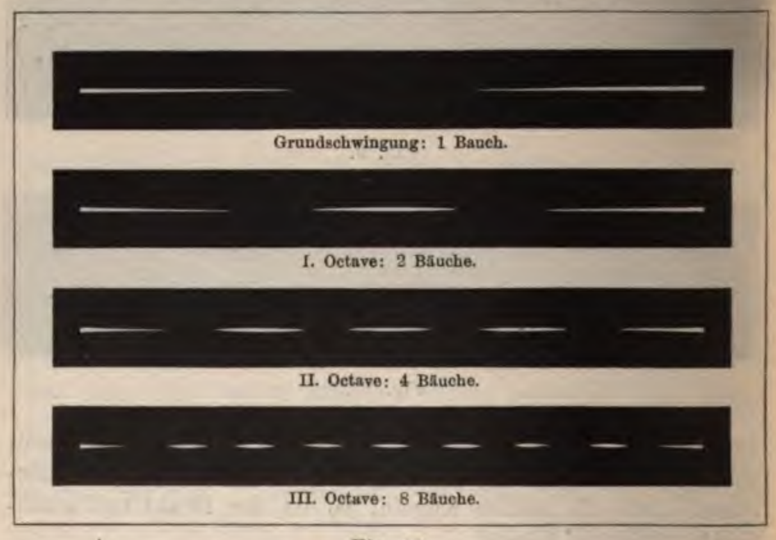


Fig. 12.

folge nicht in recht anschaulicher Weise das wiedergeben, was immer beobachtet wurde, so sei eine zeichnerische Darstellung gestattet, wie sie Fig. 12 bietet.

Es sind hier die Einteilungen wiedergegeben, wie sie am häufigsten erhalten wurden, und zwar konnte man durch Ver-

nderung der Funkenstrecke immer nur Vielfache der vorigen Einteilung erhalten. Entweder erhielt man 1, 2, 4, 8 Bäuche, oder 1, 3, 9 oder auch 1, 3, 6, 12 Bäuche, je nachdem sich der Draht in Schwingung befand oder am Anfang versetzt war.

Die Grösse der Funkenstrecke ergab nicht unbedingt die Anzahl der Bäuche; man konnte bei derselben Funkenstrecke einmal drei, ein anderes Mal vier Bäuche erhalten.

Befand sich aber der Draht in Schwingung, so konnte man nicht von drei zu vier Bäuchen übergehen, sondern musste erst auf die Grundschwingung zurückkehren und versuchen, den Draht mit einem dünnen Glasstab an einem Knoten festzuhalten und so bei gleichzeitiger Aenderung der Funkenstrecke die neue Schwingung zu erzwingen.



Fig. 13.

Einen Versuch, die mechanische Schwingung des Drahtes photographisch nachzuweisen, zeigt Fig. 13.

Der Draht ist vor einem weissen Schirm aufgestellt und dieser von vorn grell beleuchtet. Der Draht muss dann an den schwingenden Stellen unscharf werden, wie man auch auf dem Bilde sehen kann.

Man ging nun daran, die Bedingungen und Ursachen der Einteilung in helle und dunkle Stellen zu untersuchen.

Zuerst war die Frage zu beantworten, ob die Spannung der Saite einen Einfluss hatte.

Der Prüfungsdraht wurde daher so angeordnet, dass er ähnlich wie eine Geigensaite gespannt werden konnte. Die Funkenstrecke war vorher so gestellt, dass sie die Grundschwingung des Drahtes gab. Trotzdem die Spannung bis zum Zerreissen gesteigert wurde, konnte kein Zerfall in kleinere Wellen erzielt werden. Der Draht durfte nur nicht schlaff hängen, sonst war die Spannung beliebig, um eine Einteilung zu erhalten.

Um zu sehen, ob die Grösse der Kugeln von Einfluss ist, wandte man die Schaltung in Fig. 14 an.

Von dem negativen Conductor gingen zwei Drähte zu zwei Funkenstrecken, von denen F_1 Kugeln von 25 mm, und F_2 solche von 85 mm Durchmesser hatte. An diese schloss sich je ein Prüfungsdraht an. Sämtliche Drähte der beiden Seiten waren gleich lang.

Angenommen wurde, dass den grösseren Kugeln auch die grösseren Wellen entsprechen würden. Gerade das Umgekehrte traf ein. Bei F_1 und F_2 mussten gleiche Potentiale herrschen. Waren beide Funkenstrecken nicht gleich gross, so konnten

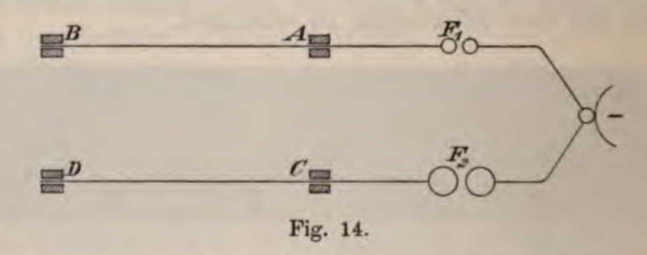


Fig. 14.

die Funken nur auf der kleineren von ihnen überspringen; ein gleichzeitiges Ueberspringen bei beiden bedingte auch deren gleiche Grösse.

Nun zeigte der Draht *CD* die kleinere Welleneinteilung. Diese Erscheinung ist vielleicht damit zu erklären, dass bei F_2 grössere Elektricitätsmengen überspringen als bei F_1, der Draht *CD* daher in lebhaftere Schwingungen gerät als *AB*.

Eine Gesetzmässigkeit hierüber konnte nicht aufgestellt werden, da nicht die nötige Auswahl der Kugeln zur Verfügung stand. Hat man es hier mit mechanischen Schwingungen zu thun, so müssen sich bei zwei verschieden langen Prüfungsdrähten, aber bei derselben Funkenstrecke, die Anzahl der Einteilungen verhalten wie ihre Längen. Zu diesem Zweck wurde das nächstliegende und bequeme Verhältnis 2 : 1 genommen, wie Fig. 15 zeigt.

Die Drähte waren hintereinander geschaltet und durch den Zwischendraht *BC* miteinander verbunden. Man erhielt jedoch auch dasselbe Resultat, wenn *CD* direct bei *B* anschloss. *AB* war 100 cm lang, *CD* 50 cm.

Die Voraussetzung bestätigte sich. Zeigten sich bei einer bestimmten Funkenstrecke F auf dem Draht AB z. B. vier Bäuche, so waren auf CD nur zwei sichtbar. Zeigte hingegen AB sechs dunkle Bäuche, so waren auf CD drei. Immer war das Verhältnis das ihrer Längen. Natürlich kann man hier nur gerade Vielfache einer Wellenlänge anwenden.

Fig. 15.

Zwei Versuche sind noch zu erwähnen, welche bezweckten, das Leuchten des Drahtes intensiver zu machen.

Einmal wurde der Prüfungsdraht in eine Vacuumröhre eingezogen. Hierbei leuchtete die ganze Röhre auf und war eine Einteilung nicht zu erkennen.

Dann verwandte man ein Inductorium mit Teslaanordnung wie in Fig. 16.

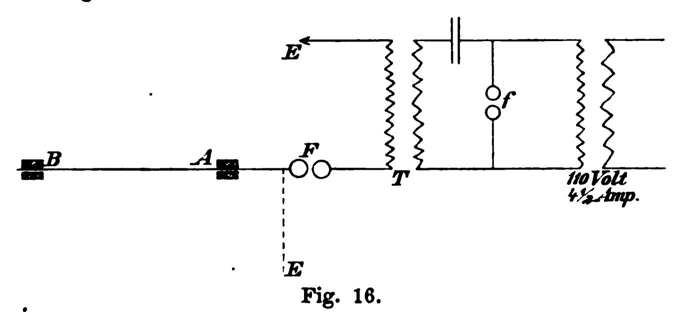


Fig. 16.

Diese Anordnung ergab nicht bessere Resultate als die Elektrisirmaschine. Der Prüfungsdraht war durch die Funkenstrecke F mit dem einen Ende der secundären Spule des Oeltransformators verbunden, während das andere zur Erde abgeleitet war. f war eine regulirbare Zinkfunkenstrecke.

Wollte man eine Einteilung auf dem Prüfungsdraht erhalten, so musste man beide Funkenstrecken zugleich verstellen. Machte man z. B. nur F kleiner, während f blieb, so leuchtete der Draht an seiner ganzen Länge auf. Erst wenn auch f verkleinert wurde, trat auf AB wieder eine Einteilung auf.

Die photographischen Aufnahmen sind jedoch bei Verwendung der Elektrisirmaschine gemacht worden.

IV.

Wie bereits gesagt wurde, konnte man an verschiedenen Tagen bei derselben Funkenstrecke eine verschiedene Anzahl leuchtender Wellen erhalten. Aus diesem Grunde wurde zuerst dem Ablesen der Funkenstrecke keine Bedeutung beigelegt. Erst als bei einigen Messungen an demselben Tage die Grössen der Funkenstrecken verglichen wurden, ergab sich, dass immer das gleiche Verhältnis auftrat.

Weil die Schwingungen denen einer Saite entsprechen, man auch hier von Grund- und Oberschwingungen spricht, so lag die Frage nahe, ob man in dem Längenverhältnis der Funkenstrecken das Tonverhältnis wiederfindet.



Fig. 17.

Da man nur eine beschränkte Anzahl von Einteilungen erzielte, so konnten nur wenige Zahlen in Betracht kommen. Fast immer war die Anzahl der Wellen das Doppelte der vorherigen Einteilung, d. h. die Octave, und somit muss das Verhältnis 2 : 1 meistens bestehen. Es sei hier gestattet, eine kurze Uebersicht der Schwingungen zu geben, soweit sie hier in Betracht kommen.

Schwingt der Draht im Grundton, so entsteht ein Bauch.

Zwei Bäuche bedeuten die erste Octave des Grundtones. Das Schwingungsverhältnis ist 2 : 1.

Drei Bäuche bedeuten die erste Quinte der ersten Octave, das Schwingungsverhältnis ist 3 : 2.

Sechs Bäuche bedeuten die erste Octave der ersten Quinte, und neun Bäuche die Quinte von der Octave der ersten Quinte.

Schwingt der Draht mechanisch, so muss er auch einen Ton erzeugen. Bei grossen Funkenstrecken kann man zwei Töne hören. Der eine ändert sich sowohl mit dem Laufe der Maschine als auch mit der Grösse der Funkenstrecke. Dies ist der Ton der letzteren, welcher sich in dem Draht fortpflanzt. Ausser diesem kräftigen Ton ist noch ein zweiter tiefer, aber schwacher Ton zu hören, der bald verschwindet oder für das Ohr nicht mehr hörbar wird, sowie der Ton der Funkenstrecke ein höherer ist.

Es lag nun nahe, nach einem Verhältnis zwischen der Zahl der Wellen, der Tonhöhe und der Grösse der Funkenstrecke zu suchen.

Die Untersuchung wurde in zwei Abteilungen geführt, und zwar wurde erst die Abhängigkeit der Tonhöhe von der Funkenstrecke und dann diejenige der Zahl der Wellen von der Funkenstrecke bestimmt. Ist dann die Abhängigkeit von der Funkenstrecke die gleiche, so konnte man ohne weiteres auf ihr gegenseitiges Verhältnis schliessen.

Zur Bestimmung der Tonhöhe kamen zunächst Stimmgabeln mit 32, 64, 128 Schwingungen zur Anwendung.

Weil es für eine Messung unsicher ist, mit dem Gehör die Terz, Quinte etc. zum Grundton zu bestimmen, man aber zu einem gegebenen Ton viel leichter die höhere oder tiefere Octave bestimmen kann, so wurde ein vorhandener Stimmgabelsatz benutzt, und zwar

C' mit	$n = 256$	Grundton	= I
E' „	$n = 320$	Terz	= III
G' „	$n = 384$	Quinte	= V
C'' „	$n = 512$	Octave	= II

Im Folgenden wird nur vom Grundton, Terz etc. die Rede sein, bezeichnet mit I, III etc., nicht aber von den Schwingungszahlen.

Der Gang der Maschine wurde möglichst constant gehalten und die Messungen rasch hintereinander ausgeführt.

Die Funkenstrecke wurde nun so lange verstellt, bis der Ton des Prüfungsdrahtes dem jeweiligen der Stimmgabel entsprach. Dann wurde, wie beschrieben, die Grösse der Funkenstrecke abgelesen. Waren alle möglichen Einteilungen bestimmt, so wurde die Messung wieder rückwärts ausgeführt.

Da die Messungen an verschiedenen Tagen gemacht wurden, so entsprachen dem Ton einer Stimmgabel auch verschiedene Funkenstrecken. Dadurch war es möglich, mit den verwendeten Stimmgabeln Funkenstrecken bis 8 mm zu untersuchen.

Bei den nun folgenden Messungen bezeichnet F immer die Grösse der Funkenstrecke in mm.

Messung I.

	F	n
I	4,2	32
II	2,3	64
III	1,2	128

Das Tonverhältnis ist hier 2 : 1. Vergleicht man die Funkenstrecke, so ist

$$4{,}2 : 2{,}3 = 2 : 1{,}09$$
$$2{,}3 : 1{,}2 = 2 : 1{,}04$$

Auf grössere Genauigkeit wird man auch bei den folgenden Messungen keinen Anspruch machen können, da das Gehör kein absolut sicheres Bestimmen ermöglicht.

Messung II.

	F
I	5,0
III	4,2
V	3,4
II	2,8

Hierbei muss man die Verhältniszahlen des Accordes $1 : {}^5/_4 : {}^3/_2 : 2$ erhalten.

Der Grundton wird immer als 1 gesetzt. Man erhält

$$5{,}0 : 4{,}2 = 5 : 4{,}2 \sim 5 : 4$$
$$5{,}0 : 3{,}4 = 3 : 2{,}04 \sim 3 : 2$$
$$5{,}0 : 2{,}8 \doteq 2 : 1{,}16 \sim 2 : 1$$

Dieselben Betrachtungen wiederholen sich bei den folgenden Messungen.

Messung III.

	F			F_m
I	3,9	4,0	4,0	3,96
III	2,5	3,0	3,0	2,84
V	2,1	2,3	2,5	2,30
II	1,9	1,9	2	1,93

F_m bedeutet das Mittel aus den drei Messungen.

$$3{,}96 : 2{,}84 = 5 : 3{,}6 \sim 5 : 4$$
$$3{,}96 : 2{,}30 = 3 : 1{,}75 \sim 3 : 2$$
$$3{,}96 : 1{,}93 = 2 : 0{,}975 \sim 2 : 1$$

Messung IV.

	F			F_m
I	6,3	6,3	6,1	6,22
III	5,5	5,1	5,5	5,35
V	4,1	3,8	3,8	3,90
II	3,1	3,0	3,0	3,03

$$6{,}22 : 5{,}35 = 5 : 4{,}3 \sim 5 : 4$$
$$6{,}22 : 3{,}9 = 3 : 1{,}89 \sim 3 : 2$$
$$6{,}22 : 3{,}03 = 2 : 0{,}975 \sim 2 : 1$$

Messung V.

	F		F_m
I	8	7,9	7,95
III	6,2	6,0	6,10
V	5,0	4,8	4,90
II	4,0	4,1	4,05

$$7{,}95 : 6{,}1 = 5 : 3{,}85 \sim 5 : 4$$
$$7{,}95 : 4{,}9 = 3 : 1{,}85 \sim 3 : 2$$
$$7{,}95 : 4{,}05 = 2 : 1{,}04 \sim 2 : 1$$

Aus diesen fünf Messungen lässt sich ohne Schwierigkeit das Gesetz ableiten, dass die Tonhöhe der Grösse der Funkenstrecke umgekehrt proportional ist.

Es bleibt nun noch der zweite Teil der Messung zu bestimmen, eine Uebereinstimmung zwischen der Grösse der Funkenstrecke und der Wellenzahl zu finden.

Die jetzt angegebenen Zahlen sind gleich die Mittelwerte aus mehreren Messungen.

Es wurde gefunden bei

Messung I.

F	N
4,10	4
2,05	8

Es bedeute N die Anzahl der Bäuche. Dann verhält sich

$$4{,}10 : 2{,}05 = 2 : 1 = 8 : 4$$

Acht Bäuche entsprechen der Octave der Schwingung mit vier Bäuchen. Mithin verhalten sich hier die Funkenstrecken umgekehrt wie die Anzahl der Bäuche.

Messung II.

F	N
8	2
4	4

$$8 : 4 = 2 : 1 = 4 : 2$$

Messung III.

F	N
4,2	4
2,2	8
1,2	16

Hier sind zwei Octaven bestimmt; man muss also das Verhältnis 2 : 1 erhalten.

$$4{,}2 : 2{,}2 = 2 : 1{,}05 \sim 2 : 1 = 8 : 4$$
$$2{,}2 : 1{,}2 = 2 : 1{,}09 \sim 2 : 1 = 16 : 8$$

Messung IV.

F	N
3,35	6
2,50	8
1,20	16

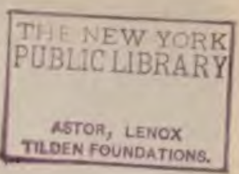
Nach Schlussfolgerungen aus den oberen Messungen würde vier Bäuchen eine Funkenstrecke von 5 mm entsprechen. Eine Schwingung mit sechs Bäuchen ist die Quinte derjenigen mit vier Bäuchen, ihr Verhältnis also 3 : 2. Nun ist

$$5 : 3{,}35 = 3 : 2{,}01 \sim 3 : 2$$
$$2{,}50 : 1{,}20 = 2 : 0{,}96 \sim 2 : 1$$

Eine ähnliche Messung ist die folgende:

Messung V.

F	*N*
4,43	6
6,20	8



Eine Schwingung von vier Bäuchen ist die tiefere Octave derjenigen mit acht Bäuchen, sie würde eine Funkenstrecke von 3,1 mm bedingen.

Nun entsprechen sechs Bäuche der Quinte von vier Bäuchen, ihr Verhältnis ist also 3:2. Mithin

$$4,43 : 3,1 = 3 : 2,1 \sim 3 : 2.$$

Diese Messungen sind an verschiedenen Tagen, unabhängig voneinander, gemacht worden. Auch hier findet sich das Gesetz bestätigt, dass die Zahl der auf dem Prüfungsdraht entstehenden Wellen im umgekehrten Verhältnis zur Grösse der Funkenstrecke steht.

Im Anschluss hieran erschien es interessant zu untersuchen, ob die Tonhöhe abhängig ist von der Anzahl der überspringenden Funken, und welche Gesetzmässigkeit hier herrscht.

Dass die Anzahl der Funken die Höhe des Tones bedingt, beweist sofort ein verschieden schneller Gang der Maschine. Es ist klar, dass bei einem schnelleren Lauf der Influenzmaschine mehr Funken überspringen müssen als bei einem langsamen. Hält man jedoch den Gang derselben constant, so leuchtet nicht von vornherein ein, wie die Funkenzahl bei wachsender Funkenstrecke abnimmt.

Angaben hierüber sind in der Literatur nicht zu finden gewesen.

Dagegen sind Messungen von Potentialen an Funkenstrecken in grosser Zahl gemacht worden. Lane, Harris, Riess fanden, dass die Schlagweite bei gleichem Zustande der Luft dem Potentialwert der Belegung proportional ist. Neuere Untersuchungen haben diese Gesetzmässigkeit nicht ergeben.

Indem man nun durch gleichmässigen Gang der Maschine das Potential constant hielt, wurde versucht, das Gesetz des

Zusammenhanges von Funkenzahl und Schlagweite mit Hülfe einer photographischen Methode zu prüfen.



Fig. 18.

Man liess nämlich die Funkenstrecke vor dem Objectiv einer Camera vorbeischwingen. Um immer die gleiche Geschwindigkeit zu haben, befestigte man die Funkenstrecke an einem Secundenpendel, wie Fig. 18 schematisch zeigt, und zog dasselbe immer um das gleiche Stück a aus der Gleichgewichtslage, welches durch den feststehenden Anschlag f markirt war.

Es war

$$l = 100 \text{ cm}, \quad a = 12 \text{ cm}.$$

Hieraus berechnet sich

$$h = l - \sqrt{100^2 - 12^2} = 100 - 99{,}277,$$
$$h = 0{,}723 \text{ cm}.$$

Die Geschwindigkeit beim Durchgang durch die Gleichgewichtslage ist

$$v = \sqrt{2\,g\,h} = \sqrt{2 \,.\, 981{,}4 \,.\, 0{,}723},$$
$$v = 37{,}67 \text{ cm}.$$

Die Schwingungsdauer wurde bestimmt mit

$$t = 0{,}9545''$$

Der Apparat gab die Funkenstrecke in Naturgrösse wieder.

Die Geschwindigkeit der Influenzmaschine wurde nach dem Takte eines Metronom mit der Hand constant gehalten.

Es wurden mehrere Versuchsreihen mit den Strecken $F = 1, 2, 4, 6$ mm angestellt. Die Conductoren der Maschine waren mit den Kugeln der Funkenstrecke direct verbunden.

Leider fielen diese Versuche in eine Zeit, wo fast täglich reichliche Niederschläge stattfanden, und die Feuchtigkeit der Luft eine sehr grosse war. Es war deshalb unmöglich, ein Ueberspringen der Funken bei $F = 8$ mm zu erhalten, während dies früher bei $F = 25$ mm noch erreicht wurde. Aus diesem Grunde wird das Resultat viel zu ungünstig sein. Es werden bei trockener Jahreszeit genauere Resultate zu erzielen sein.

Die so gewonnenen Ergebnisse zeigen die Figg. 19 a—d.

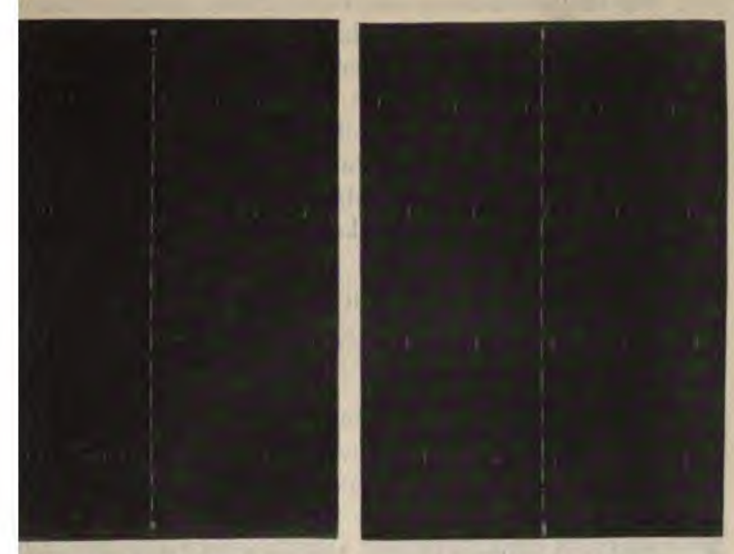


Fig. 19a. $F = 1$ mm.

Fig. 19b. $F = 2$ mm.

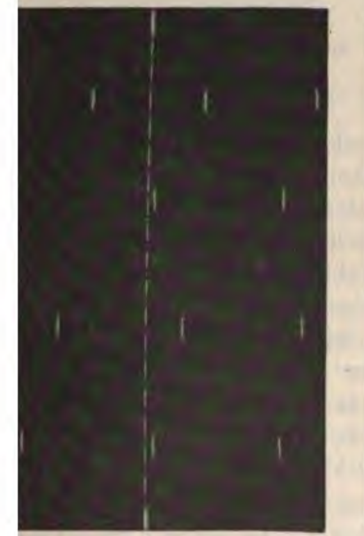


Fig. 19c. $F = 4$ mm.

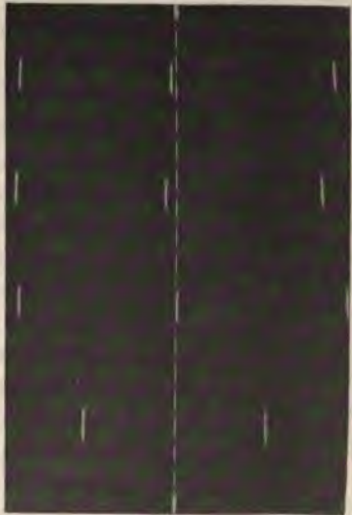


Fig. 19d. $F = 6$ mm.

Mehrere Aufnahmen auf einer Platte wurden durch Verschieben des Objectivbrettes erhalten. Die Ruhelage des Pendels wurde oben und unten markirt, und diese Marken auf dem Negativ durch eine Mittellinie verbunden.

Nimmt man die Geschwindigkeit des Pendels in der Nähe der Ruhelage als gleichmässig an, so kann aus den vier Werten bei jeder Aufnahme im Mittel berechnet werden, auf wieviel Centimeter ein Entladungsfunke fällt.

Man findet:

bei $F = 1$ mm	entfällt	1	Funke	auf	0,86 cm
„ $F = 2$ „	„	1	„	„	1,50 „
„ $F = 4$ „	„	1	„	„	2,62 „
„ $F = 6$ „	„	1	„	„	3,43 „

Nimmt also die Zahl der Funken umgekehrt mit der Grösse der Funkenstrecke ab, so müssen sich diese Zahlen rechts wie die Funkenstrecken verhalten.

Betrachtet man trotz der wenig lebhaften Funkenbildung $F = 6$ mm als normal, entfällt also hier ein Funke auf 3,43 cm, so muss nach der Annahme bei $F = 4$ mm ein Funke auf

$$\frac{4}{6} \cdot 3{,}43 = 2{,}3 \text{ cm}$$

entfallen.

In Wirklichkeit entfällt er auf 2,62 cm; man gewinnt also nur

$$\frac{2{,}3}{2{,}62} \cdot 100 = 88 \text{ Proc.}$$

und verliert 12 Proc. der Funken.

Nimmt man nun die Funkenzahl bei $F = 4$ mm als normal an, so rechnet man ganz analog für $F = 2$ mm einen Verlust von 11,8 Proc. aus und endlich für $F = 1$ mm 12,8 Proc.

Man erhält so im Durchschnitt eine Genauigkeit von 80 Proc., was nicht überraschend kam.

Bei dem zweiten Teil dieser Aufgabe bediente man sich der gleichen Anordnung, nur wurde, wie bei den früheren Versuchen, der positive Conductor zur Erde abgeleitet, der negative mit der Funkenstrecke verbunden, an deren anderen Kugel der Prüfungsdraht angehängt wurde.

Da hier ohne Rückleitung gearbeitet wurde, so sind die Funkenbilder bedeutend schwächer. Es wurden zwei Versuche an verschiedenen Tagen angestellt mit den Stimmgabeln $n = 64$ und $n = 128$.

Die Funkenstrecke wurde so lange verstellt, bis der Ton des Prüfungsdrahtes mit dem der Stimmgabel übereinstimmte. Dann liess man die Funkenstrecke vor der Camera vorbeischwingen.

Tiefe Töne zu bestimmen war schwierig, da das Ohr zu unzuverlässig war. Bei hohen Tönen wird die Funkenstrecke so klein, dass der Funke auf die photographische Platte nicht mehr wirken kann.



Fig. 20.

Fig. 21.

Eine andere Fehlerquelle war noch dadurch vorhanden, dass der Gang der Maschine mit der Hand constant gehalten werden musste.

Die Aufnahmen sind in den Figg. 20 u. 21 wiedergegeben. Der kleineren Funkenstrecke entspricht die grössere Schwingungszahl des höheren Tones und umgekehrt.

Bei Fig. 20 lässt sich leicht aus den oberen zwei Aufnahmen bestimmen, dass auf

1 cm entfallen 3 Funken

und da die Geschwindigkeit $v = 37{,}67$ cm ist, so entfallen auf die Secunde

$$3 : 37{,}67 = 113{,}01 \text{ Funken.}$$

Die Stimmgabel machte 128 Schwingungen in der Secunde Man erreichte also eine Genauigkeit von 88,3 Proc.

Analog bei den unteren zwei Aufnahmen entfallen

auf 1 cm 1,32 Funken,
„ 37,67 cm 49,72 Funken.

Da die Stimmgabel 64 Schwingungen machte, bedeutet dies eine Genauigkeit von 77,5 Proc.

Bei Fig. 21 ist dieselbe Berechnung anzustellen. Es ergaben sich 119,19 bez. 45,23 Funken, was einer Genauigkeit von 93,1 Proc. bez. 70,7 Proc. gleichkommt.

Auch hier würde man bei trockenem Wetter bessere Resulte erzielen können.

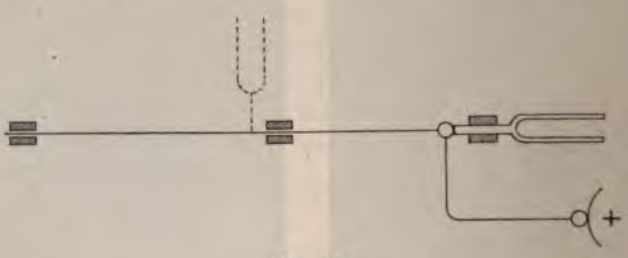


Fig. 22.

Hierdurch ist mit einiger Genauigkeit der Beweis erbracht, dass der Ton einer Funkenstrecke der Zahl der überspringenden Funken entspricht.

Betrachtet man die bisherigen Ergebnisse, so könnte man leicht den Schluss ziehen, dass bei gleichbleibender Funkenstrecke und doppelter Tourenzahl der Maschine der Ton doppelt so hoch wird und auch der Prüfungsdraht die doppelte Welleneinteilung zeigen müsste. Diese konnte jedoch nicht nachgewiesen werden.

Auch misslang ein Versuch, die Einteilung des Prüfungsdrahtes durch mechanische Erschütterungen mittels einer Stimmgabel zu erhalten.

Die Anordnung zeigt Fig. 22. Die eine Kugel der Funkenstrecke wurde mit dem Prüfungsdraht und dem positiven Conductor der Maschine verbunden. Mit dem letzteren deshalb, um ein gleichmässiges Leuchten zu erreichen; da durch Ver-

bindung mit dem negativen Conductor der Draht sich nur mit leuchtenden Punkten besetzte. An die Kugel wurde nun eine in Schwingung versetzte Stimmgabel gehalten und sollte so der Draht eine Welleneinteilung zeigen durch die Stösse, die sich in ihm fortpflanzen.

Das Experiment gelang nicht, ebensowenig, wenn man die Stimmgabel seitlich, wie punktirt, an den Draht hielt.

Zieht man die gefundenen Resultate zusammen, so kann man folgende Sätze aufstellen:

1. Lässt man an einem Ende eines isolirt ausgespannten Drahtes Elektricität von hoher Spannung überspringen, so gerät der Draht in Transversalschwingungen.

2. Ist diese Elektricität negativ und die Spannung so hoch, dass sichtbare Seitenentladungen längs des Drahtes stattfinden, so wird diese an den Stellen, an denen sich der Draht in Schwingung befindet, für das Auge unsichtbar und bleibt nur an den Schwingungsknoten sichtbar. Man erhält so das Bild einer leuchtenden Welle.

3. Durch Veränderung der Funkenstrecke kann man die Zahl dieser Wellen vergrössern und verkleinern. Die Anzahl der Schwingungsbäuche ist umgekehrt proportional der Grösse der Funkenstrecke.

4. Die Höhe des Tones, der längs des gespannten Drahtes hörbar ist, ist umgekehrt proportional der Grösse der Funkenstrecke und seine Schwingungszahl entspricht der Anzahl der überspringenden Funken.

Zum Schlusse sei es mir gestattet, meinen hochverehrten Lehrern, Hrn. Professor Dr. Wachsmuth für die Anregung zu dieser Arbeit, und dem Director des Physikalischen Instituts, Hrn. Professor Dr. phil. et med. L. Matthiessen, für die Bereitwilligkeit, mit der er mir die erforderlichen Apparate zur Verfügung stellte, meinen ergebensten Dank auszusprechen.

(Eingegangen 8. Januar 1901.)

---

7. *Beiträge zur Kenntnis der Cohärerwirkung;* *von K. E. Guthe.*

Die sogenannte Cohärerwirkung hat zur Aufstellung einer Anzahl von Theorien geführt, die so verschieden voneinander sind, dass es geboten scheint, durch zweckmässige Experimentaluntersuchungen teils die aufgestellten Hypothesen zu prüfen, teils unsere Kenntnis dieser noch so wenig verstandenen Erscheinungen zu erweitern. Dies ist der Zweck der vorliegenden Untersuchungen, die sich naturgemäss in die folgenden Capitel einteilen lassen:

1. Die negative Cohärerwirkung und Kritik der Bose'schen Theorie.
2. Studium der kritischen Potentialdifferenz für Cohärer aus verschiedenen Metallen.
3. Messung des Cohärerwiderstandes mit Wechselstrom.
4. Einfluss einer Erwärmung der Contactstelle auf den Cohärer und Discussion der dabei auftretenden Erscheinungen.

1. Experimente über die negative Cohärerwirkung.

Mit dem Namen „negative Cohärerwirkung" bezeichne ich die schon häufig beobachtete, scheinbar ganz anormale Widerstandsvergrösserung, welche zuweilen anstatt der gewöhnlich zu beobachtenden Verringerung des Widerstandes bei den Cohärern auftritt. Diese Erscheinung hat Bose[1]) in neuerer Zeit zur Aufstellung einer Theorie geführt, nach welcher die negative Cohärerwirkung für gewisse Substanzen, bei denen er sie besonders häufig fand, die normale sein soll. Er nimmt an, dass jedes Metall in zwei Modificationen existire, eine A-Modification, welche einen hohen elektrischen Widerstand habe, und eine B-Modification mit niedrigem Widerstand. Er meint, dass der Unterschied zwischen den beiden Zuständen hauptsächlich auf einer Verschiedenheit der Molecüllagerung

1) J. Ch. Bose, Proc. Roy. Soc. **66.** p. 450. 1900; Rapports Congr. Intern. Paris **3.** p. 561. 1900.

beruhe. Bei manchen Metallen, die er positive nennt, z. B. bei Eisen, sei die A-Modification die normale, bei anderen, z. B. bei Kalium, die B-Modification.

Trifft nun eine elektrische Welle auf den Cohärer, so tritt nach Bose eine Umwandlung der normalen in die andere Modification ein, doch erstreckt sich diese nur auf die Oberflächenschichten, während die tiefer liegenden im normalen Zustande bleiben. Darum wendet er die Cohärersubstanz möglichst in gepulverter Form an, um dadurch eine grosse Oberfläche zu erzielen und die Empfindlichkeit zu steigern.

Gegen Bose's Auffassung sprechen jedoch die Versuche von Branly[1]), Guthe und Trowbridge[2]), bei denen Metallplatten oder Kugeln als Cohärerelektroden benutzt wurden, die stets eine sehr grosse Empfindlichkeit zeigten.

Bose fand ferner bei der Anwendung eines mit gepulverter Substanz gefüllten Cohärers, dass der Widerstand bei Wiederholung des elektrischen Einflusses in unregelmässiger Weise hin und herschwankte, in „Oscillationen" geriet, die er auf plötzliche Auslösung der entstandenen Spannungen zwischen den äusseren und inneren Schichten der Metallstückchen zurückführt. Dieses Auftreten von Oscillationen hält Bose für eine Bestätigung seiner Theorie.

Beobachtungen über die Abhängigkeit des Cohärerwiderstandes von der Funkenzahl sind aber auch von Mizuno[3]) angestellt worden. Die Curven, die er erhielt, gleichen ganz und gar dem Typus der Bose'schen Curven für positive Metalle. In einem Falle jedoch hat er einen Bleicohärer mit nur einem, bez. zwei Contacten angewandt. Im ersteren Falle war nichts von einer Oscillation zu bemerken, sondern der Widerstand fiel schon nach zwei Funken auf ein constantes Minimum; bei zwei Contacten fällt der Widerstand nach einem einmaligen Hinaufgehen ebenfalls auf einen constanten Minimalwert. Auch Mizuno's Resultate mit dem nach Bose am meisten negativen Kalium widersprechen der Theorie des letzteren vollständig,

1) E. Branly, Compt. rend. **127.** p. 219. 1898; **128.** p. 1089. 1899.

2) K. E. Guthe u. A. Trowbridge, Phys. Rev. **11.** p. 22. 1900; vgl. auch A. Trowbridge, Am. Journ. Science September 1899.

3) T. Mizuno, Phil. Mag. **50.** p. 445. 1900.

da auch mit diesem Metall die positive Cohärerwirkung die normale war.

Die Vermutung liegt also nahe, dass die negative Cohärerwirkung und das Auftreten der „Oscillationen“ nur durch den complexen Charakter des Cohärers hervorgerufen werden und dass bei Anwendung möglichst einfacher Cohärer diese Erscheinungen, wenn sie überhaupt eintreten, als „störende“ Einflüsse nachgewiesen werden können.

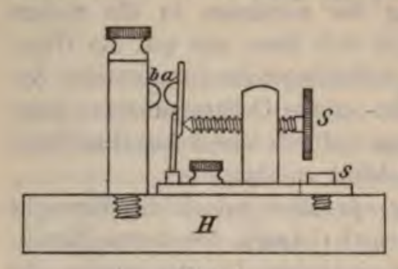


Fig. 1.

Der von mir benutzte Cohärer hatte die in Fig. 1 angegebene Form. Der Contact wurde zwischen zwei Metallcalotten hergestellt, die mit einem stählernen Stempel aus einem Blech des betreffenden Metalles ausgestanzt waren. Ihr Durchmesser betrug einen Centimeter. Die eine Calotte (*b*) wurde an einen dicken Messingcylinder gelötet, der oben eine Klemmschraube trug und in die Holzplatte *H*, die als Basis des ganzen Instrumentes diente, fest eingeschraubt war. Auf der Holzplatte bewegte sich eine Messingplatte, die durch zwei Klemmschrauben (*s*) in beliebiger Stellung festgeklemmt werden konnte. Diese Messingplatte trug ebenfalls eine Klemmschraube und an einem federnden Messingstift eine dünne Messingplatte, auf der die andere Metallcalotte (*a*) angelötet war. Der Contact zwischen (*a*) und (*b*) bildet den Cohärer und die feinere Justirung desselben geschah mit der Schraube *S*, die ebenfalls mit der Metallplatte fest verbunden war.

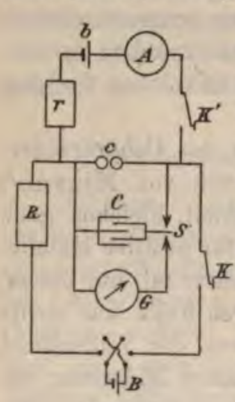


Fig. 2.

Die Beobachtungsmethode ist aus Fig. 2 ersichtlich. *c* stellt den Cohärer vor. Um seinen Anfangswiderstand schätzen zu können, wurde er mit einem Hülfskreise verbunden, der eine schwache elektromotorische Kraft ($b = 0,4$ Volt) und ein Milleampèremeter enthielt. Durch vorsichtiges Bewegen der Justirungs-

schraube konnte der ursprüngliche Widerstand innerhalb weiter Grenzen variirt werden. Da ich in den folgenden Versuchen stets blank geputzte Metallcalotten verwendete, war grosse Sorgfalt dabei notwendig. Es ist viel leichter einen passenden hohen Widerstand zu erhalten, wenn die Metalle einige Zeit der Luft ausgesetzt sind.

Nach der Justirung wurde der Hülfskreis geöffnet und der Cohärereffect durch eine Batterie von höherer elektromotorischer Kraft (B) durch das Schliessen des Schlüssels K hervorgebracht.[1]) Dieser Strom wurde nur so lange geschlossen gehalten, als zur Ladung und Entladung des Condensators C notwendig war. Der bei der Entladung des Condensators erhaltene Galvanometerausschlag ergab dann die Potentialdifferenz an den Enden des Cohärers mittels der mit einem Normalelement gefundenen Constanten. Ein Schliessen des Hülfskreises kurz nach dem Oeffnen des Schlüssels K erlaubte die Widerstandsänderungen, die nachträglich eintraten, zu beobachten.

Zur Anwendung kamen Cohärer aus Silber, Kupfer, Zink, Aluminium, Cadmium, Zinn, Eisen, Neusilber, Nickel und Wismut.

Die negative Cohärerwirkung konnte ich bei allen diesen Metallen unter gewissen Umständen beobachten, doch tritt dieselbe bei den weicheren viel häufiger als bei den härteren Metallen ein und zwar besonders bei frisch hergestellten Cohärern. Dies hat auch Bose beobachtet. Die Erscheinung war ungefähr folgende. Bei der Justirung des Instrumentes trat im Ampèremeter ein Hin- und Herschwanken der Nadel ein, bis sie sich schliesslich ruhig einstellte. Sobald nun der Hauptstrom durch den Cohärer geschlossen wurde, ging der Widerstand sehr hoch hinauf. Gleich nach dem Oeffnen des Hauptstromes wurde der Hülfskreis geschlossen. Das Ampèremeter zeigte dann gewöhnlich durch ein verhältnismässig rasches, aber unregelmässiges Ansteigen des Ausschlages, dass sich der kleinere

1) Es scheint mir, dass man bisher stets zu viel Gewicht auf das Vorhandensein elektrischer Oscillationen gelegt hat. Die Hauptwirkung derselben beruht auf der Grösse der ersten Amplitude. Die Benutzung einer Batterie in der oben beschriebenen Weise ist jedenfalls für das Studium des Cohärereffectes vorzuziehen.

Widerstand, oder metallische Contact, wieder bildete. Dies würde ganz dem Geräusch im Telephon, welches Bose nach der Einwirkung elektrischer Wellen beobachtete[1]), oder dem Hin- und Herschwanken des Galvanometerausschlages entsprechen, der auf die Unschlüssigkeit der Molecüle, welche Structur sie annehmen wollen, zurückzuführen sein soll.

Auf mich machte die ganze Erscheinung den Eindruck, als ob an der Contactstelle ein Teilchen der Cohärersubstanz eingelagert sei, welches dann in einer Weise, welche der Decohäsion des Neugschwender'schen Apparates[2]) vollständig entspricht, bei starker elektrischer Einwirkung zur Seite geschleudert wird, bei kleinem durch den Cohärer gehenden Strom jedoch seine normale Lage wieder einnimmt. So hat ja auch Bose für negative Metalle eine positive Cohärerwirkung gefunden, wenn der erregende Funke in grosse Entfernung gerückt, also sein Einfluss schwach wurde. Auch Branly's Beobachtung[3]) einer plötzlichen Widerstandserhöhung, wenn der Cohärer mit dem einen Pole einer Wimshurstmaschine verbunden wurde, ist wohl in der obigen Weise zu erklären.

Die von mir beschriebene Erscheinung wiederholte sich oft hintereinander, wenn der Cohärer nicht erschüttert wurde. Zuweilen trat allerdings auch ein völliges Brechen des Contactes ein und der Widerstand blieb dauernd unendlich. Die Calotten mussten dann näher aneinander gebracht werden, doch trat dann fast stets die positive Cohärerwirkung ein.

Um die oben gemachte Annahme noch näher zu prüfen, wurden die Calotten, falls die negative Cohärerwirkung eingetreten war, weiter zusammengepresst. Nur eine geringe Widerstandsverminderung erfolgte, während bei normalem Zustande eine kleine Vergrösserung des Druckes den Widerstand schnell auf praktisch Null reducirte. Es blieb also das Teilchen mit dem relativ hohen Widerstande zwischen den Calotten. Andererseits gelang es mir häufig, das Teilchen durch starkes Klopfen oder dadurch zu entfernen, dass ich einen Tropfen Paraffinöl auf die Contactstelle brachte. Die negative Cohärer-

1) J. Ch. Bose, Proc. Roy. Soc. **65.** p. 168. 1899.
2) E. Aschkinass, Wied. Ann. **67.** p. 842. 1899.
3) E. Branly, Compt. rend. **130.** p. 1068. 1900.

wirkung trat bei den weichen Metallen besonders häufig auf, wenn die Calotten kurz vorher mit Smirgelpapier gereinigt waren, verschwand aber, wenn sie mit feinem Handschuhleder gerieben wurden.

Nach den vorliegenden Versuchen dürfte es wahrscheinlich sein, dass die negative Cohärerwirkung bei der so häufig angewandten Form des Cohärers auf secundäre Erscheinungen zurückzuführen ist, die mit der eigentlichen Cohärerwirkung nichts zu thun haben; denn, wenn die Cohärersubstanz in gepulvertem Zustande angewandt wird, so werden solche störende Einflüsse besonders stark hervortreten.[1])

2. Die kritische Potentialdifferenz.

In einer früheren Arbeit haben Guthe und Trowbridge[2]) gezeigt, dass bei der Anwendung eines dem oben beschriebenen ganz ähnlichen Instrumentes gewisse Gesetzmässigkeiten auftraten, die sich bei allen untersuchten Metallen: Eisen, Kupfer, Blei und Phosphorbronze, als gültig erwiesen.

Wir zeigten, z. B., wenn die Cohärerwirkung durch eine in den Cohärerkreis eingeschaltete Batterie bewirkt war, 1. dass die Potentialdifferenz an den Enden des Cohärers bei genügender Stromstärke einen constanten Wert besitzt, welcher von einer weiteren Steigerung des Stromes oder einer Aenderung der angelegten elektromotorischen Kraft unabhängig ist, für verschiedene Metalle jedoch verschiedene Werte hat. Für mehrere Contacte ist dieselbe der Zahl derselben proportional. 2. Dass bei der Anwendung einer elektromotorischen Kraft, die kleiner als diese Potentialdifferenz ist, keine Cohärerwirkung eintritt. Wir nannten daher diesen Wert die „kritische Potentialdifferenz".

Ich habe nun diese Untersuchungen auf eine grössere Anzahl von Metallen ausgedehnt, und zwar auf die schon im Cap. 1 erwähnten. Da mir nur daran lag, die kritische Potentialdifferenz dieser Metalle zu bestimmen, wurde von einer genauen Messung des Stromes abgesehen, doch vergewisserte ich mich in jedem Falle durch Aenderung der Stromstärke und der

1) Eine soeben erschienene Untersuchung von E. Marx, Physik. Zeitschr., den 26. Januar 1901, über die Wirkungsweise des Schäfer'schen Anticohärers, bestätigt meine oben ausgesprochenen Vermutungen.

2) K. E. Guthe u. A. Trowbridge, Phys. Rev. 11. p. 22. 1900.

angelegten elektromotorischen Kraft, dass der constante Wert erreicht war.

Der Apparat war der oben beschriebene. Nach dem Eintreten der Cohäsion wurde in jedem Falle der Contact gebrochen und von neuem justirt, häufig auch die Berührungsstelle der Metallcalotten geändert.

a) Cohärer, bestehend aus nur einem Metall.

Die Galvanometerausschläge, welche durch die Entladung des Condensators erhalten wurden, variirten unter normalen Bedingungen nur um wenige Scalenteile. Es wurde für jedes Metall aus einer Reihe von 30 bis 40 Beobachtungen das Mittel genommen. In der folgenden Tab. 1 sind nur die Mittelwerte der Ausschläge und der daraus berechneten Potentialdifferenzen angegeben.

Tabelle 1.

	Ag	Cu	Zn	Al	Cd	Sn	Fe	Neu-S.	Ni	Bi
Ausschlag	13,7	21,6	22,2	54,3	25,1	21,9	51,0	32,0	46,9	42,0
P.-D. in Volt	0,0622	0,094	0,096	0,236	0,109	0,095	0,222	0,139	0,204	0,183

Die kritische Potentialdifferenz für die verschiedenen Metalle variirt also von 0,062 bis 0,236 Volt. Beim Neusilber steht dieselbe zwischen denen seiner Bestandteile.

Ein eigenartiger Zusammenhang scheint zwischen dem Atomgewicht und der kritischen Potentialdifferenz zu bestehen. Multipliciren wir die beiden miteinander, so erhalten wir:

Tabelle 2.

Ag	Cu	Zn	Al	Cd	Sn	Fe	Ni	Bi
6,71	5,96	6,18	6,39	12,22	11,22	12,43	11,93	39,06

Ag, Cu, Zn und Al geben also ungefähr dasselbe Product: 6,31; Cd, Sn, Fe, Ni ein Product, das fast zweimal so gross ist: 11,95, während Bi ganz allein steht mit einem Product, das sechsmal so gross ist als das kleinste: $39,06 = 6 \times 6,51$. In der bereits citirten Arbeit[1]) fanden wir für Pb als

1) K. E. Guthe u. A. Trowbridge, l. c. p. 32.

kritische Potentialdifferenz 0,127 Volt; das giebt als Product 26,28 = 4 × 6,57.

Die ersten vier Metalle sind die besten Leiter für Wärme sowohl wie für Elektricität, während Pb und Bi auch in dieser Beziehung für sich allein stehen.

Diese Constanz des Productes aus kritischer Potentialdifferenz und Atomgewicht für gewisse Metallgruppen ist jedenfalls auffallend. Vom Krümmungsradius ist dieselbe nach den Versuchen von Guthe und Trowbridge unabhängig. Ob jedoch die Temperatur, Oxydation der Metalle etc. einen Einfluss auf diese Erscheinung haben, sollte durch weitere Versuche festgestellt werden, da das vorliegende Beobachtungsmaterial noch nicht umfangreich genug ist.

b) Cohärer, bestehend aus verschiedenen Metallen.

Es schien bei der Verschiedenheit der kritischen Potentialdifferenzen von Interesse, zu untersuchen, ob die Richtung des Stromes auf den Cohärereffect von Einfluss sei, wenn derselbe zwischen verschiedenen Metallen hervorgerufen wird. Die folgende Tab. 3 enthält die Resultate. Darin ist die Potentialdifferenz angegeben, welche ich erhielt, wenn der Strom von dem in der horizontalen Reihe gegebenen zu dem in der verticalen Reihe stehenden Metall floss. Die Galvanometerausschläge waren im allgemeinen constant, nur mit Aluminium als einer Calotte erhielt ich durchaus unbefriedigende Resultate. Die Ausschläge wichen in den einzelnen Reihen beträchtlich voneinander ab; ich habe daher das Aluminium in der Tabelle nicht mit angeführt.

Tabelle 3.

	Ag	Cu	Zn	Cd	Sn	Fe	Neu-S.	Ni	Bi
Ag	0,062	0,082	0,125	0,127	0,164	0,256	0,078	0,209	0,13
Cu	0,086	0,094	0,135	0,142	0,170	0,252	—	—	0,13
Zn	0,119	0,143	0,096	0,109	0,103	0,141	—	—	0,117
Cd	0,118	0,131	0,105	0,109	0,087	0,174	0,091	—	—
Sn	0,166	0,179	0,089	0,087	0,095	0,210	ca. 0,2	0,152	ca. 0,13
Fe	0,300	0,278	0,141	0,152	0,152	0,222	0,243	0,300	0,220
Neu-S.	0,078	—	—	0,10	ca. 0,20	0,261	0,139	0,170	0,165
Ni	0,122	—	—	—	0,109	0,287	0,191	0,204	0,117
Bi	0,26	0,261	0,196	—	ca. 0,22	0,304	0,209	0,196	0,183

Im allgemeinen hat also die Richtung des Stromes keinen erheblichen Einfluss auf die kritische Potentialdifferenz zwischen zwei verschiedenen Metallen. Grössere Unterschiede treten nur beim Wismut, geringere beim Ni und zwischen Fe und Sn auf. Der Peltiereffect kann kaum als maassgebend für diese Unterschiede herangezogen werden, da die Variationen beim Ni und Bi in entgegengesetztem Sinne sind und auch für Neusilber kein Einfluss der Stromrichtung zu beobachten ist.

Hier möge nur noch die Uebereinstimmung der beiden Reihen für Ag und Cu einerseits und für Zn und Cd andererseits hervorgehoben werden. Die betreffenden Metalle stehen einander auch chemisch sehr nahe. Mit Fe erhielt ich durchweg die höchsten Potentialdifferenzen.

3. Messung des Cohärerwiderstandes mit Wechselstrom.

Die Existenz der kritischen Potentialdifferenz, welche proportional der Anzahl der Contactstellen ist, ferner die Abhängigkeit derselben von der Stromstärke, welche wenigstens für Eisen und Kupfer durch die Formel

$$p = n P(1 - e^{-k i})$$

dargestellt werden kann, wo n die Anzahl der Contactstellen, P die kritische Potentialdifferenz eines Contactes, i die Stromstärke und k eine Constante bedeuten, hatten die Vermutung nahe gelegt, dass wir es hier mit einer Art elektrolytischer Polarisation zu thun hätten. Ich[1]) habe dieselbe Formel als gültig für die Polarisation von Cu in $CuSO_4$ gefunden.

Um diese Annahme näher zu prüfen, wurde der Cohärerwiderstand nicht allein durch die Potentialdifferenz an den Enden und den ihn durchfliessenden Strom gemessen, sondern auch nach der Kohlrausch'schen Methode vermittels eines Wechselstromes. Beide Methoden ergeben dasselbe Resultat für den Widerstand. Auch trat bei der Wechselstrommethode ein vollkommenes Schweigen des Telephons ein, wonach eine elektrolytische Polarisation, besonders, wenn man die Kleinheit der Elektroden in Betracht zieht, vollständig ausgeschlossen erscheint. *Der Cohärercontact verhält sich also dem Wechselstrom gegenüber ganz wie ein metallischer Widerstand.*

1) K. E. Guthe, Phys. Rev. 7. p. 193. 1898.

Ein metallischer Widerstand als Folge des Cohärereffectes wird bekanntlich auch von Lodge angenommen, nach welchem Funken zwischen den Teilchen überspringen, dieselben zusammenschweissen und so eine metallische Brücke bilden. Dagegen sprechen jedoch die Regelmässigkeiten der Erscheinungen, die bei der Entstehung der kritischen Potentialdifferenz zu beobachten sind. Funken werden allerdings zuweilen beobachtet, doch haben dieselben stets einen störenden Einfluss auf die eigentliche Cohärerwirkung. Die im nächsten Capitel zu besprechenden Erscheinungen sprechen ebenfalls gegen diese Theorie.

4. Einfluss einer Erhitzung der Contactstelle auf den Widerstand des Cohärers.

Ein Feilichtcohärer, dessen Widerstand bereits infolge eines elektrischen Einflusses vermindert ist, kann leicht durch Erwärmen auf seinen ursprünglichen Zustand zurückgebracht werden. Es ist nicht ausgeschlossen, dass diese Wirkung auf einer Verschiebung der Teilchen infolge der Erhitzung beruht und dass dadurch der gute Contact gebrochen wird.

Es würde jedoch falsch sein, daraus zu schliessen, dass eine höhere Temperatur die Empfindlichkeit des Cohärers herabdrücke. Man muss doch annehmen, dass bei der Kleinheit der Contactstelle schon bei kleinen Strömen eine bedeutende Wärmeentwickelung eintreten kann. Bei meinen Versuchen wurden stets relativ grosse Ströme angewandt und so habe ich bei den leicht schmelzenden Metallen diese Erhitzung schon während der vorher beschriebenen Versuche nachweisen können. Während es mir im allgemeinen unmöglich war, durch eine Untersuchung mit dem Mikroskop an den Metallcalotten nach wiederholtem Gebrauch auch nur die geringsten Aenderungen an den Contactstellen zu entdecken, hatte beim Wismut und Zinn ein deutliches Schmelzen stattgefunden, wenn der Strom durch den Cohärer über ein Ampère gesteigert wurde. Bei den anderen Metallen konnte selbst bei einem Strom von vier Ampère keine Aenderung bemerkt werden.

Im Verlauf meiner Untersuchung über den Einfluss dieser Wärmeentwickelung wurde ich nun auf die Entdeckung eines, wie ich glaube, völlig unbekannten Phänomens geführt, welches

allerdings verschieden von dem eigentlichen Cohärereffect ist, durch welches aber, wie ich hoffe, dessen Erklärung erleichtert wird.

Der Cohärer wurde in der Weise abgeändert, dass an Stelle der Kugelcalotten zwei feine Drähte aus demselben Metall senkrecht zu einander angebracht wurden und dann durch einen leichten Druck gegen den einen der Contact hergestellt wurde. Dann wurde durch den *einen* Draht ein Strom gesandt, der stark genug war, den Draht und somit auch die Contactstelle zu erwärmen. Da die Enden des Condensators sich nicht unmittelbar an der Contactstelle befanden, so wurde bei einer Ladung und Entladung des Condensators die durch den erwärmenden Strom hervorgerufene Potentialdifferenz, iw, mitgemessen, ihr Wert jedoch in den folgenden Betrachtungen berücksichtigt. Während der Erhitzung wurde dann ein Strom *durch* den Contact geschickt und die Potentialdifferenz gemessen, d. h. genau dasselbe Verfahren, wie oben zur Ermittelung der kritischen Potentialdifferenz angewandt.

Nun zeigte sich, dass bei der unabhängigen Erwärmung der Contactstelle der Widerstand des Cohärers unter sonst ganz gleichen Umständen um so kleiner erschien, je stärker die Contactstelle erhitzt wurde, und dass er auf seinen anfänglichen hohen Wert zurückging, sobald die Erwärmung unterbrochen wurde. Der elektrische Strom geht also um so leichter durch die Contactstelle, je heisser dieselbe ist.

Die folgenden Tab. 4 u. 5, welche nur einige meiner Resultate enthalten, zeigen den Einfluss der Erwärmung aufs deutlichste. In der ersten Reihe ist der durch die Entladung des Condensators hervorgerufene Galvanometerausschlag gegeben, wenn die Cohäsion *ohne* Erhitzung des Drahtes eintrat; dann wurde der Cohärer unberührt gelassen, jedoch der eine Draht erhitzt und die Potentialdifferenz, bei demselben Strom durch den Cohärer wie zuvor, gemessen. Dieser Galvanometerausschlag ist in der zweiten Reihe gegeben. Die Ausschläge, welche nach der Unterbrechung des erwärmenden Stromes und zwar nach 10, 30 und 50 Secunden beobachtet wurden, folgen in der dritten, vierten und fünften Verticalreihe. Der Cohärer bestand aus Stahldrähten von 0,36 mm Dicke. Ein Ausschlag von einem Scalenteile entspricht einer Potentialdifferenz von 0,00435 Volt.

Tabelle 4.

174	3	31	102	160
120	23	56	159	160

Selbst wenn der ursprüngliche Widerstand unendlich
.r — dies möge in der Tab. 5 durch ∞ bezeichnet werden —
nnte die Erscheinung beobachtet werden.

Tabelle 5.

∞	18	292	∞	∞
∞	19	229	∞	∞

Um den Einfluss geringerer oder grösserer Erwärmung
studiren, wurde folgende Beobachtungsreihe angestellt.
der ersten Reihe der Tab. 6 ist die Stärke des erwärmen-
n Stromes gegeben, die folgenden haben dieselbe Bedeutung
e vorher. Es mag erwähnt werden, dass die Werte in der
eiten Reihe nur auf der zufälligen Justirung des Contactes
ruhen und nichts mit der Stromstärke zu thun haben.

Tabelle 6.

0,2 Amp.	138	121	122	139	139
0,5 „	90	12	95	95	95
4,0 „	86	5	11	34	75

Dieselben Resultate erhielt ich bei der Anwendung eines
härers aus Kupferdrähten. Hier war der Einfluss einer Er-
zung der Contactstelle noch grösser als beim Stahl. Die
isschläge gingen auf ein bis zwei Scalenteile herunter, selbst
nn im erkalteten Cohärer der Widerstand unendlich war.
i der Erhitzung des sehr dünnen Drahtes trat zuerst der
belstand auf, dass derselbe infolge der eintretenden Ver-
igerung von der ursprünglichen Contactstelle abglitt. Das
nnte jedoch leicht dadurch verhütet werden, dass der Draht
rch eine nahe beim Contacte angebrachte, feine verticale
irale in seiner Lage festgehalten wurde.

Dass schon sehr kleine elektromotorische Kräfte genügen,
i einen elektrischen Strom durch die erhitzte Contactstelle zu

senden, wurde in der folgenden Weise gezeigt (vgl. Fig. 3). *c* ist ein Cohärer aus Kupferdraht, der vor der Erhitzung auf unendlich grossen Widerstand justirt wurde. Die Erhitzung des einen Drahtes geschah durch die Batterie *b*. Zwischen *A* und *C* ist ein Widerstandskasten von 10000 Ohm eingeschaltet. Durch Stöpselung kann ein beliebiger Bruchteil der elektromotorischen Kraft des Accumulators *B'* zwischen die Punkte *A* und *B* gebracht werden. Beim Schliessen des Stromschlüssels *K*, also beim Erwärmen des einen Drahtes, erhalten wir einen bestimmten Ausschlag des Galvanometers. Nun konnte ich noch beim Umkehren der Wippe bei *B'* eine Aenderung dieses Ausschlages constatiren, wenn die Potentialdifferenz zwischen *A* und *B* nur noch 0,002 Volt betrug und der 0,29 mm dicke Kupferdraht von etwa 4 Ampère durchflossen wurde.

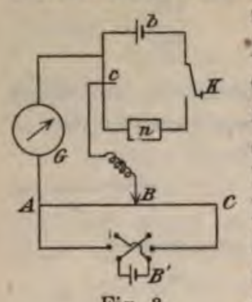


Fig 3.

Schliesslich wandte ich einen Contact zwischen Drähten von verschiedenem Durchmesser an. Wie schon erwähnt, hat der Krümmungsradius keinen Einfluss auf die Erscheinung. Rufen wir nun durch einen verhältnismässig grossen Strom Cohärenz hervor, d. h. senden den Strom *durch* die Contactstelle, so wird der dünnere Draht erwärmt und wir haben so je nach der Richtung des Stromes einen Uebergang von einem wärmeren zu einem kälteren Metall oder umgekehrt. Die Beobachtungen ergaben in diesem Falle eine deutliche Abhängigkeit von der Stromrichtung. Die Dicke der angewandten Stahldrähte war 1,65 mm und 0,27 mm, der Strom etwa 3 Ampère. Ich wähle ein beliebiges Beispiel aus einer ganzen Reihe von Beobachtungen. Ging der Strom vom dicken zum dünnen, also vom kalten zum warmen Draht, so erhielt ich durch Laden und Entladen des Condensators nach der im Cap. 1 beschriebenen Methode einen Ausschlag von 136 Scalenteilen, bei entgegengesetzter Stromrichtung nur 92 Scalenteile. Bei geringerer Erhitzung sind die Unterschiede entsprechend kleiner. Die Elektricität fliesst also leichter von dem warmen Metall zum kalten als in der entgegengesetzten Richtung. Im ersteren Falle erhalten wir die kleinere Potentialdifferenz.

Dies giebt uns eine Erklärung der Resultate, die ich mit

Cohärern aus verschiedenen Metallen erhalten habe. Bildet Wismut die eine Seite des Cohärers, so wird diese Seite bedeutend wärmer als die andere, da Wismut ein äusserst schlechter Wärmeleiter ist, und auf der anderen Seite die Wärme viel schneller fortgeführt wird. Dieses würde dann eine geringere Potentialdifferenz erwarten lassen, im Falle, dass der Strom vom Wismut zu einem anderen Metalle fliesst, als in der entgegengesetzten Richtung. Das ist in der That der Fall, wie Tab. 3 zeigt.

Andererseits wird beim Hindurchfliessen eines Stromes von Wismut zu einem anderen Metall die Contactstelle abgekühlt und dadurch vielleicht die Potentialdifferenz erhöht. Der Peltiereffect würde also im entgegengesetzten Sinne wirken wie die oben besprochene Erscheinung. Das würde die Resultate mit dem Nickel, bei dem jedenfalls der Unterschied in der Wärmeleitung nicht so hervortritt wie beim Wismut, verständlich machen.

Ich denke mir, dass beim Ansprechen des Cohärers auf irgend einen elektrischen Einfluss ein kleiner Strom durch die Contactstelle geht, welche infolge ihrer Kleinheit schon von ausserordentlich geringen Strömen erhitzt wird. Durch die Erwärmung tritt nach den in Cap. 3 beschriebenen Versuchen eine Widerstandsverminderung ein. Darin besteht, wie ich glaube, das erste Stadium des Cohärereffectes. Doch muss noch eine weitere Erscheinung dazu treten, da, wie wir gesehen haben, nach einer blossen Erhitzung der Contactstelle der Widerstand sehr schnell wieder steigt, jedoch bei der eigentlichen Cohärenz längere Zeit auf seinem kleinen Werte verharrt und nur sehr langsam auf den hohen Wert zurückkehrt. Worin nun der Unterschied zwischen diesen beiden Erscheinungen liegt, darüber kann bei unseren jetzigen Kenntnissen der Cohärerwirkung kaum etwas bestimmtes ausgesagt werden.

Zum Schluss wünsche ich, Hrn. Prof. Warburg für das grosse Interesse, das er meiner Arbeit entgegengebracht hat, meinen besten Dank auszusprechen.

Berlin, Physik. Institut der Universität, Januar 1901.

(Eingegangen 20. Januar 1901.)

8. *Beiträge zur Kenntnis des thermomagnetischen Longitudinaleffectes;* *von Louis Lownds.*

I.

§ 1. Ein aus verschiedenen Metallen zusammengesetzter geschlossener Kreis bestehe zum Teil aus Wismut. Der letztere Teil werde von einem Wärmestrom einer Richtung durchflossen und befinde sich in einem magnetischen Feld, dessen Kraftlinien senkrecht zum Wärmestrom gerichtet sind. Dann hängt die elektromotorische Kraft des Kreises von der Stärke des Magnetfeldes ab.

Dies ist der von v. Ettinghausen und Nernst[1]) im Jahre 1886 entdeckte thermomagnetische Longitudinaleffect.

Dieselbe Erscheinung wurde im Jahre 1887 von Grimaldi[2]) beobachtet und als Aenderung der thermoelektrischen Kraft durch das Magnetfeld beschrieben. v. Ettinghausen und Nernst halten diese Auffassung für zulässig und Defregger[3]) hat sie im Jahre 1897 durch besondere Versuche zu stützen gesucht. E. van Everdingen[4]) sagt, dass der Longitudinaleffect als Aenderung der thermoelektrischen Kraft betrachtet werden könne. Es soll zunächst näher geprüft werden, ob eine Aenderung der thermoelektrischen Kraft durch das Magnetfeld wirklich stattfindet.

§ 2. Zu den Versuchen diente ein 1 mm starker Wismutdraht von Hartmann & Braun, welcher bei Abkühlung auf die Temperatur der flüssigen Luft etwa dieselbe Zunahme des specifischen Leitungsvermögens zeigte, wie der von Fleming und Dewar untersuchte Draht. BA (Fig. 1) ist ein 35 cm langes Stück von diesem Draht. Bei B und A sind Kupfer-

1) A. v. Ettinghausen u. W. Nernst, Wied. Ann. **29.** p. 343. 1886.

2) G. P. Grimaldi, Rend. della R. Accad. dei Lincei **3.** p. 134. 1887; **4.** p. 353. 1888.

3) R. Defregger, Wied. Ann. **63.** p. 97. 1897.

4) E. van Everdingen, Leiden Commun. **48.** p. 17. 1899.

drähte angelötet, von denen der erste dem Wismutdraht parallel läuft. Von dem so gebildeten Thermoelement befindet sich der Teil *B D* mit der einen Lötstelle bei *B* in einem in *G* enthaltenen Bade constanter Temperatur; die andere Lötstelle *A* befindet sich in einem anderen in *E* enthaltenen Bade. An *B*, *C*, *D* sind die Lötstellen von Thermoelementen Eisen-Constantan angelötet, durch welche die Temperatur dieser Punkte bestimmt wird. Alle Drähte sind zusammen auf einem Holzbrett montirt. Der untere Teil des Elementes Wismut-Kupfer befand sich zwischen den Polen des grossen Elektromagneten der Berliner Akademie, *B* in der Mitte des Feldes. Die elektromotorische Kraft des Elementes wurde nach der Compensationsmethode gemessen. Die Feldstärken wurden durch die im Magnetfelde folgende Widerstandsänderung einer Wismutspirale gemessen.

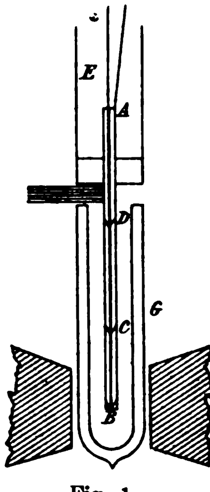


Fig. 1.

Es wurden nun zuerst Versuche gemacht bei 4 cm Polabstand und einer Feldstärke von 4720 C.G.S. 1. Mit Eis in *G*, Petroleum von Zimmertemperatur in *E*, 2. einem Gemisch aus fester Kohlensäure und Aether in *G*, Eis in *E*, 3. mit flüssiger Luft in *G*, Eis in *E*. Bei 2. und 3. war das Gefäss *G* ein Vacuummantelgefäss.

In allen Fällen waren nach Angabe der Eisen-Constantanelemente die Temperaturen von *B* und *C* einander genau gleich, bei 3. war die Temperatur von *D* höchstens um 1° von der in *B* und *C* verschieden. *Ein Temperaturgefälle fand also im Magnetfeld nicht statt und unter diesen Umständen zeigte sich die elektromotorische Kraft des Elementes ungeändert, mochte das Feld erregt sein oder nicht.*

Im Fall 1 konnte ein schmäleres Gefäss, mithin ein kleinerer Polabstand und grössere Feldstärke (8100 C.G.S.) angewandt werden, wobei das Feld eine kleine zwischen −8 und 6 Mikrovolt schwankende Aenderung der elektromotorischen Kraft bewirkte, was ich Temperaturschwankungen von *B* zuschreibe.

Bei allen diesen Versuchen befand sich also eine Lötstelle des Elementes Wismut–Kupfer im Magnetfelde, aber ein Temperaturgefälle im Wismut fand im Magnetfelde nicht statt, und unter diesen Umständen wurde die elektromotorische Kraft des Elementes vom Magnetfeld nicht beeinflusst.

§ 3. Nun liefert die Theorie von Lord Kelvin für die elektromotorische Kraft E in einem Kreise aus zwei Metallen 1 und 2, wenn die Lötstellen die Temperaturen T und T' haben

$$E = \Pi(T) - \Pi(T') + \int_{T}^{T'} (\sigma_2 - \sigma_1)\, d\, T, \tag{1}$$

$$0 = \frac{\Pi(T)}{T} - \frac{\Pi(T')}{T'} + \int_{T}^{T'} \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{T}\, d\, T. \tag{2}$$

Hier bedeutet $\Pi(T)$ die Wärmemenge, welche an einer Lötstelle T pro Secunde absorbirt wird, wenn der Strom durch T von 1 nach 2 geht (Peltiereffect), $i\,\sigma\, d\, T$ die Wärmemenge, welche in der Secunde in einem Drahtelement entwickelt wird, wenn in ihm der Strom von dem einen Ende $(T + d\,T)$ zum anderen (T) geht (Thomsoneffect).

Endlich ist die elektromotorische Kraft E positiv gerechnet, wenn sie in der Richtung von 1 durch T nach 2 hin wirkt.

Bezeichnet man ferner durch den Index $\mathfrak{H}$ den Wert einer Grösse im Felde von der Stärke $\mathfrak{H}$, so liefert die Anwendung von (1) auf den Versuch des § 2 die Gleichung

$$0 = E_{\mathfrak{H}} - E_0 = \Pi(T)_{\mathfrak{H}} - \Pi(T)_0;$$

denn der auf das Magnetfeld fallende Teil des auf den Thomsoneffect bezüglichen Integrals verschwindet, indem ein Temperaturgefälle im Magnetfeld nicht stattfindet. Es ist mithin

$$\Pi(T)_{\mathfrak{H}} = \Pi(T)_0$$

oder *der Peltiereffect vom Felde unabhängig.* Weiter liefert die Combination der Gleichungen (1) und (2)

$$\sigma_2 - \sigma_1 = T \cdot \frac{d\,\frac{\Pi}{T}}{d\,T}.$$

Es ist folglich auch $\sigma_2 - \sigma_1$ und damit nach (1) die thermoelektrische Kraft E vom Feld unabhängig. Daraus geht hervor, dass sofern die Theorie von Lord Kelvin hier anwend-

bar ist, das Magnetfeld die thermoelektrischen Constanten des Wismuts ungeändert lässt und daher der thermomagnetische Longitudinaleffect nicht als eine Aenderung dieser Constanten aufgefasst werden kann.

Ich machte noch folgenden Versuch. An einen 35 cm langen Wismutdraht wurden Kupferdrähte gelötet und der Wismutdraht vertical zwischen die Pole des Elektromagneten gebracht, sodass der Mittelpunkt des Drahtes in der Mitte des Feldes lag. Die oberhalb und unterhalb der Pòle befindlichen Teile des Wismutdrahtes wurden auf constanter Temperatur gehalten, der untere Teil auf 0° in Eis, der obere

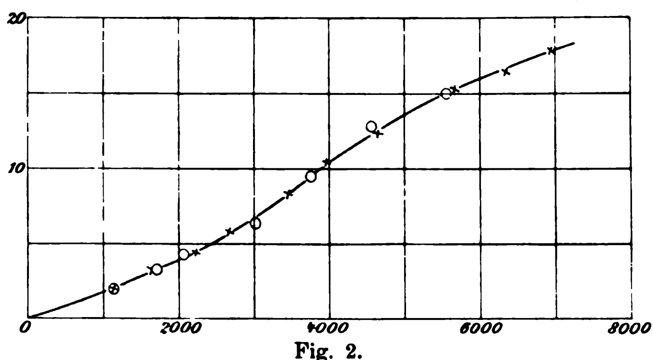


Fig. 2.

auf Zimmertemperatur in Petroleum. So fand der Temperaturfall im Felde statt, während die Lötstellen sich ausserhalb des Feldes befanden. Die durch das Feld bewirkte Aenderung der elektromotorischen Kraft dieses Elementes wurde für verschiedene Feldstärken bestimmt.

Ein zweites derartiges Element wurde aus einem 3,5 cm langen Wismutdraht gebildet, wobei die Lötstellen sich im Feld befanden, derselbe Temperaturfall wie bei dem vorigen Versuch hervorgebracht, und die elektromotorische Kraft wie zuvor bei verschiedenen Feldstärken gemessen. Die Ergebnisse beider Experimente stimmen, wie die graphische Darstellung (Fig. 2) zeigt[1]), überein. Daraus folgt, dass die Feldwirkung nicht auf die Lötstellen ausgeübt wird.

1) In der Fig. 2 sind die Resultate für das 35 cm lange Stück Wismutdrahtes mit ⊙, für das 3,5 cm lange Stück mit × bezeichnet. Die Abscissen sind die Feldstärken, die Ordinaten die durch das Feld hervorgebrachten procentischen Aenderungen der elektromotorischen Kraft.

§ 4. Es erübrigt noch zu zeigen, dass die Versuche von Defregger zu dem vorstehenden Ergebnis nicht im Widerspruch stehen. Bei diesen Versuchen war eine Wismutplatte $BCDE$ (Fig. 3) mit zwei Fortsätzen aus Wismut BA und EF versehen, BC wurde auf 100°, ED auf Zimmertemperatur gehalten, sodass ein Wärmestrom in der Richtung des Pfeiles durch die Platte floss. Bei A und F, sowie bei B und E waren Kupferdrähte angelötet. Die magnetischen Kraftlinien verliefen senkrecht zur Platte. Wurden nun die Lötstellen A und F auf Zimmertemperatur gehalten, sodass zwischen A und F ohne Feld eine elektromotorische Kraft nicht bestand, so wurde auch durch das Feld eine solche nicht erregt, während die elektromotorische Kraft zwischen den Kupferdrähten bei B und E durch das Feld eine erhebliche Aenderung erfuhr. Aus dem Ausbleiben der Feldwirkung im ersten Fall schliesst der Verfasser, dass die Feldwirkung im zweiten Falle auf die Lötstellen Kupfer—Wismut bei B und E ausgeübt wurde.



Fig. 3.

Hierbei ist aber in Betracht zu ziehen, dass im ersten Fall bei der Wismutableitung auch in BA ein Wärmestrom bestand, und dass, sofern auch BA sich im Magnetfelde befand, infolge hiervon auch in BA ein Longitudinaleffect auftrat, welcher dem in BE erregten entgegenwirkte und, falls das Magnetfeld in BA ebenso stark als in BE war, diesem an Grösse gleich war, da nach Nernst[1]) der Longitudinaleffect zwischen zwei Stellen nur von deren Temperaturdifferenz, nicht aber von der Gestalt des Wismuts zwischen diesen Stellen abhängt. Die Longitudinaleffecte in BE und BA mussten sich also, wie beobachtet wurde, aufheben.

II.

§ 5. Nernst fand, wie schon erwähnt, die elektromotorische Kraft p des von einem bestimmten Felde erregten Longitudinaleffectes zwischen zwei Stellen 1 und 2 unabhängig von der Gestalt des Wismuts zwischen 1 und 2 und nur abhängig von

1) W. Nernst, Wied. Ann. **31**. p. 760. 1887.

den Temperaturen t_1 und t_2 dieser Stellen. Setzt man nun nach Nernst

$$p = (t_2 - t_1)\,n,$$

so hängt n von der Feldstärke $\mathfrak{H}$ und der mittleren Temperatur $t_1 + t_2/2$ ab. Bei den bisherigen diesbezüglichen Versuchen wurde die Temperatur nur innerhalb sehr enger Grenzen variirt. Ich habe mir die Aufgabe gestellt, n als Function der Feldstärke für Mitteltemperaturen zwischen ungefähr $+70^0$ und Temperaturen, wie sie durch Anwendung flüssiger Luft erreicht werden können, zu bestimmen.

§ 6. Fig. 4 zeigt schematisch den von mir benutzten Apparat. E ist ein 9 cm hohes, 3,5 cm weites Messinggefäss, aussen mit Filz umhüllt. An den Boden dieses Gefässes ist ein Holzbrett $a\,b\,c\,d$, 5 cm lang und 3 cm breit, angeschraubt. Auf diesem Brett ist ein 3,1 cm langes Stück $A\,B$ von dem oben erwähnten reinen Wismutdraht befestigt, an dessen Enden die auch 1 mm starken Kupferdrähte $A\,C$ und $B\,D$ gelötet sind. $A\,C$ endlich ist mit dem Boden des Gefässes E verlötet. Indem man E mit siedendem Wasser, Eis, Aether–Kohlensäuremischung oder flüssiger Luft füllte, brachte man ein Temperaturgefälle in $A\,B$ hervor. Die maassgebenden Temperaturen t_1 und t_2 in A und B wurden durch Eisen-Constantanelemente gemessen, deren Lötstellen bei A und B angelötet waren. Das Ganze befand sich zwischen den Polen des früher benutzten Elektromagneten so, dass die Kraftlinien den Wismutdraht rechtwinklig kreuzten.

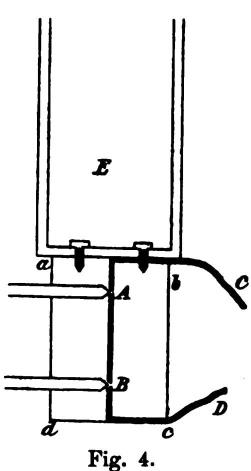


Fig. 4.

Wenn nun die Thermoelemente constante Temperatur von A und B anzeigten, wurde die elektromotorische Kraft zwischen A und B nach der Compensationsmethode gemessen, 1. ohne Feld, 2. mit Feld von der einen, 3. mit Feld von der entgegengesetzten Richtung, 4. ohne Feld.[1]) Als absoluter Wert von n wurde die Grösse

$$\frac{(e_2 + e_3) - (e_1 + e_4)}{2\,(t_2 - t_1)}$$

1) Nur bei den Versuchen mit flüssiger Luft fiel die Messung 4 fort.

genommen und n negativ oder positiv gerechnet, je nachdem die durch das Feld erregte elektromotorische Kraft die Richtung des Wärmestromes oder die entgegengesetzte hatte.

§ 7. Die Resultate sind in den folgenden Tab. I bis IV verzeichnet und in Fig. 5 graphisch dargestellt; die elektromotorischen Kräfte sind in Mikrovolt angegeben.

Tabelle I.

Wismutdraht.

Siedendes Wasser im Gefäss. Mitteltemperatur 49° C.

	A	*B*	
Temperatur vor Versuch	71,5°	28°	$t_2 - t_1 = 44°$.
Temperatur nach Versuch	71°	26,6°	

Feldstärke	E.M.K. ohne Feld	E.M.K. mit Feld		$\frac{(e_2+e_3)-(e_1+e_4)}{2}$	n
		⟶	⟵		
6925	3114	3506	3500	386	8,8
5650	3121	3452	3452	323	7,3
3990	3138	3366	3366	219	5,0
2630	3157	3282	3282	123	2,8
1320	3162	3202	3202	39	0,9
—	3165	—	—	—	—

Tabelle II.

Wismutdraht.

Eis im Gefäss. Mitteltemperatur 8° C.

	A	*B*	
Temperatur vor Versuch	3,9°	12,7°	$t_2 - t_1 = 8,9°$.
Temperatur nach Versuch	3,6°	12,6°	

Feldstärke	E.M.K. ohne Feld	E.M.K. mit Feld		$\frac{(e_2+e_3)-(e_1+e_4)}{2}$	n
		⟶	⟵		
6760	621	725	722	103	11,6
5550	620	708	707	86	9,7
3950	623	686	686	62	7,0
2660	625	666	666	37,5	4,2
1350	632	642	645	10	1,1
—	635	—	—	—	—

Tabelle III.

Wismutdraht.

Mischung aus fester Kohlensäure und Aether im Gefäss. Mitteltemperatur −27° C.

	A	B	
Temperatur vor Versuch	−50,8°	−3,6°	$t_2 - t_1 = 46,6°$.
Temperatur nach Versuch	−51°	−4,5°	

Feld-stärke	E.M.K. ohne Feld	E.M.K. mit Feld →	E.M.K. mit Feld ←	$\frac{(e_2+e_3)-(e_1+e_4)}{2}$	n
6760	3290	3876	3836	577	12,4
5550	3269	3780	3755	506	10,9
3950	3254	3653	3641	396	8,5
2660	3248	3512	3504	267	5,7
1350	3235	3332	3340	98	2,1
—	3241	—	—	—	—

Tabelle IV.

Wismutdraht.

Flüssige Luft im Gefäss. Mitteltemperatur −112° C.

	A	B	
Temperatur vor Versuch	−175°	−50°	$t_2 - t_1 = 124,2°$.
Temperatur nach Versuch	−178°	−49,5°	

Feld-stärke	E.M.K. ohne Feld	E.M.K. mit Feld	$e_2 - \frac{1}{2}(e_1+e_4)$	n
2660	7584	8125	607	4,9
3950	7453	7943	495	4,0
5550	7448	7720	263	2,1
6760	7471	7584	103	0,8
—	7490	—	—	—
1320	7546	7871	348	2,8
—	7500	—	—	—

Versuche derselben Art wurden mit der von Hrn. Yamaguchi[1]) zu seinen Untersuchungen über den Transversaleffect

Fig. 5.

benutzten Platte gemacht. Die Ergebnisse sind in den folgenden Tab. V—VIII verzeichnet und ebenfalls in Fig. 5 graphisch dargestellt.

1) E. Yamaguchi, Ann. d. Phys. 1. p. 214. 1900.



Tabelle V.

Wismutplatte.

Siedendes Wasser im Gefäss. Mitteltemperatur 69,5° C.

	A	B	
Temperatur vor Versuch	91,3°	50,2°	$t_2 - t_1 = 42,7°$.
Temperatur nach Versuch	90,4°	46°	

Feldstärke	E.M.K. ohne Feld	E.M.K. mit Feld →	E.M.K. mit Feld ←	$\frac{(e_2+e_3)-(e_1+e_4)}{2}$	n
6760	3075	3455	3476	311	7,3
5550	3233	3493	3451	282	6,6
3950	3147	3356	3438	185	4,3
2660	3278	3380	3413	105	2,5
1350	3305	3329	3344	41	1,0
—	3286	—	—	—	—

Tabelle VI.

Wismutplatte.

Eis im Gefäss. Mitteltemperatur 7° C.

	A	B	
Temperatur vor Versuch	2,4°	11,4°	$t_2 - t_1 = 9°$.
Temperatur nach Versuch	2,5°	11,6°	

Feldstärke	E.M.K. ohne Feld	E.M.K. mit Feld →	E.M.K. mit Feld ←	$\frac{(e_2+e_3)-(e_1+e_4)}{2}$	n
6760	731	843	843	110	12,2
5550	735	830	834	95,5	10,5
3950	738	806	809	70,5	7,7
2660	736	777	781	43,5	4,8
1350	735	746	749	12,5	1,4
—	735	—	—	—	—

Tabelle VII.

Wismutplatte.

Mischung aus fester Kohlensäure und Aether im Gefäss.
Mitteltemperatur $-46{,}5^\circ$ C.

	A	*B*	
Temperatur vor Versuch	-71°	$-21{,}5^\circ$	$t_2 - t_1 = 50{,}5^\circ$.
Temperatur nach Versuch	$-72{,}5^\circ$	-21°	

Feld-stärke	E.M.K. ohne Feld	E.M.K. mit Feld		$\frac{(e_2+e_3)-(e_1+e_4)}{2}$	n
		⟶	⟵		
6760	3916	4389	4373	444	8,8
5550	3959	4412	4417	440	8,7
3950	3989	4373	4384	396	7,8
2660	3976	4275	4286	315	6,2
1350	3954	4083	4111	139	2,8
—	3963	—	—	—	—

Tabelle VIII.

Wismutplatte.

Flüssige Luft im Gefäss. Mitteltemperatur -135° C.

	A	*B*	
Temperatur vor Versuch	$-189{,}5^\circ$	$-82{,}5^\circ$	$t_2 - t_1 = 106{,}5^\circ$.
Temperatur nach Versuch	$-187{,}5^\circ$	$-81{,}5^\circ$	

Feld-stärke	E.M.K. ohne Feld	E.M.K. mit Feld	$e_2 - \frac{1}{2}(e_1 + e_4)$	n
2660	7584	7776	184	1,7
3950	7611	7557	− 90	−0,8
5550	7683	7162	−554	−5,2
6760	7748	6772	−945	−8,9
—	7683	—	—	—

Die mit Draht von Hartmann & Braun und Platte von Yamaguchi (auch elektrolytisch niedergeschlagen) gewonnenen Ergebnisse stimmen zwar nicht völlig, aber so gut als erwartet werden konnte, überein, zeigen jedenfalls durchaus ähnlichen Verlauf.

Die Versuche geben zu folgenden Bemerkungen Veranlassung:

1. Betrachten wir zuerst den Longitudinaleffect bei -112° im Wismutdraht (Fig. 5). Der Effect wächst zuerst mit der

Feldstärke, erreicht bei 2450 C.G.S. ein Maximum und nimmt alsdann mit wachsender Feldstärke ab; dass er bei einer gewissen, hier nicht erreichten Feldstärke negativ werden würde, geht aus dem Verhalten der Platte bei -135^0 mit Evidenz hervor.

2. Der Verlauf der auf die höheren Temperaturen bezüglichen Curven legt die Vermutung sehr nahe, dass auch hier Maximum- und Zeichenwechsel beobachtet worden wären, wenn man zu hinreichend starken Feldern hätte vordringen können, und dass die entsprechenden Feldstärken um so höher hinaufrücken, je höher die Temperatur ist.

3. Ganz anders als nach 1. und 2. der Longitudinaleffect verhält sich nach Yamaguchi[1]) der thermomagnetische Transversaleffect, welcher bei den tiefsten erreichten Temperaturen mit wachsender Feldstärke fortwährend ansteigt.

4. E. van Everdingen bestimmte an derselben Platte zwischen Zimmertemperatur und 100^0 für verschiedene Feldstärken sowohl den Longitudinaleffect als die Widerstandsänderung, und fand, dass beide Effecte E in ihrer Abhängigkeit vom Feld $\mathfrak{H}$ durch dieselbe Formel, nämlich

$$E = \frac{C_1 \mathfrak{H}^2}{1 + C_2 \sqrt{\mathfrak{H}^2}}$$

dargestellt werden konnten. Nach meinen Versuchen verliert diese Beziehung bei tiefen Temperaturen vollständig ihre Gültigkeit. In der That wechselt der Longitudinaleffect, als Function der Feldstärke $\mathfrak{H}$ betrachtet, bei -135^0 für $\mathfrak{H} = 3560$ C.G.S. das Zeichen, während die durch das Magnetfeld in reinem Wismut hervorgebrachte Widerstandsvermehrung mit wachsender Feldstärke fortwährend steigend gefunden wird.[2])

Es sei mir gestattet, an dieser Stelle dem Hrn. Prof. Warburg für die Anregung zu dieser Arbeit und für das freundliche Interesse während des Fortganges derselben meinen verbindlichsten Dank auszusprechen.

Berlin, Physik. Inst. d. Univ., 19. Januar 1901.

1) E. Yamaguchi, l. c.

2) J. A. Fleming u. J. Dewar, Proc. Roy. Soc. **60**. p. 72—75. 1896.

(Eingegangen 20. Januar 1901.)

9. *Ueber die Bandenspectra der Thonerde und des Stickstoffs; von G. Berndt.*

(Mitteilung aus dem Physikalischen Institut der Universität Halle.)

Das Bandenspectrum des Aluminiums ist von Hasselberg[1]) zwischen 5162,05 und 4470,63 (Ångström'sche Einheiten) gemessen. Doch gehen die Meinungen darüber auseinander, ob man dieses Spectrum dem Oxyd zuschreiben soll, wie es Lockyer[2]) und Hasselberg thun, oder dem Metall, eine Ansicht, die von Wüllner[2]) und neuerdings von Arons[3]) und Hemsalech[2]) vertreten wird. Arons giebt an, dass er dieses Bandenspectrum im elektrischen Lichtbogen auch in Stickstoff- und Wasserstoffatmosphäre erhalten, und dass er keine Spur von Thonerde gefunden habe. Hemsalech hat es unter Benutzung des Inductionsfunkens auch in denselben Gasen erhalten, sodass also die Gegenwart von Sauerstoff dazu nicht notwendig wäre.

Schaltet man in den Entladungskreis eines durch einen Inductionsapparat geladenen Condensators eine Rolle mit Selbstinduction von etwa 0,001 bis 0,0065 Quadrant, so zeigen die Spectra von Metallen Aenderungen, wie sie Hemsalech[4]) im wesentlichen beobachtet hat. Gleichzeitig tritt ein Bandenspectrum auf (zur Photographie genügt eine Expositionszeit von etwa 7 Min.), das Hemsalech dem Stickstoff zuschreibt, ohne jedoch seine Ansicht näher zu begründen.

Ein solches Bandenspectrum erhielt ich ausser bei Eisen, wo es durch die Unzahl der Metalllinien verdeckt wird, bei Cadmium, Zink, Aluminium, Zinn, Silber, Kupfer, Blei und Platin; die Photographien umfassten das Gebiet zwischen

---

1) B. Hasselberg, K. Svenska Vetensk. Akad. Handl. **24**. Nr. 15. 1892.

2) G. A. Hemsalech, Ann. d. Phys. **2**. p. 331. 1900.

3) L. Arons, Ann. d. Phys. **1**. p. 700. 1900.

4) G. A. Hemsalech, Proc. Roy. Soc. **64**. p. 331. 1899; Compt. rend. **129**. p. 285. 1899; Journ. de Phys. (III) **8**. p. 652. 1899 und **9**. p. 437. 1900.

5100 und 2000. Wie eine genauere Betrachtung lehrte und wie die Messung der Wellenlängen bestätigte, war das Bandenspectrum, abgesehen von unwesentlichen Intensitätsunterschieden, bei den acht Metallen identisch, musste also eine gemeinsame Ursache, die Luft, haben. Es blieb jedoch noch die Frage offen, welchem Bestandteile der Luft es zuzuschreiben war. Da auch das Aluminium nur dasselbe Bandenspectrum zeigte, wie die übrigen Metalle, ergab sich die weitere Frage, ob das bisher beim Aluminium beobachtete Bandenspectrum mit dem hier erhaltenen identisch und damit der Luft zuzuschreiben wäre, oder ob das Aluminium ausserdem noch ein eigenes Bandenspectrum besitze, und wenn das letztere der Fall, ob es dem Metall oder dem Oxyd angehöre.

Hemsalech[1]) giebt an, dass man das Bandenspectrum des Aluminiums sieht, wenn man durch eine Linse ein scharfes Bild des Funkens auf den Spalt eines Spectralapparates projicirt. Man erhält dann in der Mitte das Linienspectrum des Aluminiums und der Luft, oben und unten das Bandenspectrum. Hat man in den Secundärkreis des Inductionsapparates einen Condensator eingeschaltet, so wird das Bandenspectrum durch das äusserst helle Linienspectrum der Luft verdeckt. Hasselberg ist der Ansicht, dass in diesem Falle die Dissociationsgrenze des Aluminiumoxyds überschritten wird, und dass infolgedessen das Bandenspectrum nicht auftreten kann.

Durch meine Versuche wurden diese letzteren Angaben nicht ganz bestätigt, denn ich erhielt ein sehr deutliches Bandenspectrum, obwohl ein Condensator von 0,00434 und 0,00896 Mikrof. eingeschaltet war (der Entladungskreis war von Selbstinduction möglichst frei). Die Banden lagen oberhalb und unterhalb des Linienspectrums, erweckten aber den Anschein, als wenn sie auch durch den mittleren Teil des Spectrums gingen und nur hier durch das bei weitem intensivere Linienspectrum verdeckt würden. Man kann diese Banden auch photographiren bei einer Expositionsdauer von etwa 2 Stunden. Dazu blendet man am besten den mittleren hellglänzenden Teil des Funkenbildes ab, sodass man oben und unten nur den grün gefärbten Teil übrig behält. Mit Vorteil

1) Vgl. G. A. Hemsalech, l. c.

verwendet man orthochromatische Platten, obwohl auch die gewöhnliche Platte ein gutes Bild liefert. Dies Bandenspectrum ist aber durchaus nicht mit dem gemeinsamen der übrigen Metalle identisch. Es erstreckt sich nur auf das Grün und Blaugrün, während das der Luft erst im Violett beginnt und sich weit bis ins Ultraviolett erstreckt. Schaltet man jetzt Selbstinduction ein, so verschwindet im sichtbaren Teil das Linienspectrum fast völlig, und man erhält nur das Bandenspectrum, jetzt auch durch die Mitte gehend. Im Ultraviolett erhält man das allen Metallen gemeinsame Bandenspectrum, ebenso wenn man den einfachen Inductionsfunken ohne Condensator und ohne Selbstinduction verwendet. Die übrigen Metalle lieferten jedoch im sichtbaren Teil unter keinen Umständen ein Bandenspectrum, gleichgültig ob man mit dem einfachen Inductionsfunken, Condensator im Secundärkreis oder Capacität und Selbstinduction arbeitete. — Man hat es also beim Aluminium mit zwei verschiedenen Bandenspectren zu thun, einmal, im sichtbaren Teil, das von Hasselberg gemessene, andererseits, im Ultraviolett, das der Luft.

Es blieb jetzt noch die weitere Frage: gehört das Bandenspectrum im sichtbaren Teil dem Aluminium oder seinem Oxyd an? Diese Frage war nur zu entscheiden, wenn man das Aluminiumspectrum in verschiedenen Gasen beobachtete. Ich stellte mir deshalb eine Stickstoff-, Wasserstoff- und Sauerstoffatmosphäre auf folgende Weise her: An Platin befestigte Aluminiumelektroden wurden in Glasröhren mit seitlichem Ansatzstück eingeschmolzen. Dieselben wurden mit destillirtem Wasser, Alkohol und Aether gereinigt, und schliesslich trockene Luft hineingelassen. [1]) Diesen Röhren wurden mit den betreffenden Gasen gefüllt. Der Wasserstoff wurde im Kipp'schen Apparat (Zink und verdünnte Schwefelsäure) entwickelt, durch Kaliumpermanganat und Schwefelsäure gereinigt und längere Zeit durch eine Pipette geschickt, bis die Luft daraus verdrängt war. Die Pipette und die Röhre wurden dann an die Quecksilberluftpumpe geschlossen, bis an den Hahn der

1) Als ich zufällig Funken durch eine Röhre gehen liess, aus welcher der Aetherdampf noch nicht völlig verdrängt war, erhielt ich nicht das Aluminium-, sondern das Kohlenwasserstoffbandenspectrum.

Pipette scharf evacuirt, die Pumpe abgesperrt und im langsamen Strome der Wasserstoff durch ein Phosphorpentoxydrohr in die Röhre gelassen, die dann sofort abgeschmolzen wurde. In der Röhre hatte das Gas ein wenig Unterdruck, der durch die Erwärmung beim Durchgehen der Funken aufgehoben wurde. In dieser Wasserstoffatmosphäre erhielt ich kein Bandenspectrum, sondern nur die drei Wasserstofflinien und die Metalllinien des Aluminiums. Bei Einschaltung von Selbstinduction trat das weisse Linienspectrum des Wasserstoffs auf.

Der Stickstoff wurde dadurch erzeugt, dass ein über Quecksilber abgesperrtes Luftvolumen wiederholt über glühende Kupferspäne hin und her getrieben wurde. Dass der Sauerstoff völlig entfernt war, geht daraus hervor, dass zum Schluss noch blankes metallisches Kupfer vorhanden war. Von Kohlensäure wurde der Stickstoff durch Natronkalk befreit. Auf die Beseitigung von etwaigem Wasserstoff wurde nicht geachtet, da ja nach den Versuchen in Wasserstoff kein Bandenspectrum auftrat. Das über Quecksilber abgesperrte Stickstoffvolumen wurde dann wieder an die Luftpumpe gebracht und wie beim Wasserstoff verfahren. Auch im Stickstoff erhielt ich kein Bandenspectrum. Bei Einschaltung von Selbstinduction trat das Stickstoffbandenspectrum auf. Dasselbe erhielt ich auch auf der Photographie, und es zeigte sich, dass es mit den bei den acht Metallen erhaltenen — soweit die Photographie durch Glas möglich — identisch war. Damit war also die Ansicht von Hemsalech bestätigt, dass das bei Einschaltung von Selbstinduction bei den Metallen erhaltene Bandenspectrum dem Stickstoff zuzuschreiben ist.

Der Sauerstoff wurde aus Braunstein und Kaliumchlorat (zu gleichen Teilen) entwickelt, über Wasser und Kalilauge gereinigt, in einem Gasometer aufgefangen und sofort nach der Darstellung gebraucht, sodass er nicht etwa durch den vom Wasser des Gasometers absorbirten Stickstoff verunreinigt wurde. Es wurde dann wieder bis an den Hahn des Gasometers evacuirt, und die Röhre mit Sauerstoff gefüllt; sie wurde jedoch nicht abgeschmolzen, sondern mit dem Gasometer in Verbindung gelassen, in dem das Gas stets unter Ueberdruck stand, damit der bei der Verbrennung des Alu-

miniums gebrauchte Sauerstoff sofort wieder ersetzt wurde. Im Sauerstoff traten die Aluminiumbanden weit lebhafter hervor, wie in Luft. Bei zweistündiger Expositionsdauer konnte ich dieselben sehr gut photographiren. Einschaltung von Selbstinduction war auf das Aussehen der Banden fast ohne Einfluss.

Durch diese Versuche war nachgewiesen, dass die Gegenwart von Sauerstoff für die Entstehung des Bandenspectrums notwendig war. Um schliesslich noch die Frage zu entscheiden, ob das Bandenspectrum der Thonerde oder etwa dem Sauerstoff angehöre, wurde eine ebensolche Röhre mit Platinelektroden hergestellt. Die Sauerstofffüllung geschah in etwas anderer, aber ausreichender Weise. Die Röhre wurde dann abgeschmolzen. Ein Bandenspectrum zeigte sich nicht. Bei Einschaltung von Selbstinduction begannen die nur etwa 0,5 mm starken Platinelektroden zu glühen.

Das Aluminium war in dem Sauerstoff sehr lebhaft verbrannt. Die Funkenstrecke, die anfangs etwa 1,5 mm betrug, war nachher nahezu 1 cm; dazu war die ganze Röhre mit weisser Thonerde bedeckt. Auch das Platin in der letzten Röhre war oxydirt, wenn auch nicht so lebhaft.

Aus meinen Versuchen muss ich deshalb den Schluss ziehen, dass das Bandenspectrum der Thonerde und nicht dem Aluminiummetall zuzuschreiben ist, da die Gegenwart von Sauerstoff zur Entstehung desselben notwendig ist.

Das im elektrischen Lichtbogen beobachtete Bandenspectrum ist weit ausgedehnter, zeigt auch sonst gegen das im Inductionsfunken erhaltene kleine Unterschiede. Im Funken kann man drei Gruppen unterscheiden:

I. Zwischen 5400 und 5300, verwaschen, würde sich bei grosser Dispersion wahrscheinlich in feine Linien auflösen; von Hasselberg nicht gemessen.

II. Von 5162 bis 5079.

III. Von 4914 bis 4482, die intensivste Bande, aus wenigen, aber scharf markirten Linien bestehend.

Im Bogen (bei dem man im sichtbaren Teil kein Linienspectrum erhält) löst sich

I. in sehr viele feine Linien auf,

II. bleibt fast ungeändert,

III. wird verwaschen, würde sich also bei grösserer Dispersion in sehr viele feine Linien auflösen, wie sie Hasselberg auch gemessen. Ferner treten zwei Banden neu auf,

IV. von 4810 bis 4648 und

V. von 4594 bis 4470, wie sie Hasselberg angiebt.

Auf Photographien mit dem elektrischen Bogen bis 2100 hin habe ich weitere Banden nicht gefunden.

Bei dem mit Selbstinduction im Ultraviolett erhaltenen Stickstoffbandenspectrum, dessen Wellenlängen ich in der Tabelle am Schluss gebe, kann man fünfzehn Gruppen unterscheiden.

I.	4254,6	bis	3910,8	matt.
II.	3905,1	„	3597,5	abschattirt, mit intensiven Linien.
III.	3593,2	„	3575,8	sehr intensiv.
IV.	3357,3	„	3164,0	die einzelnen Linien liegen dicht aneinander.
V.	3155,7	„	3064,0	die intensivste Gruppe.
VI.	3060,0	„	2980,8	sehr schwach.
VII.	2971,2	„	2715,0	unregelmässig.
VIII.	2710,4	„	2586,6.	
IX.	2584,1	„	2466,1	intensiver u. dichter, wie die umgebenden Banden.
X.	2465,4	„	2440,4	die Linien liegen sehr dicht aneinander.
XI.	2438,9	„	2356,9	mit weiten Zwischenräumen.
XII.	2355,9	„	2257,8.	
XIII.	2256,5	„	2211,3	schwach.
XIV.	2210,0	„	2201,0	die Linien liegen weit voneinander ab.
XV.	2199,9	„	2194,2	ganz schwach, allmählich verschwindend.

Zur Bestimmung der Wellenlänge habe ich die Messungen bei Zink, Cadmium, Kupfer und Platin, von 2300 ab bei Aluminium und Zink benutzt, die mit einer Teilmaschine ausgeführt wurden. Der Maximalfehler dürfte bei 4250 etwa 0,7, bei 2200 etwa 0,3 Ångström'sche Einheiten betragen.

Die Aufnahmen wurden mit dem grossen Quarzspectrographen des Institutes gemacht; verwendet wurden orthochromatische und gewöhnliche Schleussnerplatten, für das Gebiet von 2300 ab Lumièreplatten; hier beträgt die Expositionsdauer $^1/_2$ bis 1 Stunde.

Für die Herstellung der Spectralröhren bin ich dem ersten Assistenten, Hrn. Dr. H. Schultze, zu Dank verpflichtet.

Zum Schluss bleibt mir noch übrig, Hrn. Prof. Dr. Dorn für seine Anregung und freundliche Unterstützung bei vorliegender Arbeit meinen besten Dank auszusprechen.

Wellenlängen des Stickstoffbandenspectrums.

I. **42**54,6 34,2 28,6 22,2 18,2 12,3 04,8 **41**99,1 93,1 86,4 78,7 71,0 64,6 58,6 55,3 50,7 47,3 43,2 38,7 35,1 31,8 27,1 22,2 19,2 10,1 0,42 **40**99,8 93,4 88,3 81,2 75,6 68,7 61,1 53,0 48,1 43,0 41,1 34,9 29,9 15,8 10,4 0,32 **39**92,7 86,4 82,1 77,7 72,1 67,1 61,1 57,8 50,2 46,0 43,9 40,1 37,8 34,4 31,6 26,3 20,8 18,1 15,3 10,8.

II. **39**05,1 **38**99,3 96,7 92,6 88,0 83,5 78,3 73,9 71,3 69,0 67,2 62,1 60,2 58,1 51,3 48,9 45,0 42,1 39,2 36,8 34,3 31,7 29,5 27,2 24,4 21,5 18,7 16,2 13,3 10,4 07,9 04,2 02,0 **37**98,8 95,7 92,9 90,0 86,2 83,7 80,9 76,8 74,6 70,8 67,5 64,4 61,2 57,9 55,6 51,0 47,9 46,5 44,1 41,5 39,0 35,6 32,3 29,7 26,6 24,0 22,1 19,6 16,5 13,6 10,9 08,7 05,0 02,1 **36**99,7 94,5 90,0 86,7 81,2 77,3 73,2 69,7 67,0 62,2 58,2 54,9 51,1 47,7 44,5 40,6 37,0 32,0 28,6 25,1 21,2 17,2 13,1 09,0 05,5 02,1 **35**97,5.

III. **35**93,2 90,2 87,3 83,0 77,1 71,8 68,1 60,0 55,3 51,3 44,4 41,7 35,2 30,2 26,7 22,4 16,9 11,2 09,4 06,7 04,2 01,3 **34**99,4 98,3 94,7 89,6 85,0 82,0 78,8 76,1 73,1 70,6 66,6 64,0 60,1 57,1 54,7 51,0 47,0 43,4 40,0 36,0 32,1 28,4 24,2 20,6 17,0 13,3 09,9 05,1 00,5 **33**96,2 92,2 88,6 84,1 80,4 75,8.

IV. **33**57,3 55,3 53,6 51,9 50,3 47,7 46,3 44,8 43,1 41,9 41,1 39,7 38,1 36,5 34,7 33,1 31,0 29,1 27,2 25,2 23,6 21,5 19,3 17,8 15,3 13,1 11,2 08,7 06,8 05,0 01,7 **32**97,7 95,9 94,9 92,9 88,1 86,2 84,4 81,1 79,7 77,9 76,4 74,8 71,9 69,0 66,9 63,9 61,0 57,9 54,9 52,1 49,1 46,4 43,9 40,1 37,0 34,2 29,9 27,5 23,7 21,2 19,3 17,7 15,9 14,7 12,9 11,2 06,2 04,7 02,9 00,9 **31**99,3 97,4 93,4 89,9 88,2 86,9 85,5 82,9 79,9 75,8 71,1 67,2 64,0.

V. **31**55,7 52,2 50,2 48,0 44,3 40,8 38,8 31,8 28,3 23,9 20,1 18,6 16,8 15,0 13,6 12,3 10,8 09,7 08,1 05,9 01,7 **30**98,7 95,5 92,7 90,3 89,1 87,3 85,3 83,3 81,7 80,0 78,7 76,2 74,0 71,6 67,3 64,0.

VI. **30**60,0 58,0 55,0 53,3 51,1 49,0 46,4 43,6 40,9 38,4 34,3 31,3 28,8 26,1 23,7 21,0 18,3 09,8 07,1 04,5 01,8 **29**96,4 93,0 90,1 87,1 83,7 80,8.

VII. **29**71,2 68,9 59,1 57,1 55,1 53,2 52,1 51,0 49,5 48,1 45,4 43,1 38,7 36,8 34,1 32,8 30,8 29,9 28,0 26,7 25,0 23,9 22,2 19,1 18,0 16,7 15,0 14,2 12,9 11,3 09,6 06,2 04,2 02,5 **28**99,7 97,6 93,9 91,6 89,5 87,1 84,1 82,1 80,5 77,1 74,4 69,5 66,9 63,7 58,9 56,4 55,2 53,0 51,8 50,3 49,0 47,5 45,6 43,3 40,4 39,1 38,0 36,9 34,2 33,1 31,7 30,1 28,4 26,5 25,2 24,0 22,4 20,5 17,7 15,0 13,5 07,2 05,0 03,7 **27**92,2 91,4 89,0 87,1 84,5 82,0 78,8 77,0 76,0 74,2 73,2 68,0 66,1 63,5 59,9 58,3 57,1 55,9 54,3 52,8 50,1 48,8 48,4 46,9 43,9 42,7 42,0 40,7 39,3 38,6 35,8 32,9 30,0 26,5 23,5 21,2 18,0 15,0.

VIII. 2710,4 08,0 06,8 06,1 05,0 01,9 2699,0 96,1 94,9 93,0 91,1 88,8 86,9 84,6 82,1 80,1 77,9 75,8 74,2 71,1 69,7 67,7 64,3 62,0 59,4 57,5 56,0 53,8 53,0 50,6 48,4 47,2 45,7 43,0 40,4 38,2 34,6 32,8 29,9 26,9 23,8 21,7 20,1 18,9 14,3 11,8 09,9 08,4 06,8 05,3 02,6 01,4 2599,1 98,2 96,7 94,9 94,0 93,1 92,5 92,0 91,5 91,0 90,4 89,9 89,0, 88,1 87,2 86,6.

IX. 2584,1 82,8 81,7 80,0 79,3 78,2 77,0 75,9 74,3 73,1 71,8 70,7 69,0 67,1 65,8 64,1 62,6 60,8 58,7 57,4 56,0 54,9 54,2 52,7 52,1 51,5 50,1 49,1 48,4 47,9 45,9 44,7 43,7 41,2 39,1 37,4 35,0 32,9 31,6 30,4 29,3 28,2 27,0 26,0 25,0 23,9 22,7 21,3 20,0 18,9 17,7 16,1 15,8 14,9 12,4 10,7 10,0 08,7 07,7 06,5 04,4 02,7 00,1 2499,0 98,0 97,0 96,0 94,0 92,7 91,8 90,3 89,1 87,8 86,8 84,2 83,6 86,9 80,9 80,0 78,0 76,1 74,3 73,1 71,9 70,2 68,4 67,2 66,1.

X. 2465,4 64,8 63,9 63,2 62,2 61,4 60,7 59,6 58,7 57,8 56,6 55,4 54,2 53,0 52,3 51,8 50,9 50,0 49,4 48,8 47,9 46,6 44,9 44,1 43,1 41,9 41,1 40,4.

XI. 2438,9 38,1 37,3 35,8 34,9 34,1 33,0 32,4 31,1 30,0 29,0 27,5 25,6 23,7 21,6 19,8 17,7 15,3 13,4 11,1 08,9 06,9 04,3 02,3 00,1 2397,3 94,9 93,8 92,9 92,0 89,8 87,9 85,3 84,9 83,3 81,0 78,7 77,7 76,0 73,9 72,4 71,0 69,9 68,9 68,3 67,9 67,5 67,1 66,7 66,3 65,8 65,1 64,5 63,7 63,1 62,4 61,8 61,0 60,1 58,9 58,5 57,8 56,9.

XII. 2355,9 55,0 54,3 53,5 52,8 51,8 50,7 49,8 48,9 47,8 46,6 45,4 44,5 43,0 41,8 40,3 39,8 37,9 36,9 35,9 34,0 31,6 31,0 29,3 28,1 26,8 24,9 23,3 21,2 19,9 18,3 16,4 14,5 12,8 10,9 08,9 07,1 05,0 02,7 00,8 2299,3 97,6 95,0 92,9 90,7 88,8 86,3 84,1 81,9 79,7 77,5 75,3 73,1 70,9 68,7 66,5 64,3 62,1 59,9 57,7.

XIII. 2256,5 56,0 55,3 54,6 53,9 53,2 52,7 52,1 51,3 50,2 49,0 47,4 47,0 45,5 44,9 43,5 42,4 41,2 40,0 38,6 37,5 36,6 35,5 34,4 33,7 32,9 32,1 31,7 30,2 28,8 27,2 26,2 25,7 25,1 23,9 22,7 22,0 21,1 20,4 18,8 17,0 15,2 13,4 12,0 11,3.

XIV. 2210,0 09,0 08,0 07,2 06,4 05,3 04,2 03,2 02,2 01,0.

XV. 2199,9 97,2 95,4 94,2.

Halle a. S., 19. Januar 1901.

(Eingegangen 25. Januar 1901.)

---

10. *Ueber die Abhängigkeit der Absorption des Lichtes in festen Körpern von der Temperatur; von J. Koenigsberger.*

Die Abhängigkeit der Lichtabsorption in festen Körpern von der Temperatur kann, wie aus den im Folgenden angeführten Beobachtungen hervorgeht, durch zwei Regeln, eine für metallische und eine für nicht metallische Körper, ausgedrückt werden. Hier zeigt sich also das einfache Verhalten, das man bei der Aenderung des Brechungsindex durch die Temperatur vergeblich suchte. Daher dürfen wir vielleicht erwarten, dass die Erforschung dieser Erscheinungen die Hoffnungen verwirklicht, die Fizeau[1]) und andere auf das Studium der Veränderlichkeit des Brechungsexponenten setzten. Gerade die Anwendung der für die Lichtabsorption geltenden Regel ermöglicht das verwickeltere Verhalten des Brechungsindex nichtmetallischer Körper vorauszusagen, wenn man eine der elektromagnetischen Dispersionstheorien, wie sie Helmholtz und Hr. Drude aufgestellt haben, zu Hülfe nimmt. Ausserdem geben uns die beiden Regeln Anhaltspunkte, um die Emission fester nicht schwarzer Körper bei Anwendung des Kirchhoff'schen Gesetzes theoretisch zu bestimmen, und erlauben demnach den Gültigkeitsbereich dieses Gesetzes festzustellen. Die Widersprüche, welche die beiden Regeln scheinbar gegenüber bekannten Erscheinungen zeigen, lassen sich auflösen.

Um die Lichtabsorption zu messen, habe ich drei photometrische Anordnungen benutzt. Diese hatten erstens der Bedingung zu genügen, dass Photometer und Apparat zur Herstellung einfarbigen Lichtes getrennt sind. Bei den neueren zur Absorptionsmessung bestimmten Photometern ist, um Licht-

1) Fizeau, Pogg. Ann. **123.** p. 526. 1864.

verluste zu vermeiden, gerade das Gegenteil erstrebt worden. Das hat aber den Nachteil, dass man nicht mit ganz monochromatischem (Natriumflamme etc.) oder mit weissem Licht arbeiten, ferner nicht den Grad der Homogenität beliebig ändern und auch nicht in den Fällen, wo grosse Helligkeit erforderlich ist, Lichtfilter benutzen kann. Hierzu kommen noch infolge der Einschaltung des Prismas systematische Fehler, die auch bei der besten Construction, der von Hrn. A. König, vorhanden sind.[1]) Die zweite Bedingung war die, dass die zu vergleichenden Flächen möglichst klein genommen werden können; denn nur selten erhält man grössere homogene Stücke *fester* Substanzen, und die Inhomogenität ist bei Absorptionsmessungen sehr störend. Diese letztere Forderung wies auf die Anwendung des Mikroskopes hin. Am einfachsten war die Messung bei Anwendung polarisirten Lichtes und Benutzung eines planparallelen Kalkspatrhomboeders, wobei die zu vergleichenden Lichtbündel durch Verschiebung und nicht durch Neigungsänderung erhalten werden. Die erste Anordnung war eine dem Photometer von Glan analoge, wobei unter dem Kalkspat zwei Oeffnungen angebracht waren, deren beide innere senkrecht zu einander polarisirte Bilder verglichen wurden. Das Verschwinden der Trennungslinie für alle Farben wird durch geringe Drehung der Oeffnungen relativ zum Kalkspat erreicht.

Unter oder über dem Kalkspat befand sich ein auf einem Teilkreis drehbarer Glan-Thompson'scher Nicol. Der mittlere Fehler von acht Ablesungen beträgt etwa $\pm 15' = 1{,}75$ Proc. der Intensität.

Bei der zweiten und dritten Anordnung, welche genauere und bequemere Messungen erlaubten, waren unter dem Kalkspat zwei Oeffnungen so nahe bei einander angebracht worden, dass bei der Beobachtung durch ein auf die Oeffnungen eingestelltes Mikroskop mit etwa 20 maliger Vergrösserung die beiden mittleren Bilder sich teilweise überlagern. Sind an dieser Stelle gleiche Teile senkrecht zu einander polarisirten Lichtes vorhanden, so werden Interferenzerscheinungen, die nur in polarisirtem Licht vorhandem sind, ausbleiben, also z. B. die Ringe einer Kalkspatplatte $\perp$ Axe oder die Streifen einer

---

1) Vgl. J. Ehlers, N. J. f. Min. Beilagebd. 11. p. 268. 1897.

Savart'schen Platte nicht sichtbar sein. Das Intensitätsverhältnis der beiden Anteile polarisirten Lichtes wird durch Drehen eines Nicols unter dem Kalkspat oder durch Einschieben geaichter Rauchglaskeile, welche durch Aufkitten eines durchsichtigen Glaskeiles optisch compensirt sind, geändert. Die empfindliche Platte muss über dem Objectiv des Mikroskopes eingelegt werden. Als Ocular dient ein 7 mal vergrösserndes Fernrohr mit Ramsdenocular, in dessen Brennebene alles Licht bis auf das von den sich überdeckenden Teilen beider Oeffnungen kommende ausgeblendet wird. Die Genauigkeit des Mittelwertes der Beobachtungen beträgt bei zweimaliger Ablesung in allen vier Quadranten oder bei vier Ablesungen mit Rauchglaskeil etwa 0,4 Proc. Diese Empfindlichkeit wurde durch Anbringen einer Deckglasplatte an je einer Hälfte der beiden Oeffnung, wodurch eine dem Contrast bei dem Lummer-Brodhun'schen Photometer analoge Erscheinung zu stande kommt, auf das Doppelte gesteigert. Eine eingehendere Beschreibung eines in dieser verbesserten Anordnung von Hrn. Mechaniker Stoë in Heidelberg nach Angaben des Verf. construirten Photometers soll nächstens veröffentlicht werden. — Zur Beleuchtung wurden monochromatische Flammen (Bunsenbrenner mit Natriumcarbonatperle etc.), Acetylen- oder Auerlicht, das durch einen besonders construirten Spectralapparat[1]) zerlegt oder durch Farbenfilter, deren Wellenlängenschwerpunkt bestimmt wurde, gereinigt war, je nach Bedürfnis verwandt.

Die Messungen über die Abhängigkeit der Absorption von der Temperatur erstrecken sich auf ein Temperaturintervall von 10—360° und weitere bei hohen Temperaturen angestellte qualitative Beobachtungen erlauben den Schluss, dass die für das obige Intervall erhaltene Regel auch für höhere Temperaturen gilt.

Die untersuchte Substanz wurde in einem Luftbad erhitzt, konnte also nicht in das Photometer eingeschoben werden. Deshalb wurde ihr Bild mit einer Linse auf die eine Blendenöffnung so projicirt, dass diese nur Licht empfing, das durch die Platte gegangen war. Die Messungen wurden bei auf- wie

---

1) J. Koenigsberger, Habilitationsschrift p. 17. Leipzig 1900.

bei absteigender Temperatur des Luftbades vorgenommen. Letzteres bestand aus einem viereckigen schmalen Messingkasten, an dessen Längsseiten in Oeffnungen runde Deckgläser mit Asbest eingedichtet werden konnten. Von oben wurde ein Thermometer und eine die zu untersuchende Substanz festhaltende justirbare Messingklemme in den Kasten eingesenkt. Die ganze Vorrichtung wurde mit einem etwas grösseren Kasten aus Eisenblech, an dessen Längsseiten ebenfalls zwei Fenster ausgeschnitten waren, bedeckt und von unten durch eine Reihe kleiner Bunsenschnittbrenner erwärmt. Um die Temperatur einwandsfrei festzustellen wurden in den Plattenhalter kleine Glasröhren mit Substanzen von genau ermitteltem Schmelzpunkt befestigt und mit diesen wurde das Thermometer im Luftbade geaicht. Diese Projectionsphotometrie erfordert vor allem eine unveränderliche Aufstellung des gesamten Apparates und ausserdem ein etwas mühsames Aufsuchen der geeignetsten Lage der Lichtquelle, ist aber sonst vollkommen zuverlässig. Bei den Versuchen wurde stets darauf geachtet, ob die untersuchte Substanz an der Oberfläche oder im Innern eine chemische Veränderung zeigte; nur die Resultate wurden verwertet, bei denen die Differenzen der Beobachtung bei aufsteigender und abnehmender Temperatur innerhalb der Beobachtungsfehler des Photometers liegen. Aus diesem Grunde musste ich auch von der Untersuchung krystallwasserhaltiger Salze absehen.

Beobachtungen.

Im Folgenden bedeutet λ die Wellenlänge des Lichtes, d das Verhältnis der Intensität des durch die Platte gegangenen zum auffallenden Licht, α den Extinctionscoefficienten.

Bezeichnet J' die nach Elimination des Reflexionsverlustes erhaltene Intensität des durch die Platte gegangenen Lichtes, so erhält man die Beziehung $J' = J . e^{-4 \pi \alpha l}$, wobei J die Intensität des auffallenden Lichtes, l die Schichtdicke des absorbirenden Mediums ist.

Die untersuchten Flintglassorten verdanke ich mit Angabe der chemischen Zusammensetzung und der Brechungsindices dem Glaswerk von Schott u. Gen. in Jena.

Schweres Flintglas (*S.* 227).

79 PbO; 20,9 SiO_2; 0,1 As_2O_3.

$n_D = 1,9193$; $n_D - n_C = 0,0119$; $n_F - n_D = 0,0315$.

Dicke der Platte: 6,4 mm.

Bei Zimmertemperatur:

λ	d	$\alpha . 10^2$
0,63	0,802	0,01
0,59	0,805	0,30
0,50	0,780	4,45
0,46	0,750	8,20

λ	Werte von $\alpha . 10^2$ bei						
	15°	100°	150°	200°	250°	300°	360°
0,59	0,30	—	—	0,320	—	0,445	0,542
0,50	4,45	6,85	8,05	11,05	13,7	18,0	23,8
0,46	8,20	12,6	14,8	18,0	24,7	37,7	47,5

Der Wert des Extinctionscoefficienten steigt demnach für alle Farben, am stärksten da, wo die Absorption am grössten ist.

Schweres Flintglas (*S.* 217).

79 PbO; 20,9 SiO_2; 0,1 As_2O_3.

$n_D = 1,9025$; $n_D - n_C = 0,0114$; $n_F - n_D = 0,0299$.

Dicke der Platte: 6,4 mm.

Bei Zimmertemperatur:

λ	d	$\alpha . 10^2$
0,63	0,825	0
0,46	0,807	0,13

λ	Werte von $\alpha . 10^2$ bei						
	15°	100°	150°	200°	250°	300°	360°
0,46	0,13	0,20	0,27	0,40	0,69	0,99	1,83

Für $\lambda = 0,63$ und $\lambda = 0,59$ war keine Aenderung der Absorption zu bemerken.

Flintglas (0,1606).

67,5 PbO; 3,0 K_2O; 29,2 SiO_2; 0,3 As_2O_3.

$n_D = 1,7469$; $n_D - n_C = 0,0075$; $n_F - n_D = 0,0193$.

Dicke der Platte: 6,4 mm.

λ	d	α
0,63	86,7	0
0,46	85,0	0,06

λ	Werte von $\alpha \cdot 10^2$ bei				
	15°	100°	200°	300°	360°
0,46	0,06	0,23	0,35	0,57	0,92

Alle drei Flintgläser zeigen demnach eine starke Absorptionszunahme mit steigender Temperatur; diese Erscheinung ist schon bei der Messung der Aenderung des Brechungsindex von Hrn. Pulfrich[1]) und später von Hrn. Reed[2]) bemerkt worden.

Hier sei nur darauf aufmerksam gemacht, dass die Absorptionszunahme mit der Grösse des Brechungsindex und der Grösse der Zunahme desselben parallel geht. Wahrscheinlich ist es ein in den verschiedenen Glassorten in verschiedener Menge enthaltenes Bleisilicat, welches durch ein Gebiet selectiver Absorption im Ultraviolett jene Erscheinungen bedingt.

Silberoxydglas.

(Durch Silberoxyd gelb gefärbtes Crownglas. Das Silberoxyd ist in geringer Menge im Glase enthalten, sodass es nur die Absorption, aber nicht die Brechung beeinflusst.)

Dicke der Platte: 0,765 mm.

$n_D = 1,5225$.

λ	d	α
0,63	0,730	0,237
0,59	0,614	0,416
0,50	0,340	1,09

1) C. Pulfrich, Wied. Ann. 45. p. 609. 1882.

2) J. O. Reed, Wied. Ann. 65. p. 707. 1898.

λ	Werte von α bei			
	15°	150°	300°	360°
0,63	0,237	—	—	0,293
0,59	0,416	—	0,503	0,558
0,50	1,09	1,14	1,23	1,27

Die Absorption nimmt demnach mit steigender Temperatur zu und zwar am stärksten da, wo die Absorption am grössten ist.

Kaliumbichromat.

$K_2Cr_2O_7$; Spaltungsstück. Die Absorption ist für die beiden Schwingungsrichtungen nicht wesentlich verschieden.

(Diese Substanz eignet sich gut für eine derartige Messung, weil man sie ziemlich hoch, bis 280°, erhitzen kann, ohne dass sie eine Veränderung erleidet. Schon mit dem Auge kann man erkennen, wie eine dünne hellgelbe Platte bei 250° tiefrot wird; umgekehrt entfärbt sie sich bei tiefen Temperaturen.)

Dicke der Platte: 0,568 mm.

$n_D = 1,73.$

Bei Zimmertemperatur:

λ	d	α
0,589	66,8	0,319

λ	Werte von α bei							
	10°	70°	100°	120°	150°	160°	200°	250°
589	0,317	0,765	1,05	1,20	1,62	2,00	2,67	3,48

Die Aenderung der Absorption ist so stark, dass man photometrisch die Temperatur zwischen 100 und 200° auf $\pm \, ^1/_2{}^0$ genau bestimmen könnte.

Ferner wurden Versuche an *Selen* und *Brookit* angestellt.

Selen bietet als Element besonderes Interesse. Die glasartige rote Modification erhält man nur schwer in genügend dünnen Schichten. Leider verändern sich diese beim Erhitzen an der Oberfläche und häufig auch im Innern durch Umwandlung in eine undurchsichtige Substanz so rasch, dass genaue Messungen unmöglich sind. Eine starke Zunahme der Ab-

sorption mit steigender Temperatur, die bei der Abkühlung wieder zurückging, konnte mit Sicherheit festgestellt werden. *Brookit* findet sich selten in klaren Krystallen; bei den mir gehörenden war nur qualitativ die starke Absorptionszunahme zu beobachten.

Die obigen Versuche zeigen, *dass rote, braune, gelbe Körper, also solche die selective Absorption im Ultraviolett zeigen, eine Zunahme und Ausbreitung der Absorption mit steigender Temperatur erfahren.* Hierdurch erklären sich die lange bekannten Thatsachen, dass Brom, Schwefel, Kaliumbichromat u. a. bei *tiefen* Temperaturen heller und schliesslich farblos werden. Auch die von Hrn. J. Kastle neuerdings[1]) angestellten Versuch über die Einwirkung tiefer Temperaturen auf die Farbe von Brom- und Jodverbindungen dürften durch die obige Regel erklärt werden.[2])

Sehr viel geringer ist die Zahl von Substanzen, die grün oder blau aussehen, und es ist eine *merkwürdige*, aber durch die Dispersionsmessungen bestätigte Thatsache, dass Substanzen mit *Eigenabsorption*[3]) im Rot oder im Ultrarot in der Nähe des sichtbaren Spectrums äusserst selten sind. Da aber Stellen schwacher Absorption durch geringe Mengen von Substanzen mit selectiver metallischer Absorption hervorgerufen sind und demnach qualitativ sich von letzterer nicht unterscheiden, so konnten für diese Versuche alle grünen und blauen Substanzen, obgleich sie keine Eigenabsorption besitzen, herangezogen werden.

Blaue und grüne Gläser, sowie grün gefärbte Silicate wie Klinochlor, Diopsid etc. wurden untersucht.

Metallsalze konnten wegen des Krystallwassergehaltes nicht erhitzt werden. Bezüglich der Zahlen sei auf die Habilitationsschrift verwiesen.

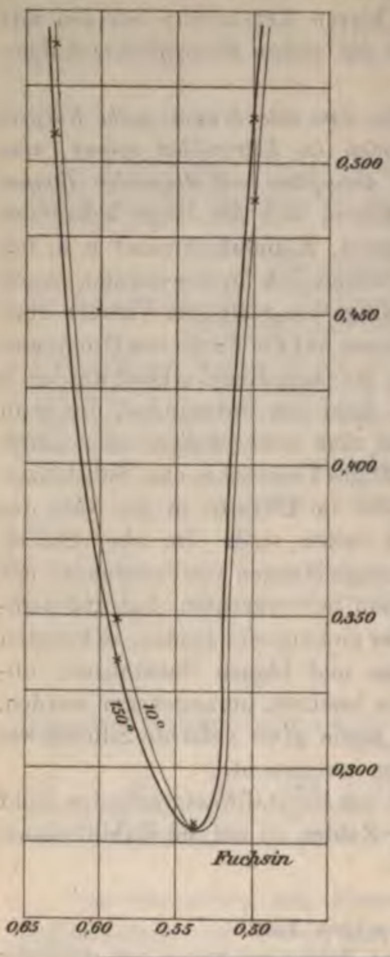
---

1) J. H. Kastle, Beibl. 24. p. 1286. 1900.

2) Auch die *Lösungen* solcher Substanzen zeigen mit steigender Temperatur eine Absorptionszunahme, so z. B. Lösungen von Eisenchlorid, chromsauren Salzen, Titanperoxyd etc. Bei colorimetrischen Bestimmungen von Chrom und Titan ist deshalb Temperaturgleichheit beider Gefässe erforderlich.

3) Die einzige derartige Substanz dürfte Wasser sein; alle übrigen grün oder blau gefärbten festen oder flüssigen Körper haben, wie aus dem Verhalten des Brechungsindex hervorgeht, keine metallische Eigenabsorption im Ultrarot, die für das sichtbare Gebiet in Betracht käme; es überwiegt vielmehr bei allen der Einfluss der Absorption im Ultraviolett.

Es ergab sich, dass für *blaue und grüne Körper die Absorption mit steigender Temperatur abnimmt.* Die eben erwähnte Thatsache in Verbindung mit der für Substanzen mit Absorption im Ultraviolett gefundenen Regel liess vermuten, dass eine *Verschiebung der Stelle selectiver Absorption nach grösseren Wellenlängen* hin die Ursache dieser Erscheinungen sei. Um dies zu prüfen und festzustellen, ob gleichzeitig eine Verbreiterung der Absorptionsbanden eintritt, wurde die Absorption von festem *Fuchsin* gemessen. Die Herstellung von je zwei gleichmässigen dünnen Schichten gelingt mit einiger Uebung nach dem von Hrn. Pflüger[1]) angegebenen Verfahren. Die Beobachtungen bieten indes wegen der starken Absorption ziemlich grosse Schwierigkeiten; auch ist das Temperaturintervall eng begrenzt, weil das Fuchsin über 180° sich zersetzt. Hier erwies sich die Empfindlichkeit der dritten photometrischen Anordnung als sehr nützlich.



λ	Werte von d bei			
	10°	100°	130°	150°
0,63	0,540	0,528	0,520	0,510
0,59	0,347	0,342	0,334	0,336
0,54	0,282	0,285	0,283	0,280
0,50	0,488	0,495	0,505	0,513

1) A. Pflüger, Wied. Ann. **65.** p. 41. 1898.

Das Minimum der Absorption des Fuchsin liegt bei 0,54; vom Maximum nach grösseren Wellenlängen zu nimmt die Absorption mit steigender Temperatur zu, nach kleineren wenn auch in geringerem Maasse ab; im Maximum selbst scheint die Zu- oder Abnahme innerhalb der Beobachtungsfehler zu liegen. Demnach findet wirklich eine Verschiebung der Absorptionscurve nach grösseren Wellenlängen hin statt; eine Ausdehnung des Absorptionsgebietes oder eine Verstärkung desselben ist anscheinend nicht vorhanden.

Eine Bestätigung bietet ferner das Verhalten des Aktinolith. Dieser hat ein Absorptionsmaximum im Ultrarot und eins im Ultraviolett, muss also bei steigender Temperatur im Rot eine Abnahme, im Blau eine Zunahme der Absorption zeigen.

Aktinolith.

Dicke der Platte: 1,01 mm. $n_D = 1,620$.

λ	Werte von d bei				
	15°	100°	200°	300°	350°
0,63	0,438	0,445	0,455	0,464	0,470
0,46	0,500	0,491	0,478	0,470	0,460

Es sind nur Werte von d angegeben, weil der Strahlstein nicht ganz gleichmässig gefärbt, also die Dicke der eigentlich wirksamen Schicht unbekannt war. Die Ergebnisse, welche sich ja nur auf die Aenderung der Absorption mit der Temperatur beziehen, werden dadurch nicht beeinträchtigt.

Aus diesen Versuchen ergiebt sich folgende Regel:

In festen selectiv absorbirenden Körpern bewirkt steigende Temperatur eine Verschiebung der Absorptionscurven nach grösseren Wellenlängen und in einzelnen Fällen gleichzeitig eine geringe Ausdehnung des Absorptionsgebietes. Die Grösse der maximalen Absorption ändert sich anscheinend nicht.

Hierbei ist, was bei festen Körpern gestattet, die Dichteänderung vernachlässigt worden.

Derselbe Satz gilt, wie weitere Beobachtungen ergaben, auch für *Flüssigkeiten* und für die *Absorptionsbanden absorbiren-*

der Gase, wie Brom, Stickstoffperoxyd[1]) etc. im sichtbaren Gebiet. Hr. Paschen[2]) hat bereits früher beobachtet, dass die *Banden* selectiver Emission (bez. Absorption) von Kohlensäure und Wasserdampf ebenfalls mit steigender Temperatur nach grösseren Wellenlängen wandern. So verschiebt sich das Maximum der Emission der Kohlensäure bei 4,75 μ durch eine Temperaturerhöhung von 100 auf 580° um 0,06 μ, was auch in der Grössenordnung der Aenderung bei festen Körpern entspricht.

Die hier aufgestellte Regel steht anscheinend im Widerspruch mit zwei Gruppen von Thatsachen.

Erstens ist die Lage von Spectral*linien* (Absorptions- und Emissionslinien) *von der Temperatur* vollkommen *unabhängig*. Dies gilt nicht nur für Gase, sondern auch für die *Absorptionslinien fester Körper*. Der Verf. untersuchte Cer- und Didymglas und fand, dass die scharfen Absorptionsstreifen von 10—500° dieselbe Lage im Spectrum behalten; und da Absorptions- und Emissionslinien dieser Verbindung übereinstimmen, so folgt, dass eine Beeinflussung durch die Temperatur nicht vorhanden sein kann.

Demnach besteht zwischen *Absorptionslinien* und *Absorptionsbanden* in dieser Hinsicht ein Unterschied.

Obgleich aber die *Lage* der Spectrallinien unabhängig von der Temperatur ist, gilt dies nicht mehr für die *Intensität* der Absorptionslinien. Lässt man die Dichte des in eine Glaskugel eingeschlossenen Stickstoffperoxyd oder Chlor *ungeändert*, und erhitzt allmählich, so treten immer mehr Absorptions*linien* im Gelb und Rot auf, wie auch schon Brewster zeigte. Die Zunahme der Temperatur begünstigt also offenbar die Entstehung von Zuständen, die langwellige Schwingungen zur Folge haben. Folgt man der Annahme von Hrn. Wüllner, dass das Bandenspectrum die Gesamtheit der infolge grösserer Dichte verbreiterten Linienspectra ist, und nimmt ferner an, dass die

---

1) Auch die Farbenänderung des Stickstoffperoxydes (bei — 10° farblose Krystalle und bei 200° braunschwarzer Dampf) ist auf die obige Regel zurückzuführen und wahrscheinlich *nicht* auf den Zerfall von N_2O_4 in NO_2; denn letztere beiden Verbindungen müssen bei *gleicher* Temperatur nahezu gleiche Absorption zeigen, vgl. l. c. p. 21.

2) F. Paschen, Wied. Ann. **50.** p. 409. 1893.

Stellen selectiver Absorption in festen und flüssigen Körpern nichts anderes als die Gesamtheit stärker ausgeglichener Bandenspectra sind, so lässt sich der Zusammenhang zwischen der Intensitätszunahme der Absorptionslinien, welche vom Maximum aus gerechnet nach grösseren Wellenlängen liegen und der Wanderung des Gebietes selectiver Absorption nach derselben Richtung leicht einsehen.

Vergleichen wir zweitens den Gang der Emission mit dem der Absorption bei steigender Temperatur, so zeigt sich, dass beide entgegengesetzt sind. Ein Widerspruch mit dem Kirchhoff'schen Gesetz ist darin noch nicht zu finden, denn es kann gleichwohl die Emission der Absorption bei gleicher Temperatur entsprechen. Aber es folgt daraus, dass der Gang der Emission für einen nicht vollkommen schwarzen Körper auch innerhalb seines Absorptionsgebietes den Strahlungsgesetzen des schwarzen Körpers auch nicht qualitativ gehorchen kann. Bei der Beobachtung der Emissionsintensität von Spectrallinien werden also beide Erscheinungen sich übereinanderlagern und teilweise auch verdecken können; denn während die Steigerung der Temperatur stets eine Vermehrung der Emission hervorrufen muss, wird sie gleichzeitig noch die Möglichkeit bestimmte Schwingungen auszusenden vermehren oder vermindern können.

Beschränkt man sich auf feste Körper, so ergiebt das Kirchhoff'sche Gesetz in Verbindung mit der obigen Regel für die Emission selectiv absorbirender Substanzen im sichtbaren Spectrum folgendes:

1. Substanzen, *deren Absorptionsgebiete sehr weit vom sichtbaren Spectrum im Ultraviolett und Ultrarot liegen*, können beim Erhitzen kein Licht emittiren, so z. B. Fluorit, Quarz. Um dies zu prüfen, wurden ganz reine Quarzstückchen in die Gebläseflamme gebracht; dieselben entsandten kein Licht; die in ihnen stellenweise sichtbaren stark glühenden Punkte sind offenbar Einschlüsse. Ebenso verhält sich der Quarz im äusseren Teil des Knallgasgebläses.

Bringt man ihn aber an die heisseste Stelle, wo er zu amorphem Quarz schmilzt, so emittirt er ein äusserst intensives Licht, welches dem des schmelzenden Platins an dieser Stelle nicht nachsteht; dasselbe Verhalten zeigt der durch-

sichtige Zirkon. Wahrscheinlich ist chemische Zersetzung die Ursache dieses Leuchtens, welches ganz plötzlich ohne Uebergang einsetzt.

2. Substanzen, *deren Absorptionsgebiet nahe im Ultraviolett liegt*, werden beim Erhitzen erst rotes und gelbes und schliesslich weisses Licht emittiren, da mit steigender Temperatur die Absorption sich auf das sichtbare Spectrum erstreckt; dies liess sich am Rutil in der Gebläseflamme feststellen.[1]

3. Substanzen, *deren Absorptionsgebiet nahe im Ultrarot liegt*, müssten sich wie vollkommen durchsichtige verhalten. Solche erhitzbare[2] Substanzen, die nahe im Ultrarot metallische Absorption zeigen, sind nicht bekannt.[3]

Die vom Verf. gefundene Regel erlaubt ferner auf Grund der elektromagnetischen Dispersionstheorien die *Aenderungen des Brechungsindex fester Körper mit der Temperatur* zu erklären, wenn man noch die Annahme zu Hülfe nimmt, dass die Dielektricitätsconstante mit steigender Temperatur stets abnimmt, was für flüssige Isolatoren durch viele Untersuchungen festgestellt worden ist.

Man hat dann folgende Fälle zu unterscheiden:

1. Das Absorptionsgebiet liegt vom sichtbaren Spectrum aus gerechnet nach kürzeren Wellenlängen, also im Ultraviolett. Liegt das Absorptionsgebiet *nahe im Anfang des Ultraviolett*, so überwiegt die infolge Annäherung des Absorptionsgebietes erfolgende Zunahme der Brechung die Abnahme derselben infolge Verringerung der Dielektricitätsconstante, und man bemerkt eine *Vergrösserung der Brechung* und gleichzeitig aus demselben Grunde eine *Steigerung* der *Dispersion*. Dieser Fall ist zuerst von Hrn. Pulfrich[4] an Flintgläsern beobachtet und durch Verstärkung der Absorption erklärt worden. Dasselbe Verhalten zeigen alle Körper mit selectiver Absorption im Ultra-

---

1) Dasselbe findet auch bei allen Gläsern statt; indes müssen hier erst Absorptionsmessungen bei Temperaturen über 500° angestellt werden, um zu unterscheiden, ob die Ausbreitung des ultravioletten Absorptionsgebietes oder ein anderer Vorgang die Ursache ist; der Unterschied der Emission des leicht- und schwerschmelzbaren Glases spricht für letzteres.

2) Die organischen Farbstoffe vertragen keine Erhitzung.

3) Vgl. p. 803.

4) C. Pulfrich, Wied. Ann. **45.** p. 609. 1872.

violett wie Phosphor, Schwefel etc., die auch alle schwach gelb gefärbt sind. Weit geringer ist die Zunahme der Brechung bei der grossen Zahl farbloser Substanzen, deren Absorptionsgebiet schon weiter entfernt ist, wie bei Kalkspat, den Feldspäten und der Crowngläser und vielen anderen Substanzen.[1]) Bei den Crowngläsern findet im Gelb und Rot bereits eine schwache Abnahme statt, weil hier die Abnahme der Dielektricitätsconstante einen stärkeren Einfluss als die Verschiebung des entfernten Absorptionsgebietes hat. Diese Substanzen bilden den Uebergang zu denjenigen, bei welchen das Absorptionsgebiet noch weiter entfernt liegt. Bei diesen ist der Einfluss der Verringerung der Dielektricitätsconstante in allen Teilen des Spectrums vorwiegend; aber auch hier kann die durch Annäherung des Absorptionsgebietes erhöhte Dispersion durch die kleine Verminderung der Dielektricitätsconstante nicht aufgehoben werden, und man beobachtet deshalb zwar *Abnahme* der *Brechung*, aber doch *Zunahme* der *Dispersion*. Zu diesen Substanzen gehören alle, die noch im Anfang des Ultraviolett durchlässig sind, wie Fluorit, Quarz, Steinsalz, Sylvin. Hr. Reed[2]) hat in der That bei Quarz und Fluorit das angegebene Verhalten gefunden.

2. Feste Körper, deren *den Brechungsindex beeinflussendes Absorptionsgebiet nach grösseren Wellenlängen* liegt. Hierfür sind Beispiele im sichtbaren Gebiet einige Anilinfarbstoffe und vielleicht auch Eis. Bei diesen entfernt sich mit steigender Temperatur das Absorptionsgebiet, und es müsste *Abnahme der Brechung*, falls der Einfluss der Dielektricitätsconstante überwiegt, sonst aber *Zunahme* derselben eintreten, und in beiden Fällen jedenfalls als charakteristischer Unterschied von 1. *Abnahme der Dispersion*. Eine Prüfung dieser Folgerung ist noch nicht erfolgt.

Abhängigkeit der Absorption der Metalle von der Temperatur.

Mit derselben Versuchsanordnung wurde die Absorption und Reflexion von Metallschichten untersucht (Gold nach dem Verfahren von Wernicke niedergeschlagen und Goldlösung

1) Vgl. Literatur bei H. Landolt u. R. Börnstein, Tabellen p. 415ff. 1894.

2) J. Reed, Wied. Ann. 65. p. 707. 1898.

von Roessler eingebrannt, Silber nach Böttger und Wiener, Platin nach Kundt und Roessler, Eisen, Nickel, Kupfer nach Kundt elektrolytisch niedergeschlagen); von den drei ersten wurden Schichten von ganz verschiedener Dicke untersucht. Platin aus der Roessler'schen Lösung auf Glas eingebrannt wurde bis 800° erhitzt. Es zeigte sich, dass weder Absorption noch Reflexion von der Temperatur abhängen. Die durch die Ausdehnung bedingte Absorptionsverminderung beträgt bei 360° erst $^1/_{1000}$, was gerade in die Fehlergrenzen fällt.

Zusammenfassung.

In festen selectiv absorbirenden Körpern bewirkt steigende Temperatur eine Verschiebung der Absorptionscurven nach grösseren Wellenlängen und in einzelnen Fällen gleichzeitig eine geringe Ausdehnung des Absorptionsgebietes; die Grösse der maximalen Absorption ändert sich anscheinend nicht.

Bei metallisch absorbirenden Substanzen bleibt die Absorption in einem Temperaturintervall von 10–360° (für Platin bis 800°) ungeändert.

Freiburg i. B., Physikalisches Institut.

(Eingegangen 22. Januar 1901.)

11. *Ueber den Einfluss eines selbstinductionslosen Widerstandes auf die oscillatorische Condensatorentladung;* *von T. Mizuno.*

Die Gleichung für den Entladungsstrom eines Condensators von der Capacität C in einem Draht vom Widerstand R und der Selbstinduction L ist bekanntlich folgende (vgl. auch Fig. 1):

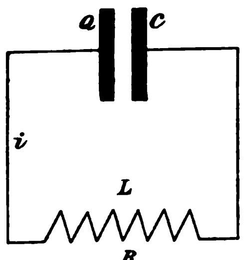


Fig. 1.

$$(1)\qquad \frac{d^2 i}{d t^2} + \frac{R}{L}\frac{d i}{d t} + \frac{i}{L C} = 0.$$

Wenn

$$(2)\qquad R^2 < \frac{4 L}{C},$$

so ist der Entladungsstrom oscillirend und seine Stärke in einem Zeitmoment

$$(3)\qquad i = \frac{Q}{L C\sqrt{\frac{1}{L C} - \frac{R^2}{4 L^2}}}\, e^{-\frac{R}{2L}t} \sin\left[\sqrt{\frac{1}{C L} - \frac{R^2}{4 L^2}}\cdot t\right],$$

wo Q die Anfangsladung des Condensators ist.

Im Folgenden soll der Einfluss eines dem Stromkreise parallelgeschalteten inductionsfreien Widerstandes S (Fig. 2) untersucht werden.

Die Differentialgleichungen sind hier folgende:

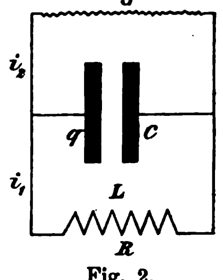


Fig. 2.

$$(4)\qquad S i_2 = \frac{q}{C}.$$

$$(5)\qquad R i_1 + L\frac{d i_1}{d t} = \frac{q}{C},$$

$$(6)\qquad i_1 + i_2 = -\frac{d q}{d t}.$$

Hier bedeuten i_1 und i_2 die Stromstärken, q die Condensatorladung im Zeitmoment t.

Der Index 1 bezieht sich auf den Stromkreis mit, 2 auf den ohne Selbstinduction.

Durch Differentiation von (5) erhalten wir:

$$R \frac{d i_1}{d t} + L \frac{d^2 i_1}{d t} - \frac{1}{C} \frac{d q}{d t} = 0 . \tag{7}$$

Von (4) und (6) wiederum:

$$i_1 + \frac{q}{S C} = - \frac{d q}{d t} .$$

Durch Einsetzung des Wertes q aus (5) in diese letztere Gleichung folgt:

$$i_1 + \frac{1}{S}\left(R i_1 + L \frac{d i_1}{d t}\right) = - \frac{d q}{d t} .$$

Die Differentialgleichung (7) erhält so endlich die Form:

$$\frac{d^2 i_1}{d t^2} + \frac{1}{L}\left(R + \frac{L}{S C}\right)\frac{d i_1}{d t} + \frac{i_1}{L C\left(\frac{S}{R+S}\right)} = 0. \tag{8}$$

Ein Vergleich mit Formel (1) zeigt, dass die Wirkung der Parallelschaltung des inductionslosen Widerstandes S gleichbedeutend ist mit einer scheinbaren Widerstandsvergrösserung und Capacitätsverkleinerung zu den Werten:

$$R' = R + \frac{L}{S C} , \tag{9}$$

$$C' = C \frac{S}{R + S} . \tag{10}$$

Wird S unendlich gross, so reducirt sich Gleichung (8) auf (1). Es ergiebt sich aus der Lösung der Differentialgleichung das interessante Resultat, dass, wenn auch die Entladung durch den inductiven Stromkreis allein ohne parallelgeschalteten Widerstand S oscillirend ist, dies nach Einschaltung des letzteren durchaus nicht mehr der Fall zu sein braucht. Damit Schwingungen eintreten, muss vielmehr der neuen Bedingung genügt sein:

$$R'^2 < \frac{4 L}{C'} , \tag{11}$$

d. h.

$$\left(R + \frac{L}{S\,C}\right)^2 < \frac{4\,L}{C \cdot \frac{S}{R+S}},$$

d. h.

$$R^2\left(1 + \frac{L}{S\,R\,C}\right)^2 < \frac{4\,L}{C}\left(1 + \frac{R}{S}\right),$$

d. h.

$$\frac{L^2}{S^2\,C^2} < \left(\frac{4\,L}{C} - R^2\right) + \frac{2\,L\,R}{S\,C},$$

d. h.

$$E\,C^2\,S^2 + 2\,L\,R\,C\,S > L^2, \tag{12}$$

wo

$$E = \frac{4\,L}{C} - R^2.$$

Die Stromstärke im Hauptkreise ist, vorausgesetzt dass die Ungleichung (12) besteht, gegeben durch den Ausdruck:

$$i_1 = \frac{Q'}{L\,C'\sqrt{\frac{1}{L\,C'} - \frac{R'^2}{4\,L^2}}}\; e^{-\frac{R'}{2\,L}\,t} \sin\left[\sqrt{\frac{1}{L\,C'} - \frac{R'^2}{4\,L^2}}\cdot t\right], \tag{13}$$

wo

$$Q' = Q\,\frac{C'}{C},$$

$$R' = R + \frac{L}{S\,C},$$

und

$$C' = C\,\frac{S}{R+S}.$$

Aus (5) und (6) folgt dann auch die Stromstärke im Nebenschluss S, gleichfalls oscillirend.

Die obige Berechnung hat zu folgenden Resultaten geführt:

1. Die Nebenschaltung eines inductionslosen Widerstandes zu dem Hauptentladungskreis eines Condensators erhöht den scheinbaren Widerstand desselben und somit die Dämpfung der Oscillationen, und zwar um so mehr, je kleiner er ist.

2. Wenn der Widerstand S kleiner wird als der durch Ungleichung (12) gegebene Grenzwert, so wird die Entladung

aperiodisch. Die Einschaltung eines inductionsfreien Widerstandes ist also ein einfaches Mittel, die Periode der Entladung zu verändern.

3. In der beschriebenen Anordnung treten Entladungsschwingungen in einem Kreis ohne Selbstinduction auf. Bei gewöhnlicher Entladung durch inductionsfreie Widerstände ist dies nie der Fall.

Berlin, December 1900.

(Eingegangen 23. Januar 1901.)



12. *Das Luftbarometer;*
von H. A. Naber.

Als historische Ergänzung zum Artikel von Wohlmill[1]) und zu der Beschreibung eines Luftbarometers von Fischer[2]) mögen mir folgende Bemerkungen gestattet sein.

Es giebt ein altes, noch jetzt gebrauchtes, ja gepriesenes, bei Glasfirmen käufliches Luftbarometer. Die Form ist stereotyp wie unten (vgl. Fig. 1).

Die höchst mangelhafte Construction, die Abwesenheit eines Thermometers deuten wohl auf ein hohes Alter; und

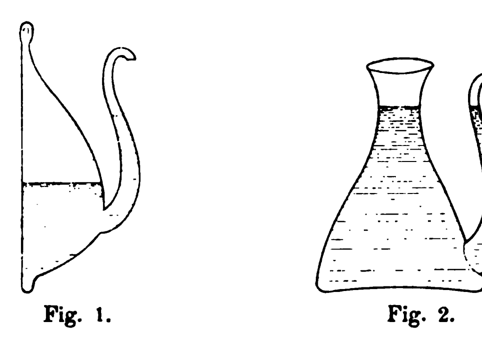


Fig. 1. Fig. 2.

dazu kommt, dass man nirgends eine einzige Zeile diesem Instrumente gewidmet findet. Ist es vielleicht das von Francis Bacon genannte „vitrum calendare"? Oder ist es von ähnlicher Herkunft wie die „Florentiner Flasche" (Fig. 2), die sich noch in chemischen Laboratorien vorfindet und dort als Karaffe benutzt wird?

Leider giebt unsere altholländische Literatur hier keine Anweisung; jedoch ein hohes Alter scheint mir unzweifelhaft, ist ja das Instrument von der Lampe des Cardanus (1550) oder von einer Trinkflasche für Vögel nur wenig verschieden; und folgen wir der Geschichte abgeschlossener Luftvolumina

1) E. Wohlmill, Pogg. Ann. 124. p. 163. 1865.
2) K. Fischer, Ann. d. Phys. 3. p. 428. 1900.

aufwärts, so kommen wir von Cooper auf Caswell, so auf Drebbel, dann auf Sanctorius, Heron, Ktesibius und endlich auf Archimedes, vielleicht auf Egypten; und dabei werden die Instrumente, im Widerspruch mit unserer Erwartung, immer bedeutender und enden mit einem Wunderwerke (ich behandle sie in vier Gruppen).

I. Archimedes, später Posidonius und andere [1]), haben nämlich wunderbare Planetaria construirt, die man am besten autokinetisch nennen könnte, um den befürchteten Ausdruck „perpetuum mobile" zu vermeiden. Von den Zeitgenossen wurden diese Apparate als wahre Wunderwerke beschrieben, ja besungen; es war nicht die schöne Ausführung, es waren nicht die bewegenden Teile: man bewunderte die *Ursache* der Bewegung, das Genie des Erfinders; Sextus Empiricus sagt es ausdrücklich.[2]) Und was den Erfinder betrifft, es kommt in Pappus eine Stelle vor[3]), wo es heisst, dass Archimedes (neben seinen mathematischen Schriften) nur *eine* mechanische Erfindung beschrieben hat; diese war sein Planetarium; seine anderen zahlreichen Erfindungen habe er daneben für nichts geachtet.

Hat man nun die überall nachzuschlagenden Passus aus Cassiodor[4]), Ovid[5]), Cicero[6]) etc. gelesen und vergleicht

1) F. Hultsch, Zeitschrift f. Math. u. Physik p. 107. 1877: „Seit Archimedes galt diese Kunstfertigkeit als eine besondere Disciplin der Mechanik (vgl. Pappus, lib. 7 aus Proclus' Commentar zu Euclid, lib. I)."

2) Sext. Empir. adv. Mathem. p. 329 B: *τά γε μὴν αὐτομάτως κινούμενα τῶν κατασκευασμάτων θαυμαστότερά ἐστι τῶν μὴ τοιούτων. τὴν γοῦν Ἀρχιμήδειον σφαῖραν σφόδρα θεωροῦντες ἐκπληττόμεθα, ἐν ᾗ Ἥλιός τε καὶ Σελήνη κινεῖται, καὶ τὰ λοιπὰ τῶν ἀστέρων, οὐ μὰ Δία ἐπὶ τοῖς ξύλοις οὐδ' ἐπὶ τῇ κινήσει τούτων τεθηπότες, ἀλλ' ἐπὶ τῷ τεχνίτῃ καὶ ταῖς κινούσαις αἰτίαις.*

3) Lib. VIII, 3.

4) Lib. I var. ep. 45: „parva machina gravida mundo, coelum gestabile, compendium rerum, speculum naturae, ad speciem aetheris incredibili mobilitate volutatum.

5) Fastorum VI, v. 271:

> Ipsa volubilitas libratum sustinet orbem,
> . . . Arte Syracosio suspensus in aere clauso
> Stat globus, immensi parva figura poli.

6) Tusc. Disp. I, 25: „Cum Archimedes lunae, solis quinque errantium motus in sphaeram illigavit, effecit idem quod ille qui in Timaeo

dann „A dialogue philosophicall" (1612) von Tymme[1]), einem Freunde unseres Landesgenossen Drebbel, und den Brief des letzteren an Jacobus I., der mechanische Arbeiten zu schätzen wusste, so geht hervor, dass Drebbel ziemlich dasselbe geleistet hat. Und während die genannte Schrift von Tymme den „Mythus" von Drebbel's Leistungen zur Wirklichkeit macht, erklärt sie uns auch die Anordnung von Archimedes und seine Folger; und wiewohl die letzteren ähnliche Instrumente wie Archimedes gemacht haben, werden sie von Drebbel mit ebensoviel Unglauben oder Herablassung erwähnt, wie unsere Zeit dem „Instrumentum Drebbelianum" gegenüber zeigt.

Während also Schieck in einer dem Himmelsglobus des Archimedes gewidmeten Monographie[2]) denselben ein unauflösbares Rätsel nannte und F. Hultsch eine Erklärung zu geben suchte, die den obigen Citaten geradezu widerspricht[3]), kommen wir mit Tymme's, also mit Drebbel's Hülfe zur folgenden, meines Erachtens unabweisbaren, und, wiewohl überraschenden, des Archimedischen Genies würdigen Lösung.

Archimedes hat eine hohle, unten geöffnete Kugel von grossem Diameter gemacht und sie in Wasser untergetaucht,

---

mundum aedificavit, Platonis deus, ut tarditate et celeritate dissimillimos motus una regeret conversio. Quod si in hoc mundo fieri sine deo non potest, ne in sphaera quidem eosdem motus Archimedes sine divino ingenio potuisset imitari."

1) Ich fand diese kleine Schrift vor 6 Jahren im Brit. Museum zu London. Sie enthält ausserhalb der Beschreibung auch eine ziemlich deutliche Zeichnung des königlich aussehenden Instrumentes. Wohlmill (Pogg. Ann. 24. p. 163. 1865), der die Leistungen Drebbel's zu einem Mythus reducirt, hätte seinen Artikel in mancher Hinsicht ändern können, wäre er damit bekannt gewesen. Er hätte seine Vermutung: „Ist vielleicht Drebbel's Perpetuum mobile wirklich eine thermometerartige Vorrichtung gewesen?" bejahen können und sodann nicht gesprochen von einem „letzten Schlupfwinkel Drebbel'scher Ansprüche" und von einem „interessanten Beitrage zur Geschichte des modernen Mythus".

2) Programm Gymn. Hanau 1843 u. 1846. Leider fehlen mir diese und andere in Engelmann's Bibl. Scriptorum Classicorum genannten kleineren Schriften.

3) F. Hultsch (l. c.) nimmt an, „dass der Himmelsglobus des Archimedes durch ein hydraulisches Werk getrieben worden sei; ... an Wasser, als Triebkraft des Kunstwerkes, fehlte es weder in Syracus noch später in Rom". Wir sahen jedoch, dass z. B. Sextus Empiricus ein solches Kunstwerk *nicht* bewundert hätte.

das in einer noch grösseren Kugel oder Halbkugel enthalten war. Die Volumänderungen von der eingeschlossenen Luft[1]) (Druck und Temperatur) verursachten die Bewegung des Ganzen. In der inneren Kugel waren zweifach vergoldete Räder[2]), die nicht der grossen Kraft des Archimedischen Auftriebes ausgesetzt waren, sondern nur den langsamen Veränderungen dieser Kraft und also von ausserordentlicher Feinheit sein konnten.[3])

Nehmen wir nun diese Erklärung als richtig an, so wird auf einmal auch die enorme philosophische Bedeutung[4]) der Archimedischen „σφαῖρα" klar. Denn diese Kugel war offenbar ein Bild der Erde, schwimmend auf dem Weltmeere oder ruhend, während die innere Luft vom Wasser abgeschlossen war; sie besorgte die Bewegung des ganzen Kosmos, der also von Luft, Erde, Wasser, Feuer bewegt wurde (Drebbel) und

1) Dies stimmt mit den Worten des Claudianus, welche Schieck „unauflösbare Rätsel" nannte:

„Inclusus variis famulatur spiritus astris
Et vivum certis motibus urget opus."

2) Diese Besonderheit bezieht sich auf das Drebbel'sche Instrument. Uebrigens hatte Archimedes in Hiero einen Maecenas wie Drebbel in Jacobus I.

3) Tymme sagt: „they cannot weare, and the lesse for that *they are not forced by any poise or weight.*"

4) Auch Drebbel betrachtete sein Instrument als eine Darstellung des Ganzen, oder sagte nur so, um die Bedeutung zu vergrössern. Tymme ist noch deutlicher und *beweist* mit dem Instrumente „that the Heavens move and not the earth". Dieser Umstand schmälert das Verdienst Drebbel's, der anno 1612 Kopernikaner hätte sein sollen. Aber eine solche Bemerkung würde auch Archimedes treffen; sagen wir also, dass Drebbel sich als ein Vorläufer auf chemischem Gebiete zeigte und — wie unglaublich und anachronistisch es auch scheinen mag — *Sauerstoff* gekannt haben muss um damit seine Kugel zu füllen. Sagt doch, wie ich aus Wohlmill's Artikel ersehe, Robert de Fluctibus so etwas von Drebbel's „Spiritus secretus", an den er (R. d. F.) nicht glaubt; aber auch Tymme sagt (l. c.), Drebbel habe „a fierie spirit, out of the mineral matter" extrahirt; und aus der 1663 publicirten, mir nicht zugänglichen „Vogage d'Angleterre" von Montconys soll, wie ich bei Samuel Reyher (1670) finde, folgendes hervorgehen: „Drebbelium *quintam* (ich cursivire) quasi aeris essentiam habuisse, qua omnem aerem respirationi idoneum reddere potuerit, Dr. Boyle et Dr. Montconys testantur."

die ganze Anordnung war ein Bild des Weltalls[1]), an dem Jupiter selbst Behagen fand. Sagt ja Claudianus im 18. Epigramm „In sphaeram Archimedis“:

„Jupiter in parvo cum cerneret aethera vitro
Risit et ad superos talia dicta dedit:

— — — — — — — — — — — — — —

„Jamque suam volvens audax industria mundum
Gaudet, et humana sidera mente regit:
Quid falso insontem tonitru Salmonea[2]) miror?“

War nun die Einrichtung, wie ich oben angab[3]), war es also die Veränderung des Luftvolumens, welche sein Planetarium trieb, so wird wohl nicht bezweifelt werden, dass Archimedes auch die *Veränderungen* im *Archimedischen* Auftrieb hohler Körper gekannt und näher untersucht hat. Denn Studium und Vorbereitungen zu der kostbaren Einrichtung hätten ja einen weniger genialen Mann zur Entdeckung des Archimedischen Princips geführt, sind ja hydrostatische Experimente mit solchen hohlen Körpern besonders anregend und möchten letztere in dieser Hinsicht der massiven Krone Hiero's überlegen sein.

Wird nun zugegeben, dass Archimedes den veränderlichen Auftrieb wahrscheinlich gekannt hat, so folgt, dass Archimedes, der die Sache auf so grosser Scala verfolgte, die unregelmässigen Bewegungen nicht hat übersehen *können*, welche Caswell[4]), Prof. d. Astr. zu Oxford, in einem Briefe

---

1) Hätte Plutarchus nicht so bestimmt die Figur auf Archimedes' Grabmal beschrieben (Kugel und umschriebener Cylinder), so dürfte es zweifelhaft sein, ob es nicht eher eine Abbildung des Planetariums war. Das Grabmal wurde von Marcellus gesetzt; und er sandte die zwei Planetaria als eine Trophäe nach Rom. Uebrigens ist der Tod des Archimedes doch wohl der drohenden Zerstörung seines Apparates zuzuschreiben. Des Plutarch' dritte Erzählung besagt, dass Soldaten des Marcellus dem Archimedes begegneten, der seine Apparate dem römischen Sieger zu übertragen begriffen war; man vermutete, es sei Gold darin etc.

2) Salmoneus hatte den Blitz nachahmen wollen.

3) Ich kann noch keine Antwort auf die Frage geben, wie tief die Kugel in Wasser tauchte, aber sie ist nicht essentiell. Die Kugel hat ja auch feststehen können, ohne dass die Bewegung des Planetariums dadurch litt.

4) Im Fischer'schen Artikel wurde Oliver als Autor genannt; dieser jedoch schrieb einen dem Caswell'schen vorangehenden Artikel botanischen Inhalts in den Phil. Trans.

an seinen Collegen Flamsteed zu Greenwich beschrieb und in den Phil. Trans. 1705 publicirte. Denn Caswell beobachtete einen Apparat, der, wiewohl er dem des Archimedes ähnelte, weit weniger bedeutend war; das Instrument hatte keine weitere Pretension als ein Variationsbarometer zu sein, und lud deshalb gar nicht zu den fortdauernden Studien ein, die Archimedes seinen eigenen Instrumenten gewidmet haben muss.

Wie die Zeichnung (Fig. 3) angiebt, war die Caswell'sche Anordnung der neulich hier von Fischer beschriebenen ähnlich; und wiewohl eine constante Temperatur nicht zu erreichen gesucht ward, es war ein vortreffliches, genau berechnetes Variationsbarometer, 1200mal so fein wie das Quecksilberbarometer.

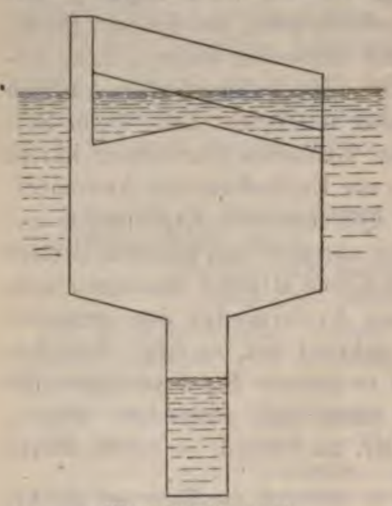


Fig. 3 (Scala 1 : 5).

Ich habe in meinem Buche „Standard methods criticised" (London 1894 bei Geo Tucker) auf die Richtigkeit der Caswell'schen Beobachtungen gewiesen. Sein Instrument trug keinen Deckel, und er hat damit neben den mit dem Wind zusammenhängenden Barometerstörungen auch die damals gewiss unbekannte *strahlende Wärme der Wolken* beobachtet (auch: Unterschied gewöhnlicher und Hagelwolken!), sodass er unbewusst 100 Jahre vor Leslie ein Aethrioskop erfand.

Ist also das Caswell'sche Barometer dem Apparate von Drebbel und Archimedes ähnlich, es ist weniger interessant; jedoch es ist dem Cooper'schen, anno 1839 in den Phil. Trans. publicirten Barometer in dieser Hinsicht weit überlegen.

Was die schwimmenden Barometer angeht, so wäre die Geschichte hiermit breit genug behandelt. Nur möchte ich hier von dem Cartesianischen Taucher etwas sagen, da er

dieser Gruppe am besten einzuverleiben ist. Es wundert mich, dass der Erfinder[1]), als er das labile Gleichgewicht sah, dem Taucher keine feine bis auf den Boden gehende Kette angehängt hat.

Eine Kette ist ja das Mittel, dem Taucher eine beliebig grosse Stabilität zu geben. Da er auf und ab geht, wäre sein Gang sehr leicht photographisch zu registriren.

II. Aehnliches Loos, nämlich abwechselnde Anerkennung und Vergessenheit bez. zu denselben Zeiten, wurde dem Hooke'schen Barometer zu Teil. Dies Instrument, eine Vereinigung von Luft- und Flüssigkeitsthermometer, wurde von Halley, Phipps und anderen mit bestem Erfolge gebraucht; es geriet ca. 1800 in Vergessenheit und wurde dann 1816 aufs neue erfunden von Adie, der es „Sympiesometer" nannte. Und wiederum gebrauchten und lobten es Seefahrer und wissenschaftliche Männer (John Ross, James D. Forbes). Ungefähr 1830 findet man, das Instrument sei wohldurchdacht, von anerkannter Eleganz, an Bord von grossem Nutzen. Aber 1870 war es schon wieder vergessen, diesmal wohl durch die Einführung des Aneroides. Und wiewohl Calantarients als auch später Callendar automatischen Ausgleich des Temperatureinflusses erdachten, und neuerdings Grützner einen Apparat vorschlug, der bei constanter Temperatur (n. l. der Zunge) abgelesen werden soll (und wohl zu einfach, auch für Bergsteiger, zu sein scheint); — das Hooke'sche Barometer hat sich bis jetzt nicht wieder geltend machen können, ja es wird in keinem meteorologischen oder physikalischen Werke erwähnt.

III. In dritter Linie haben wir dann die von Magnus, August, Brunner, Blakesley vorgeschlagenen Apparate zur Messung nicht der Druckänderungen, sondern des Druckes selbst. Sie beruhen alle auf dem Boyle'schen Gesetze.

IV. Endlich könnten die Vorrichtungen von Davy, Doyère, Gibbs, Lunge etc. zur Reduction von Gasvolumina auf 0°

---

1) Ich fand den Apparat in Cartesius' Werken nicht erwähnt, wohl aber in Boyle's. Uebrigens kam ihnen die Natur zuvor, wenn sie den „Nautilus" machte.

760 mm zu den Luftbarometern gerechnet werden und wäre hier am besten unterzuordnen der am Anfang genannte, von mir als das eigentliche, ursprüngliche „Wetterglas“ betrachtete Apparat.

Von der Zuverlässigkeit des Luftbarometers völlig überzeugt, und nachdem ich in meinem Voltameter einen zu der vierten Gruppe gehörenden Apparat angebracht, construirte ich dann 1895 drei Modelle zu den übrigen Gruppen gehörend, und beschrieb sie in der „Tydschrift voor toegepaste scheikunde en Hygiene“ 1897. Das erste ist ein Variationsbarometer, das den Uebelständen des Apparates von Hefner-Alteneck nicht unterworfen ist. Es gestattet eine willkürliche Feinheit und ist der Ausschlag der zu observirenden Druckänderung proportional. Wie Fig. 4 angiebt, besteht es aus einem grossen mit Luft gefüllten cylindrischen Gefäss, in Wasser oder Petroleum untergetaucht. Hahn *A* dient zur Einstellung des Meniscus *C*, Hahn *B* dient nur Reinigungszwecken. *D* ist die Oeffnung der Spirale. Sind *A* und *B* geschlossen, so sieht man den Meniscus bei *C* in fortdauernder Bewegung begriffen. Das Instrument ist leicht zu aichen; man braucht es ja nur ein wenig (1 cm) aus der Flüssigkeit zu heben, und die von *C* zurückgelegte Strecke zu beobachten.

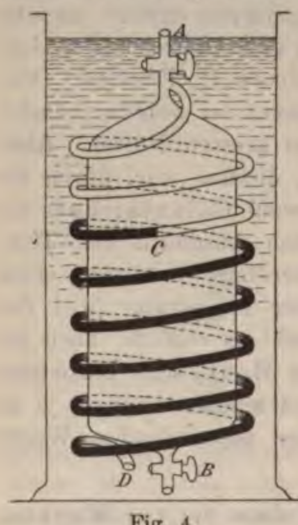


Fig. 4.

Das Richard'sche Statoskop, ein dem Aneroid ähnlicher, jedoch mit Luft gefüllter Apparat, wäre seines Registrirens wegen dem obigen vorzuziehen, wird aber kostspieliger sein. Wie dem auch sei, mein Apparat hat mich überzeugt, dass die *Unruhe* der Atmosphäre eine bedeutende Grösse ist; eine Definition sollte die Meteorologie bald aufstellen.

Eine Bemerkung möchte ich hier noch anknüpfen. Das Variationsbarometer im allgemeinen würde von hervorragendem

Interesse sein, wenn Prof. Pictet[1]) aus Genf Recht gehabt, als er im Jahre 1810 behauptete, die Barogramme für London, Madrid, Turin etc. seien *hauptsächlich* dieselben. Leider fehlt mir zur Zeit das Material zur Verification dieser der heutigen Meteorologie unglaublich vorkommenden wie auch unbekannten Behauptung.[2]) Sollte Pictet Recht haben — und sein umfangreiches Material, die von einem jüngeren Pictet publicirten synoptischen Barogramme, seine hohe wissenschaftliche Stellung sollten die Meteorologie von einem aprioristischen Urteil abhalten —, so erlangen die kleinen Differenzen der Ordinate und Abscisse, welche auch Pictet nicht übersehen hat, eine grosse Wichtigkeit, und damit das Variationsbarometer.

Der zweite von mir construirte Apparat ist ein gewöhnliches Barometer, speciell Taschenbarometer. Es beruht auf Hooke's Princip; also ist *A* (Fig. 5) ein Quecksilberthermometer (z. B. 0—20°), *B* ein Luftthermometer; Gummiringe halten sie

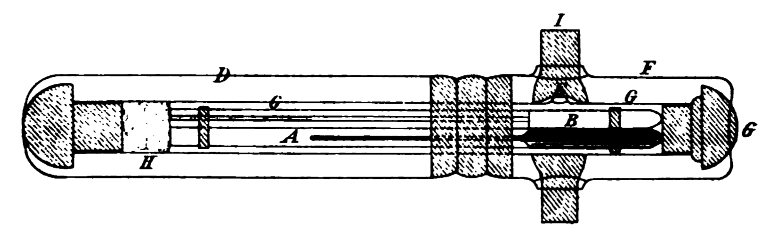


Fig. 5 (Scala 1 : 2).

nebeneinander fest; sie sind enthalten im Tubus *C*, der grösstenteils mit Wasser gefüllt ist. Durch *E* und *G* ist Communication mit der Atmosphäre. Nun ist *B* so gemacht worden, dass bei Erwärmung der relative Stand von *A* und *B* (d. h. des Quecksilbers in *A* und der Luft in *B*) nicht geändert wird. Also liest man nur diesen relativen Stand ab. Dem Thermometer *A* oder *B* giebt man eine solche Scala, dass Aenderungen des relativen Standes ohne Umrechnung in Millimeter Quecksilber abgelesen werden können.

1) Bibl. Britannique 1810. II. p. 22. Vgl. auch andere Artikel ebendaselbst, oder Gilb. Ann. 41. p. 74. 1812.

2) Ich habe sie natürlich verificirt für Amsterdam, London, Edinburg, Berlin und Paris, soweit die dürftigen Zeitungsbarogramme etc. es mir ermöglichten.

Zur Constanterhaltung der Temperatur während des Ablesens dienen die Luftbäder *D* und *F*. Beim Ablesen hält man das Instrument horizontal und sorgt für constante Temperatur durch lindes Neigen nach jeder Seite. Will man zum Versenden etc. die Oeffnung *E* abschliessen, so kann *F* um 90° gedreht werden, sodass der Pfropfen *J* vor die Oeffnung kommt und sie abschliesst. Damit keine Luft in *B* eindringe, ist ein Wattenpfropf *H* angebracht.

Diese Instrumente habe ich monatelang in der Tasche getragen und observirt. Es zeigte sich eine Contraction des Luftvolumens in *B*. Diese war im Anfang gross[1]), wurde aber regelmässig kleiner, und als ich das Instrument nicht bei mir trug, hörte sie am Ende beinahe völlig auf. Zur gänzlichen Erklärung oder Beseitigung dieses Effectes bin ich noch nicht gelangt; es ist aber der einzige Fehler des Instrumentes, und bei Bergbesteigungen wäre es doch wohl dem Aneroid vorzuziehen, kann man ihm doch jede beliebige Form geben. Adie hat in seinen Sympiesometern Mandelöl gebraucht; dieses aber hat für meinen Zweck zu grosse Viscosität.

Das gezeichnete Instrument, $^1/_2$ der wahren Grösse, ist ebenso fein wie das Quecksilberbarometer. Es ist 1 mm Veränderung des relativen Standes von *A* und *B* ungefähr identisch mit 1 mm Quecksilber.

In dritter Linie construirte ich einen Apparat zur Bestimmung des Druckes vermittelst des Boyle'schen Gesetzes. Es ist nämlich mein Wasserstoffvoltameter mit seinem variablen Niveau zur Herstellung und Messung von Druckunterschieden vorzüglich geeignet.[2]) Ich nehme dazu die Burette mit Wasserbad heraus und bringe eine vertical im Wasser treibende Scala, von einem Cylinder umgeben, hinein (Fig. 6). Diesen Cylinder verbinde ich mit dem daneben stehenden Apparate (Fig. 7). Das Volumen *A* ist ungefähr 50 mal kleiner als *B* und wird diese Zahl durch Auswägen genau bestimmt. Hat man nun in *C* Schwefelsäure oder Petroleum und in *B* trockene Luft,

1) Correspondirender täglicher Fehler: $^1/_2$ mm Quecksilber.

2) Es findet sich die Beschreibung unter anderen in „The Electrician“ 1894, El. chem. Zeitschrift 1898, El. chem. Kalender der letzten Jahre und eine vollständige Behandlung in der holländischen Zeitschrift „Electra“ von 1900.

so wird Hahn *F* geöffnet und das Voltameter links besorgt die Einstellung der Flüssigkeit bei *b*. Dann liest man die Scala ab; es sei der Minderdruck p_1. Wenn man jetzt die Flüssigkeit bei *a* einstellt, Hahn *F* schliesst und den Minderdruck zur Einstellung bei *b* aufs neue bestimmt, findet man den viel grösseren Minderdruck p_2. Und der gesuchte Barometerstand berechnet sich wie folgt:

$$(n + 1)(p_2 - p_1) \text{ oder } \frac{n+1}{13,6} \cdot (p_2 - p_1),$$

wenn *n* das Verhältnis der Volumina *B* und *A* ist.

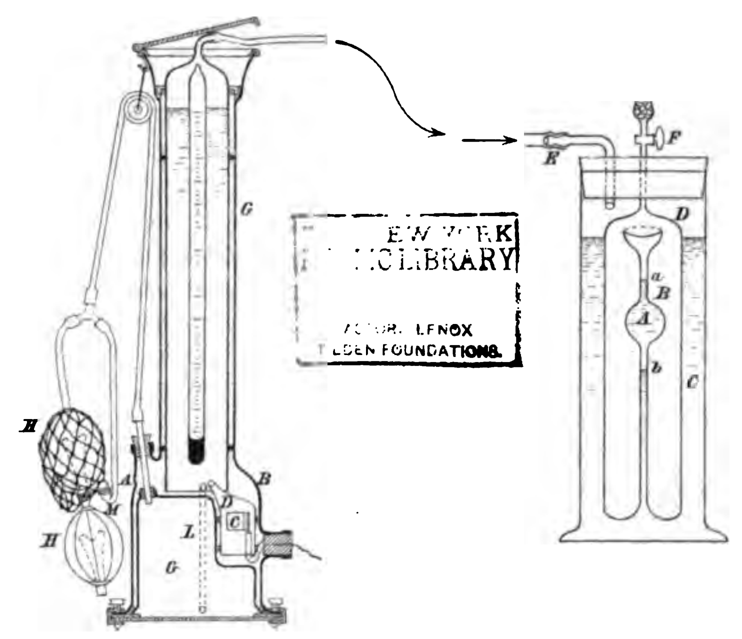


Fig. 6 (Scala 1 : 7). Fig. 7 (Scala 1 : 2).

Leider habe ich mit dem Apparate nur wenig arbeiten können, verzichte also auf die Behandlung der Besonderheiten. Nur möchte ich betonen, dass die Ablesung des Flüssigkeitniveaus im Voltameter sehr genau geschehen kann, weil es ringförmig ist und die Scala umfasst, sodass Parallax ausgeschlossen ist. Und zweitens, dass die Flüssigkeit *C* zu gleicher Zeit die Temperatur constant hält.

Schlussbemerkungen.

Ich meine also, das Luftbarometer sei allen Anforderungen gewachsen. Es hat sich in einer anspruchslosen Form Jahrhunderte lang aufrecht gehalten; es hat dem Caswell, ja vielleicht schon dem Archimedes vor Jahrhunderten bereits die dem schwächsten Winde folgenden Druckschwankungen offenbart, welche kein anderer als S. P. Langley im Jahre 1894[1]) vermutete, jedoch nachzuweisen nicht im stande war; es ist ferner wohl das Sympiesometer deshalb mit Misstrauen begegnet worden, weil es den Druckänderungen besser folgte, als das Quecksilberbarometer; und endlich kann das Barometer des August und von anderen, wenn man darauf ebensoviel Zeit, Mühe und Kosten verwendet, wie auf Normalbarometer (die in verschiedenen Orten oft gar nicht übereinstimmen), denselben meines Erachtens leicht an Genauigkeit gleichkommen. Aber neben den künstlichen Luftbarometern möchte ich vorschlagen, denen der Natur mehr Aufmerksamkeit zuzuwenden; giebt es ja Beispiele genug von grossen, kleinen, gelösten Gasvolumina, die zum Teil von dem grossen Publikum als Barometer gebraucht werden (Luft in Grotten von constanter Temperatur, Minengasen etc.). Deren Existenz ist meines Erachtens zuzuschreiben, dass die Tiere so gute Wettervorboten sind; dass Fische und Vögel grössere Luftvolumina in ihrem Körper enthalten, ist ja bekannt; auch eine Schnecke wie der Nautilus.

Das Barometer der Natur ist das Luftbarometer; ihr sollten wir folgen und wenigstens teilweise zu dem Luftbarometer zurückkehren. In der Thermometrie hat man ja ähnliches gethan.

Amsterdam, Januar 1901.

(Eingegangen 17. Januar 1901.)

Nachschrift.

Das neulich in den Beiblättern genannte Werk von A. Daul nennt zwar Archimedes und Drebbel, giebt aber

1) S. P. Langley, „The internal work of the wind". Am. Journ. of Sc. (3) **47.** p. 41. 1894.

keine Erklärung. Jedoch diese Art „Perpetuum mobile" war, soviel mir bekannt, bis jetzt die einzige, welche des Namens (in ursprünglicher Bedeutung) wirklich würdig ist. Die Construction ist wahrscheinlich erst in den letzten Jahrhunderten vergessen worden, denn nach Archimedes haben Posidonius und andere sie gemacht. Weiter ist ein Instrument, das man Karl V. geschenkt hat und von John Dee und Cardanus gesehen wurde, wahrscheinlich ähnlicher Natur gewesen; und Drebbel hat auch mehrere Exemplare angefertigt.

Zu bedauern ist, dass diese Kunst ganz vergessen worden; würde ja ein Instrument, das ein Planetarium treiben konnte, wohl auch im stande sein, die Meteorographen längerer Periode zu treiben — wozu man 1894—1895 mit fraglichem Erfolge auf dem Mont-Blanc ein Gewicht von 90 kg benutzte.

Was Drebbel's Sauerstoff angeht, einen schlagenden Beweis findet man bei Boyle, Opera I. p. 140, wo er das Drebbel'sche unter Wasser fahrende Boot beschreibt.

Am Ende möchte ich den Leser höflichst bitten, mir womöglich historische oder sonstige Beiträge zukommen zu lassen.

13. Ueber die Spectralgleichung des blanken Platins; von D. A. Goldhammer.

In der vorliegenden Notiz erlaube ich mir einige Bemerkungen über die Form der Spectralgleichung des blanken Platins mitzuteilen, welche bei weiteren Untersuchungen über denselben Gegenstand vielleicht nicht ohne Nutzen sein werden.

1. In bekannten Bezeichnungen lautet das Kirchhoff'sche Gesetz:

$$\frac{e_\lambda}{a_\lambda} = \varepsilon_\lambda .$$

Stellen wir uns einen strahlenden *nicht* schwarzen blanken festen Körper vor, immer von solcher Dicke gewählt, dass man

$$a_\lambda = 1 - J_\lambda$$

setzen kann, worin J_λ das Reflexionsvermögen des Körpers bedeutet, so lässt sich a_λ durch N und K darstellen, wenn man mit N den Brechungs-, mit K den Absorptionscoefficienten bezeichnet.

Es ist dann nämlich:

$$J_\lambda = \frac{(1 - N)^2 + K^2}{(1 + N)^2 + K^2}, \quad a_\lambda = \frac{4\,N}{(1 + N)^2 + K^2}.$$

Nun sind nach allen Dispersionstheorien $N^2 - K^2$ und $2\,N\,K$ gewisse *algebraische* Functionen von λ; es ist somit dies auch für a_λ der Fall: *a_λ soll also eine algebraische Function von λ sein*; dabei kann natürlich die Abhängigkeit von der Temperatur auch transcendent sein.

Wir schliessen daraus: *enthält der Ausdruck für ε_λ eine transcendente Function von λ, so muss auch e_λ dieselbe Function enthalten.*

Nach Thiesen[1]) haben wir z. B.:

$$\varepsilon_\lambda = \frac{C\,T^5}{(\lambda\,T)^{4,5}} \cdot e^{-\frac{c}{\lambda\,T}},$$

$$c = 4,5\,\lambda_m\,T;$$

es soll daher jede e_λ, für jeden blanken festen Körper, den Factor $e^{-\frac{c}{\lambda T}}$ enthalten.

2. Es sei ferner gesetzt

$$a_\lambda = \varphi\,(T, \lambda\,T);$$

da immer

$$a_\lambda \leqq 1$$

ist, so folgt auch

$$\varphi\,(T, \lambda\,T) \leqq 1.$$

Schreiben wir für die schwarze Strahlung

$$\varepsilon_\lambda = C\,T^5\,F(\lambda\,T),$$

so haben wir offenbar ganz allgemein

$$e_\lambda = C\,T^5\,F(\lambda\,T)\,\varphi\,(T, \lambda\,T);$$

da aber immer

$$e_\lambda \leqq \varepsilon_\lambda$$

sein soll, so folgt:

$$\int\limits_0^\infty e_\lambda\,d\lambda \leqq \int\limits_0^\infty \varepsilon_\lambda\,d\lambda,$$

oder

$$e \leqq \varepsilon,$$

worin e, ε die Gesamtstrahlungen bedeuten.

Nach dem Stefan'schen Gesetz ist

$$\varepsilon = \sigma\,T^4;$$

es muss auch

$$e = \Phi\,(T)$$

sein; setzen wir

$$e = \Phi\,(T) = \sigma\,T^4 f\,(T),$$

so folgt unmittelbar

$$f\,(T) \leqq 1.$$

1) M. Thiesen, Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. 2. p. 37. 1900.

Daraus schliessen wir:

$$f(T) = A T^n, \quad n \gtreqless 0$$

$$f(T) = B e^{c T^p}, \quad p > 0,$$

und dergleichen Functionen sind für $f(T)$ unmöglich.

Wenn also nach den Beobachtungen von Lummer und Pringsheim[1]) die Gesamtstrahlung des Platins nahezu der fünften Potenz der Temperatur proportional fortschreitet, so kann ein solches Gesetz eine Geltung nur als eine empirische Formel haben.

3. Es sei ferner e_m die maximale Energie eines strahlenden festen Körpers bei irgend einer Temperatur; die entsprechende Wellenlänge sei λ_m'; dann ist, wenn wir setzen $\varepsilon_\lambda^m = \varepsilon(\lambda_m')$,

$$e_m \leqq \varepsilon_\lambda^m;$$

es sei ε_m die maximale Energie des schwarzen Körpers bei derselben Temperatur; dann ist

$$\varepsilon_\lambda^m \leqq \varepsilon_m,$$

und folglich a fortiori

$$e_m \leqq \varepsilon_m$$

oder

$$e_m T^{-5} \leqq \varepsilon_m T^{-5}.$$

Nun ist bekanntlich für die schwarze Strahlung

$$\varepsilon_m T^{-5} = \text{const.} = B.$$

Es folgt daraus

$$e_m T^{-5} \leqq B,$$

oder auch

$$e_m T^{-6} \leqq \frac{B}{T}.$$

Nach den Beobachtungen von Lummer und Pringsheim[2]) scheint $e_m T^{-6}$ nahezu constant zu bleiben; wäre aber wirklich

$$e_m T^{-6} = \text{const.} = D',$$

so würde folgen

$$D' T \leqq B,$$

1) O. Lummer u. E. Pringsheim, Verhandl. d. Physik. Gesellsch. zu Berlin **17.** p. 106. 1898.

2) O. Lummer u. E. Pringsheim, Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. **1.** p. 215. 1899.



was offenbar unmöglich ist. *Es kann also für keinen Körper* $e_m T^{-5}$ *constant bleiben.* Unverändert bleiben soll aber der Wert

$$\frac{e_m T^{-5}}{\varphi(T, \lambda_m' T)} = C . F(\lambda_m' T) = D.$$

Da nun

$$B = C F(\lambda_m T)$$

ist, so haben wir

$$D = B \cdot \frac{F(\lambda_m' T)}{F(\lambda_m T)} .$$

Ist uns also die Form der Function $F(\lambda T)$ für die schwarze Strahlung bekannt, so lässt sich D für jeden Körper berechnen, wenn nur B, $\lambda_m T$ und $\lambda_m' T$ bekannt sind.

4. Die angeführten Betrachtungen erlauben uns eine Eigentümlichkeit in der Emission des blanken Platins zu erklären, die Lummer und Pringsheim beobachtet hatten. Diese Verfasser[1]) haben nämlich gefunden, dass die Spectralgleichung des Platins sich in der Form

$$e_\lambda = \frac{C'}{\lambda^5} e^{-\frac{c'}{\lambda T}}$$

darstellen lässt, wenn C' selbst eine Temperaturfunction bedeutet. Für jede Temperatur ist dabei das Uebereinstimmen der beobachteten Curven mit den berechneten „überraschend". Setzen wir

$$C' = C \psi(T),$$

worin C die entsprechende Constante der schwarzen Strahlung bedeutet, so haben wir

$$e_\lambda = C \frac{\psi(T)}{\lambda^5} e^{-\frac{c'}{\lambda T}}$$

und nach dem Früheren muss sein

$$c' = c = 4,5 \lambda_m T,$$

worin $\lambda_m T$ sich auf die schwarze Strahlung bezieht und etwa 2940 ist. Nun wird das Maximum von e_λ bestimmt durch die Beziehung

$$\frac{\partial e_\lambda}{\partial \lambda} = 0, \quad 5 = \frac{c}{\lambda_m' T},$$

woraus sich $\lambda_m' T$ berechnen lässt, und zwar wird

$$\lambda_m' T = \frac{c}{5} = 0,9 . 2940 = 2646 ,$$

1) O. Lummer u. E. Pringsheim, l. c. p. 234; O. Lummer u. E. Jahnke, Ann. d. Physik. 3. p. 294. 1900.

was sehr nahe an den direct von genannten Verfassern gefundenen Wert 2626 kommt. Wir sehen also, dass die Gleichung

$$e_\lambda = C\,T^5 \frac{\psi(T)}{(\lambda\,T)^5}\, e^{-\frac{c}{\lambda T}}$$

nicht weit von dem wahren Gesetz der Strahlung des blanken Platins liegt; doch ist diese Formel nicht ganz richtig, wenn die Thiesen'sche Formel wahr ist, und umgekehrt. In der That, berechnen wir a_λ aus den Werten von e_λ und ε_λ, so bekommen wir

$$\frac{e_\lambda}{\varepsilon_\lambda} = a_\lambda = \frac{\psi(T)}{\sqrt{\lambda\,T}},$$

was offenbar unmöglich ist, da dabei die Bedingung

$$a_\lambda \leqq 1$$

nicht erfüllt ist.

5. Zum Schluss sei mir noch eine Bemerkung gestattet. Die neuesten Beobachtungen von Lummer und Pringsheim[1]) haben gezeigt, dass für lange Wellen und hohe Temperaturen die Thiesen'sche Formel etwas zu grosse Zahlen giebt; so ist z. B. für $\lambda = 12{,}3\,\mu$ (l. c. p. 178)

	$T =$ 287	373	700	1095	1200	1492	1650
Beobachtet $\varepsilon_\lambda =$	0,040	0,099	0,49	1,11	1,29	1,78	1,96
nach Thiesen $\varepsilon_\lambda =$	0,040	0,107	0,57	1,24	1,41	1,87	2,11
nach Planck $\varepsilon_\lambda =$	0,040	0,107	0,55	1,26	1,46	2,02	2,34

Freilich sind dabei die beobachteten Zahlen um einige Procente unsicher, da die Correctionen infolge der Breite des Spaltes und des Bolometers nicht angebracht sind. Nun hat ganz neuerdings Planck[2]) eine Formel für die schwarze Strahlung vorgeschlagen, die lautet:

$$\varepsilon_\lambda = \frac{C}{\lambda^5}\,\frac{1}{e^{\frac{c}{\lambda T}} - 1}.$$

1) O. Lummer u. E. Pringsheim, Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. 2. p. 163. 1900.

2) M. Planck, Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. 2. p. 237. 1900.



Berechnen wir daraus c mit der Bedingung

$$\frac{\partial \varepsilon_\lambda}{\partial \lambda} = 0,$$

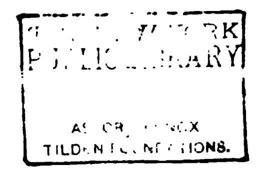
so ergiebt sich etwa

$$c = 14597.$$

Nehmen wir ε_λ für $T = 287$ als Ausgangspunkt, und berechnen dann ε_λ für andere Temperaturen bei $\lambda = 12{,}3\,\mu$, so bekommen wir die Zahlen der letzten Reihe der angeführten kleinen Tabelle. Diese Zahlen sind bei den Temperaturen von 1000° abs. aufwärts immer grösser, als dieselben nach Thiesen. Ist also wirklich die Thiesen'sche Formel unrichtig, so wäre das auch für die neue Planck'sche Formel der Fall.

Kasan, 15./2. Januar 1901.

(Eingegangen 23. Januar 1901.)



14. *Ueber den Druck der Lichtstrahlen*[1]; *von D. A. Goldhammer.*

Bartoli[2]) hat auf Grund von thermodynamischen Betrachtungen das Resultat abgeleitet, dass die auf eine vollkommen reflectirende Fläche normal auffallenden Lichtstrahlen auf dieselbe einen Druck p ausüben, welcher gleich ist der doppelten Energie e in der Volumeneinheit der einfallenden Strahlen: $p = 2e$.

Für einen allseitig mit gleich temperirten, für Wärme undurchlässigen Wänden umgebenen, absolut leeren Raum (Vacuum) berechnete Boltzmann[3]), immer auf dem thermodynamischen Wege, auf eine absolut spiegelnde Fläche

$$p = \tfrac{1}{3} e,$$

indem er das Stefan'sche Strahlungsgesetz in Betracht zog. In einer späteren Arbeit über denselben Gegenstand bemerkt Boltzmann[4]), dass aus der Beziehung

$$p = \tfrac{1}{3} e$$

$p = e$ bez. $p = 2e$ folgen würde für normale Incidenz auf eine absorbirende bez. vollkommen reflectirende Fläche und dass dieses Resultat mit den Folgerungen aus der elektromagnetischen Lichttheorie Maxwell's übereinstimmt.

In der That lesen wir bei Maxwell den folgenden für *nicht leitende* Körper geltenden Satz[5]): „in a medium in which waves are propagated there is a pressure in direction normal to the waves and numerically equal to the energy in unit of volum"; einige Zeilen weiter (Art. 793) äussert sich Maxwell in einer noch viel allgemeineren Weise, indem er sagt: „a flat

1) Aus den „Archives Néerlandaises", 1900; für die Ann. d. Phys. zum Teil neu bearbeitet vom Verfasser.

2) A. Bartoli, Sopra i movementi prodotti dalla luce e dal calore. 56 pp. Firenze 1876.

3) L. Boltzmann, Wied. Ann. **22**. p. 31. 1884.

4) l. c. p. 293.

5) J. C. Maxwell, Treatise on electricity and magnetism, Second ed. **11**. p. 401. Art. 792. 1881.

body exposed to sunlight would experience this pressure on its illuminated side only, and would therefore be repelled from the side on which the light falls".

Diese Behauptung Maxwell's interpretirt nun Boltzmann in folgender Weise: „Maxwell's Resultat gilt," sagt er[1]), „wenn der Strahl senkrecht auf die gedrückte Fläche auffällt und von derselben absorbirt wird. Würde er nahe senkrecht auffallen und unter demselben Winkel reflectirt, so wäre der Druck der doppelte." Natürlich sind hier Absorption und Reflexion als vollkommen gemeint.

Wir sehen also, dass es zwei vollkommen voneinander unabhängige Wege zur Ableitung dieses sogenannten „Lichtdruckes" giebt: der thermodynamische und der elektromagnetische.

Nun schreibt Boltzmann selbst seinen Rechnungen einen „vielfach provisorischen Charakter" zu[2]); Bartoli hält die Einführung des Lichtdruckes nur als „l'ipotesi più semplice"[3]); auch nach Boltzmann[4]) könnte der Widerspruch mit dem zweiten Hauptsatze „auch durch eine andere Hypothese gehoben werden".

Was aber die elektromagnetische Lichttheorie Maxwell's anbetrifft, so ist ohne weiteres klar, dass der oben angeführte (aus Art. 792) Satz noch nicht erlaubt, direct über die an der Grenze zweier Medien wirkende ponderomotorische Kräfte zu schliessen, denn auf eine Grenzfläche gegen einen anderen Körper wirkt durchaus nicht dieser Druck direct, sondern „die Resultirende derjenigen Kräfte, welche sich nach der aus der Elasticitätstheorie bekannten Regel aus den im Innern eines jeden Körpers vorhandenen Spannungen ergeben.[5])

Nur in den Grenzfällen einer normalen Incidenz auf eine vollkommen reflectirende bez. vollkommen schwarze Fläche kann diese Resultirende direct angegeben werden: bei einer vollkommenen Reflexion sind alle elektromagnetische Vectoren im Innern des reflectirenden Körpers Null; bei einer voll-

1) L. Boltzmann, l. c. p. 291—292.
2) l. c. p. 293.
3) A. Bartoli, l. c. p. 25.
4) L. Boltzmann, l. c. p. 38.
5) Vgl. F. Pockels, Grunert's Archiv 12. p. 60. 1894.

kommenen Absorption könnte man sagen, es existiren in dem absorbirenden Körper keine elektromagnetische Vectoren *als solche.* Diese Vorstellung giebt aber zu Bedenken Anlass; vielmehr muss man in diesem Falle die beiden sich angrenzenden Körper als optisch identisch — an der Trennungsebene — betrachten.[1])

Diese Folgerungen gelten aber nicht ohne gewisse Beschränkungen; sie sind nämlich nur dann richtig, wenn thatsächlich die ponderomotorische Wirkung des Lichtes einzig nur aus dem von Maxwell abgeleiteten Drucke p besteht, d. h. die elektromagnetischen Spannungen derart sind, dass sie *keine auf innere Volumenelemente des Körpers wirkende Kräfte ergeben.* Und dies ist *im allgemeinen* gerade nicht der Fall, wie es schon Hertz[2]) bemerkt hatte. Dann aber bleibt auch die Frage über den Lichtdruck selbst in den Grenzfällen der absoluten Reflexion bez. Absorption ganz offen.

1. Betrachten wir den allgemeinen Fall eines polarisirbaren, leitenden und sich mit den Geschwindigkeitscomponenten α, β, γ bewegenden Mediums, so lauten die Gleichungen der elektromagnetischen Lichttheorie nach Hertz[3]) und v. Helmholtz[4]), indem man für homogene isotrope Körper

$$\mathfrak{L} = \mu L, \qquad \mathfrak{M} = \mu M, \qquad \mathfrak{N} = \mu N,$$
$$\mathfrak{X} = \varepsilon X, \qquad \mathfrak{Y} = \varepsilon Y, \qquad \mathfrak{Z} = \varepsilon Z$$

1) Für einen sich z. B. im Vacuum befindenden Körper ist das Reflexionsvermögen

$$J = \frac{(1 - N)^2 + K^2}{(1 + N)^2 + K^2},$$

wenn N den Brechungs-, K den Absorptionscoefficienten bedeuten. Für eine schwarze Fläche muss $J = 0$ sein, woraus folgt die optische Identität $N = 1$, $K = 0$. Dann existirt aber kein *einseitiger* Druck an der Trennungsebene.

Bei dieser Gelegenheit sei noch folgendes bemerkt: wenn ein Körper in Berührung mit zwei verschiedenen Körpern schwarz erscheint, so muss er offenbar *optisch inhomogen* sein. Das stimmt mit der bekannten Thatsache überein, dass Russ u. dgl. schwarze Körper sehr stark porös sind. Am einfachsten wären dieselben als eine Reihe von Hohlkörpern anzusehen. Vgl. F. Kurlbaum, Wied. Ann. **67.** p. 885. 1899.

2) H. Hertz, Wied. Ann. **41.** p. 398. 1890.

3) l. c. p. 374.

4) H. v. Helmholtz, Wied. Ann. **47.** p. 13. 1892

setzt, μ, ε als Constante betrachtet und die Bezeichnungen von Hertz benutzt,

$$A\mu\left\{\frac{\partial L}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y}(\beta L-\alpha M)-\frac{\partial}{\partial z}(\alpha N-\gamma L)\right.$$
$$\left.+\alpha\left(\frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial z}\right)\right\}=\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z},$$

analog für M, N, und

$$A\varepsilon\left\{\frac{\partial X}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y}(\beta X-\alpha Y)-\frac{\partial}{\partial z}(\alpha Z-\gamma X)\right.$$
$$\left.+\alpha\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)\right\}=\frac{\partial M}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial y}-4\pi A u,$$

analog für Y und Z.

2. Wir wollen zunächst die Werte der ponderomotorischen Kräfte im Innern unseres Mediums auf etwas anderem Wege ableiten, als es bei Hertz und v. Helmholtz der Fall war.

Zu dem Zweck multipliren wir unsere Gleichungen mit

$$\frac{1}{4\pi A}\,d\Omega,$$

worin $d\Omega$ ein Volumenelement bedeutet, dann der Reihe nach mit L, M, N, X, Y, Z, addiren und integriren über einen durch eine geschlossene Fläche begrenzten Raum mit constantem ε, μ.

Dann bekommen wir nach der Ausführung der partiellen Integration in dem ersten Integrale auf der rechten Seite:

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint d\Omega\left\{\frac{\varepsilon}{8\pi}(X^2+Y^2+Z^2)+\frac{\mu}{8\pi}(L^2+M^2+N^2)\right\}$$
$$+\frac{1}{4\pi}\iiint d\Omega\,\mu\left\{\frac{\partial\alpha}{\partial x}(M^2+N^2)+\frac{\partial\beta}{\partial y}(L^2+N^2)+\frac{\partial\gamma}{\partial z}(L^2+M^2)\right.$$
$$\left.-LM\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)-MN\left(\frac{\partial\beta}{\partial z}+\frac{\partial\gamma}{\partial y}\right)-LN\left(\frac{\partial\gamma}{\partial x}+\frac{\partial\alpha}{\partial z}\right)\right\},$$
$$+\frac{1}{4\pi}\iiint d\Omega\,\varepsilon\left\{\frac{\partial\alpha}{\partial x}(Y^2+Z^2)+\frac{\partial\beta}{\partial y}(X^2+Z^2)+\frac{\partial\gamma}{\partial z}(X^2+Y^2)\right.$$
$$\left.-XY\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)-YZ\left(\frac{\partial\beta}{\partial z}+\frac{\partial\gamma}{\partial y}\right)-XZ\left(\frac{\partial\gamma}{\partial x}+\frac{\partial\alpha}{\partial z}\right)\right\},$$
$$+\frac{1}{4\pi}\iiint d\Omega\left\{\tfrac{1}{2}\alpha\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu(L^2+M^2+N^2)+\varepsilon(X^2+Y^2+Z^2)\right]\right.$$
$$+\tfrac{1}{2}\beta\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu(L^2+M^2+N^2)+\varepsilon(X^2+Y^2+Z^2)\right]$$
$$\left.+\tfrac{1}{2}\gamma\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu(L^2+M^2+N^2)+\varepsilon(X^2+Y^2+Z^2)\right]\right\},$$

$$= \frac{1}{4\pi A}\iint d\,S\{\cos n\,x\,(M Z - N Y) + \cos n\,y\,(N X - L Z) + \cos n\,z\,(L Y - M X)\},$$

$$- \iiint d\,\Omega\,(u\,X + v\,Y + w\,Z),$$

worin $d\,S$ ein Element der Oberfläche, n die innere Normale bedeuten.

3. Beschäftigen wir uns nun mit der physikalischen Deutung der einzelnen Glieder dieser Gleichung. Offenbar bedeutet das erste Glied links die zeitliche Aenderung der gesamten Volumenenergie; das zweite und dritte Glied stellen offenbar die Arbeit der ponderomotorischen Kräfte dar, die als Drucke auf die Seiten eines elementaren Parallelepipedon $d\,\Omega$ wirksam sind.

Auf der rechten Seite stellt das erste Integral den Poynting'schen Ausdruck für die durch die Grenzfläche einströmende Energie dar, das zweite diejenige Energie, welche in Wärme nach dem Joule'schen Gesetz verwandelt wird. Es bleibt uns nur das Integral

$$\frac{1}{4\pi}\iiint d\,\Omega\Big\{\tfrac{1}{2}\alpha\frac{\partial}{\partial x}[\mu(L^2 + M^2 + N^2) + \varepsilon(X^2 + Y^2 + Z^2)] + \tfrac{1}{2}\beta\frac{\partial}{\partial y}[\mu(L^2 + M^2 + N^2) + \varepsilon(X^2 + Y^2 + Z^2)] + \tfrac{1}{2}\gamma\frac{\partial}{\partial z}[\mu(L^2 + M^2 + N^2) + \varepsilon(X^2 + Y^2 + Z^2)]\Big\}$$

übrig, von dessen Deutung auch der Gesamtwert der ponderomotorischen Kräfte abhängt.

4. Bemerken wir aber, dass, wie unsere Integrale zeigen, die uns interessirenden Kräfte von α, β, γ explicite unabhängig sind und dass also dieselben der Form nach unverändert bleiben sollen, auch wenn die Körperteile in Ruhe, ebenso wenn die elektromagnetischen Vorgänge statisch sind, so folgt unmittelbar, dass das genannte Integral nicht einfach als Arbeit der auf ein inneres Volumenelement wirkenden Kräfte zu deuten ist.

Wir müssen vielmehr das Integral durch partielle Integration in zwei Ausdrücke zerteilen, von denen nur der eine die in Betracht kommende Arbeit darstellt.

In dieser Weise bekommt man

$$-\frac{1}{8\pi}\iint dS\{\mu(L^2+M^2+N^2)+\varepsilon(X^2+Y^2+Z^2)\}\times$$
$$(\alpha\cos nx+\beta\cos ny+\gamma\cos nz),$$

$$-\frac{1}{8\pi}\iiint d\Omega\{\mu(L^2+M^2+N^2)+\varepsilon(X^2+Y^2+Z^2)\}\times$$
$$\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial\gamma}{\partial z}\right).$$

Das erste Glied ist nun als diejenige Energieströmung zu betrachten, die von der Bewegung der Materie abhängt und die also eine Erweiterung des Poynting'schen Satzes darstellt[1]); was aber das Volumenintegral anbetrifft, so ist dasselbe mit den anderen die Arbeit darstellenden Integralen zu verbinden. Wir gelangen auf diese Weise zu dem zuerst von Hertz[2]) abgeleiteten Ausdruck der Arbeit von ponderomotorischen Kräften

$$\iiint d\Omega\left\{X_x\frac{\partial\alpha}{\partial x}+Y_y\frac{\partial\beta}{\partial y}+Z_z\frac{\partial\gamma}{\partial z}\right.$$
$$\left.+X_y\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)+Y_z\left(\frac{\partial\beta}{\partial z}+\frac{\partial\gamma}{\partial y}\right)+Z_x\left(\frac{\partial\gamma}{\partial x}+\frac{\partial\alpha}{\partial z}\right)\right\}.$$

$$X_x=X_x'+X_x''\ \text{etc.}\qquad X_y=X_y'+X_y''\ \text{etc.}$$

$$X_x'=\frac{\mu}{8\pi}(-L^2+M^2+N^2),\qquad X_y'=Y_x'=-\frac{\mu}{4\pi}LM,$$

$$Y_y'=\frac{\mu}{8\pi}(\ L^2-M^2+N^2),\qquad Y_z'=Z_y'=-\frac{\mu}{4\pi}MN,$$

$$Z_z'=\frac{\mu}{8\pi}(\ L^2+M^2-N^2),\qquad Z_x'=X_z'=-\frac{\mu}{4\pi}NL,$$

$$X_x''=\frac{\varepsilon}{8\pi}(-X^2+Y^2+Z^2),\qquad X_y''=Y_x''=-\frac{\varepsilon}{4\pi}XY,$$

$$Y_y''=\frac{\varepsilon}{8\pi}(\ X^2-Y^2+Z^2),\qquad Y_z''=Z_y''=-\frac{\varepsilon}{4\pi}YZ,$$

$$Z_z''=\frac{\varepsilon}{8\pi}(\ X^2+Y^2-Z^2),\qquad Z_x''=X_z''=-\frac{\varepsilon}{4\pi}ZX,$$

der nach der Ausführung der partiellen Integration die folgende Form annimmt:

---

1) Vgl. W. Wien, Wied. Ann. **47.** p. 337. 1892

2) H. Hertz, Wied. Ann. **41.** p. 394. 1890.

$$-\iiint d\Omega\left\{\alpha\left(\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_x}{\partial y}+\frac{\partial Z_x}{\partial z}\right)+\beta\left(\frac{\partial X_y}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Z_y}{\partial z}\right)\right.$$
$$\left.+\gamma\left(\frac{\partial X_z}{\partial x}+\frac{\partial Y_z}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}\right)\right\}$$
$$-\iint dS\{\alpha(X_x\cos nx+X_y\cos ny+X_z\cos nz)$$
$$+\beta(Y_x\cos nx+Y_y\cos ny+Y_z\cos nz)$$
$$+\gamma(Z_x\cos nx+Z_y\cos ny+Z_z\cos nz)\}.$$

5. Wir schliessen daraus, dass die zur Untersuchung stehenden ponderomotorischen Kräfte sich in zwei Kräftearten zerlegen lassen: mit den Componenten

$$\Xi=-\frac{\partial X_x}{\partial x}-\frac{\partial Y_x}{\partial y}-\frac{\partial Z_x}{\partial z},$$
$$\mathsf{H}=-\frac{\partial X_y}{\partial x}-\frac{\partial Y_y}{\partial y}-\frac{\partial Z_y}{\partial z},$$
$$\mathsf{Z}=-\frac{\partial X_z}{\partial x}-\frac{\partial Y_z}{\partial y}-\frac{\partial Z_z}{\partial z}$$

die auf innere Volumenelemente des Körpers wirkenden Kräfte, und mit den Componenten

$$\Xi_n=-\overline{X}_x\cos nx-\overline{X}_y\cos ny-\overline{X}_z\cos nz,$$
$$\mathsf{H}_n=-\overline{Y}_x\cos nx-\overline{Y}_y\cos ny-\overline{Y}_z\cos nz,$$
$$\mathsf{Z}_n=-\overline{Z}_x\cos nx-\overline{Z}_y\cos ny-\overline{Z}_z\cos nz$$

die auf jeder Grenzfläche wirkenden, worin $\overline{X}_x, \ldots$ die Werte von $X_x, \ldots$ unendlich nahe an der Grenzfläche von der Seite der inneren Normale n bedeuten.

6. Die Ausführung der Differentiation in den Ausdrücken von $\Xi, \ldots$ ergiebt nun

$$\Xi=\frac{\mu}{4\pi}L\left(\frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial z}\right)+\frac{\varepsilon}{4\pi}X\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)$$
$$+\frac{\mu}{4\pi}M\left(\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial x}\right)\qquad+\frac{\varepsilon}{4\pi}Y\left(\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}\right)$$
$$+\frac{\mu}{4\pi}N\left(\frac{\partial L}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\qquad+\frac{\varepsilon}{4\pi}Z\left(\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}\right),$$

analog für H, Z.

Es sei unser Körper zunächst in Ruhe; wir lassen durch denselben sich eine elektromagnetische Störung fortpflanzen, die durch bekannte Gleichungen

$$A\mu\frac{\partial L}{\partial t}=\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z},\quad A\varepsilon\frac{\partial X}{\partial t}=\frac{\partial M}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial y}-4\pi A u,$$

$$A\mu\frac{\partial M}{\partial t}=\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x},\quad A\varepsilon\frac{\partial Y}{\partial t}=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial z}-4\pi A v,$$

$$A\mu\frac{\partial N}{\partial t}=\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y},\quad A\varepsilon\frac{\partial Z}{\partial t}=\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial x}-4\pi A w,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial z}=0,\qquad \frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=0$$

dargestellt wird. Dann folgen die Werte von Ξ, H, Z in der Form

$$\Xi=\frac{A\varepsilon\mu}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}(MZ-NY)+A\mu(Mw-Nv),$$

$$\mathsf{H}=\frac{A\varepsilon\mu}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}(NX-LZ)+A\mu(Nu-Lw),$$

$$\mathsf{Z}=\frac{A\varepsilon\mu}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}(LY-MX)+A\mu(Lv-Mu),$$

worin

$$u=\frac{X}{k},\quad v=\frac{Y}{k},\quad w=\frac{Z}{k}$$

ist und k den specifischen Widerstand des Körpers bedeutet.

Um nun α, β, γ zu finden, sollen wir diese Kräfte als *äussere* Kräfte in die bekannten Differentialgleichungen der Bewegung elastischer Körper einführen; in gleicher Weise müssen $\overline{\Xi}_n$, $\overline{\mathsf{H}}_n$, $\overline{\mathsf{Z}}_n$ als äussere Kräfte in die Grenzbedingungen der elastischen Druckkräfte eingesetzt werden. Sind dabei $X, \ldots N$ periodisch veränderlich, so wird dasselbe auch für α, β, γ der Fall, sodass wir im allgemeinen elastische Schwingungen erhalten werden. Da aber, wie schon v. Helmholtz[1]) bemerkt hatte, $\Xi, \ldots \mathsf{Z}_n$ Grössen zweiten Grades und bei regelmässigen Lichtschwingungen verschwindend kleine zweiter Ordnung sind, so werden auch α, β, γ ebenso klein und wir können daher den Einfluss von α, β, γ auf L, M, N, X, Y, Z auch für die bestevacuirten Räume ausser acht lassen.[2]) Nur für den reinen Aether (sogar ohne Beharrungsvermögen) wäre

1) H. v. Helmholtz, Wied. Ann. **53.** p. 139. 1894.

2) H. Hertz, Wied. Ann. **41.** p. 398. 1890.

die von diesen Kräften herrührende Bewegung zu untersuchen, wie es v. Helmholtz gethan hat.

7. Nach diesen Ueberlegungen bieten für uns die momentanen Werte von $\Xi, \ldots \Xi_n, \ldots$, also auch von $X_x, \ldots$ kein Interesse dar; wir werden daher unsere Aufgabe in der Weise beschränken können, dass wir immer nur die mittleren Werte der Kräfte für die ganze Schwingungsperiode in Rechnung ziehen. Wir nehmen ferner an, dass L, M, N, X, Y, Z die Form

$$a \cos\left(b - \frac{2\pi t}{T}\right)$$

haben, worin a, b Functionen der Coordinaten sind, von der Zeit aber unabhängig; dann reducirt sich die Berechnung der Mittelwerte von $\Xi, \ldots$ auf die Integration der Ausdrücke von der Form

$$\frac{1}{T}\int_t^{t+T} A \frac{\partial}{\partial t}\left\{\cos\left(b - \frac{2\pi t}{T}\right)\cos\left(b' - \frac{2\pi t}{T}\right)\right\} dt$$
$$+ \frac{1}{T}\int_t^{t+T} B \cos\left(b - \frac{2\pi t}{T}\right)\cos\left(b' - \frac{2\pi t}{T}\right) dt,$$

was offenbar giebt

$$\frac{B}{2}\cos(b - b').$$

Es können also bei den gewöhnlichen Lichtschwingungen die Mittelwerte von $\Xi, \ldots$ nur dann verschwinden, wenn

$$\frac{MZ - NY}{k} = 0, \quad \frac{NX - LZ}{k} = 0, \quad \frac{LY - MX}{k} = 0,$$

also wenn entweder

$$MZ - NY = 0, \quad NX - LZ = 0, \quad LY - MX = 0,$$

oder

$$k = \infty.$$

Da ferner $MZ - NY, \ldots$ die Componenten des bekannten Poynting'schen Vectors darstellen, so sehen wir daraus, das *auch in den Leitern* die Werte von $\Xi, \ldots$ innig mit der Bewegung der Energie verbunden sind.[1])

1) Vgl. H. v. Helmholtz, Wied. Ann. 53. p. 139. 1894.



Von jetzt ab wollen wir im weiteren unter $X_x, \ldots \Xi, \ldots \Xi_n, \ldots X^2 \ldots$ immer die in der angegebenen Weise berechneten Mittelwerte verstehen.

8. Wir stellen uns nun zwei sich an der Ebene $z = 0$ angrenzende Medien vor und wählen die yz-Ebene für die Einfallsebene einer linearpolarisirten ebenen Lichtwelle, sodass wir setzen

$$Y = Z = 0, \quad L = 0.$$

Von der Seite der negativen z liege ein *nichtleitendes* Medium, für welches offenbar gilt

$$\Xi = 0, \quad \mathrm{H} = 0, \quad \mathrm{Z} = 0,$$

$$X_x = \frac{\mu}{8\pi}(\;\;M^2 + N^2) - \frac{\varepsilon}{8\pi}X^2, \quad X_y = 0,$$

$$Y_y = \frac{\mu}{8\pi}(-M^2 + N^2) + \frac{\varepsilon}{8\pi}X^2, \quad Y_z = -\frac{\mu}{4\pi}MN,$$

$$Z_z = \frac{\mu}{8\pi}(\;\;M^2 - N^2) + \frac{\varepsilon}{8\pi}X^2, \quad Z_x = 0,$$

und an der Ebene $z = 0$, wo $\cos nz = -1$ ist, haben wir

$$\Xi_n = 0, \quad \mathrm{H}_n = +\overline{Y_z}, \quad \mathrm{Z}_n = +\overline{Z_z}.$$

Setzen wir in leicht verständlichen Bezeichnungen

$$X_0 = \mathfrak{A}_0 \cos 2\pi\left(\frac{z\cos\varphi + y\sin\varphi}{\lambda} - \frac{t}{T}\right),$$

$$X_r = \mathfrak{A}_r \cos\left[2\pi\left(\frac{-z\cos\varphi + y\sin\varphi}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) + \delta\right]$$

und rechnen wir $\mathfrak{A}_r$ immer positiv, so folgt für die Mittelwerte $X^2 = (X_0 + X_r)^2$ etc. auf der Ebene $z = 0$

$$\frac{\mu}{8\pi}X^2 \;\;= \tfrac{1}{2}\,\frac{\varepsilon}{8\pi}(\mathfrak{A}_0^2 + \mathfrak{A}_r^2 + 2\,\mathfrak{A}_0\,\mathfrak{A}_r\cos\delta),$$

$$\frac{\mu}{8\pi}M^2 \;\;= \tfrac{1}{2}\,\frac{\varepsilon}{8\pi}(\mathfrak{A}_0^2 + \mathfrak{A}_r^2 - 2\,\mathfrak{A}_0\,\mathfrak{A}_r\cos\delta)\cos^2\varphi,$$

$$\frac{\mu}{8\pi}N^2 \;\;= \tfrac{1}{2}\,\frac{\varepsilon}{8\pi}(\mathfrak{A}_0^2 + \mathfrak{A}_r^2 + 2\,\mathfrak{A}_0\,\mathfrak{A}_r\cos\delta)\sin^2\varphi,$$

$$\frac{\mu}{4\pi}MN = -\frac{\varepsilon}{8\pi}(\mathfrak{A}_0^2 - \mathfrak{A}_r^2)\sin\varphi\cos\varphi.$$

Bezeichnen wir ferner durch e_0, e_r die Energie in der Volumeneinheit der einfallenden bez. der reflectirten Strahlen, so ist bekanntlich

$$\frac{\varepsilon}{8\pi}\mathfrak{A}_0^2 = e_0, \quad \frac{\varepsilon}{8\pi}\mathfrak{A}_r^2 = e_r,$$

und wir bekommen

$$\begin{aligned} \overline{X}_x &= -2\sqrt{e_0 e_r}\cos\delta\cos^2\varphi, & \overline{X}_y &= 0, \\ \overline{Y}_y &= 2\sqrt{e_0 e_r}\cos\delta + (e_0 + e_r)\sin^2\varphi, & \overline{Y}_z &= (e_0 - e_r)\sin\varphi\cos\varphi, \\ \overline{Z}_z &= (e_0 + e_r)\cos^2\varphi, & \overline{Z}_x &= 0 \end{aligned}$$

und folglich

$$\overline{\Xi}_n = 0, \quad \overline{\mathrm{H}}_n = (e_0 - e_r)\sin\varphi\cos\varphi, \quad \overline{\mathrm{Z}}_n = (e_0 + e_r)\cos^2\varphi.$$

9. Die Reflexionsebene erleidet also einen *von dem auffallenden und reflectirten Lichte herrührenden schiefen Druck* p in der Einfallsebene, dessen Richtung mit der z-Axe einen Winkel ψ bildet, sodass

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{e_0 - e_r}{e_0 + e_r}\operatorname{tg}\varphi,$$

$$p = \cos\varphi\sqrt{e_0^2 + e_r^2 + 2\,e_0\,e_r\cos 2\varphi}.$$

Führen wir das Reflexionsvermögen J_φ der Ebene $z = 0$ ein, so folgt $e_r = J_\varphi\,e_0$, und

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{1 - J_\varphi}{1 + J_\varphi}\operatorname{tg}\varphi,$$

$$p = e_0\cos\varphi\sqrt{1 + J_\varphi^2 + 2\,J_\varphi\cos 2\varphi}.$$

Für den Fall *vollkommener Reflexion* haben wir $J_\varphi = 1$ und

$$\psi = 0,$$

$$p = 2\,e_0\cos^2\varphi,\text{[1]}$$

für *vollkommene Absorption* wird $J_\varphi = 0$ und

$$\psi = \varphi,$$

$$p = e_0\cos\varphi,$$

endlich für *normale Incidenz* ist

$$\psi = 0,$$

$$p = e_0(1 + J_0).$$

1) Vgl. die Betrachtungen von Boltzmann, l. c. p. 292.



Daraus folgt gerade das Resultat von **Maxwell** für $J_0 = 0$ und von **Boltzmann** für $J_0 = 1$.

10. Wir stellen uns vor, dass die einfallenden Strahlen einen Kreiscylinder bilden, dessen Axe die $z = 0$-Ebene in dem Coordinatenanfang schneidet; diese Strahlen beleuchten auf der Ebene $z = 0$ eine Ellipse, deren Axen in der Richtung von y und x-Axe fallen. Die reflectirten Strahlen bilden offenbar einen ähnlichen Cylinder. *Ausserhalb der Schnittpunkte der beiden Cylinder* haben wir, wie leicht zu ersehen ist, für die einfallenden Strahlen:

$$\begin{aligned} X_x &= 0, & X_y &= 0, \\ Y_y &= e_0 \sin^2\varphi, & Y_z &= e_0 \sin\varphi\cos\varphi, \\ Z_z &= e_0 \cos^2\varphi, & Z_x &= 0. \end{aligned}$$

Eine einfache Coordinatentransformation zeigt, dass diese Kräfte nur eine Resultirende geben, und zwar einen mit der Wellennormale zusammenfallenden Druck, dessen Wert e_0 beträgt, wie es schon **Maxwell** auf anderem Wege gefunden hat. Ein solcher Druck kann keine auf der Mantelfläche des Cylinders wirkende Kraft ergeben; dasselbe Resultat gilt natürlich auch für die reflectirten Strahlen. Es bleiben also im ersten Medium nur Kräfte in den Schnittpunkten der beiden cylindrischen Mantelflächen.

Ihre grösste Wirkung erhalten diese Kräfte bei der normalen Incidenz. Dann sind die Mittelwerte

$$\frac{\varepsilon}{8\pi} X^2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{8\pi}\left(\mathfrak{A}_0^2 + \mathfrak{A}_r^2 + 2\,\mathfrak{A}_0\,\mathfrak{A}_r \cos\left(\frac{4\pi z}{\lambda} - \delta\right)\right),$$

$$\frac{\mu}{8\pi} M^2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{8\pi}\left(\mathfrak{A}_0^2 + \mathfrak{A}_r^2 - 2\,\mathfrak{A}_0\,\mathfrak{A}_r \cos\left(\frac{4\pi z}{\lambda} - \delta\right)\right)$$

und folglich

$$\begin{aligned} X_x &= -2\sqrt{e_0\,e_r}\cos\left(\frac{4\pi z}{\lambda} - \delta\right), & X_y &= 0, \\ Y_y &= 2\sqrt{e_0\,e_r}\cos\left(\frac{4\pi z}{\lambda} - \delta\right), & Y_z &= 0, \\ Z_z &= e_0 + e_r, & Z_x &= 0 \end{aligned}$$

und auf der Mantelfläche des Cylinders

$$\Xi_n = -X_x \cos nx, \quad \mathsf{H}_n = -Y_y \cos ny, \quad \mathsf{Z}_n = 0.$$

11. Bisher haben wir die Wellenbewegung an der Seite der positiven z ganz ausser acht gelassen. Jetzt wenden wir uns zu den hier wirkenden ponderomotorischen Kräften. Das Medium mit $z > 0$ sehen wir als eine Platte an, deren Dicke h und deren Breite so gross sind, dass kein in die Platte gebrochener Strahl aus derselben heraustritt.

Ist nun unsere Platte unbeweglich, so wird dieselbe durch die im Inneren und auf der vorderen Basis wirkende Kräfte deformirt, was seinerseits die elastische Reaction des Plattenmateriales hervorrufen wird. Diese elastischen Kräfte zu berechnen ist eine sehr schwierige Aufgabe. Es ist aber auch von vornherein klar, dass diese elastische Reaction nicht ohne Einfluss auf die Resultirende der an der Ebene $z = 0$ wirkenden Kräfte bleiben kann. Auch im Falle der normalen Incidenz verschwinden die Kräfte X_x, Y_y im Inneren der Platte nicht.

Es wird aber unsere Aufgabe sich sehr vereinfachen, wenn wir uns die Platte als vollkommen beweglich vorstellen; natürlich nehmen wir dann das die Platte umgebende Medium flüssig an. Dann haben wir nur die resultirende Kraft bez. Kräftepaare zu berechnen, die die Platte als ganzes zu verschieben bez. drehen streben. Nun aber sind die Kräfte Ξ, H, Z im Inneren der Platte und $\overline{\Xi}_n$, $\overline{\mathsf{H}}_n$, $\overline{\mathsf{Z}}_n$ gerade derart, dass

$$\iint \overline{\Xi}_n \, dS + \iiint \Xi \, d\Omega = 0,$$

und analog für H, Z

$$\iint (y\,\overline{\Xi}_n - x\,\overline{\mathsf{H}}_n)\, dS + \iiint (y\,\Xi - x\,\mathsf{H})\, d\Omega = 0,$$

und analog für die anderen Drehungsmomente. In diesem Falle haben wir also nur mit der Wellenbewegung im ersten Medium zu thun und die von dem Lichte herrührenden ponderomotorischen Kräfte setzen sich aus einem „Lichtdruck“ zusammen, den die Platte erleidet, und noch aus gewissen Kräften, die im ersten Medium wirksam sind und die Strömungen im flüssigen Dielektricum hervorrufen werden.

12. Wir wollen noch den Fall einer vollkommen durchsichtigen Platte untersuchen, und zwar soll für $z > h$ wieder dasselbe Medium sein, wie für $z < 0$.

Der Einfachheit wegen nehmen wir jetzt $\varphi = 0$, also betrachten den Fall der normalen Incidenz, und suchen die die vollkommen bewegliche Platte in Bewegung zu setzen strebenden Kräfte. Da dieselben nach dem früheren nur von dem Lichte ausser der Platte abhängen, so haben wir mit der Lichtbewegung in der Platte nichts zu thun. Es sei e_1 die mittlere Energie der Volumeneinheit der Strahlen, die im ersten Medium sich in der Richtung von der Platte fortpflanzen; ebenso sei e_d die Energie der Strahlen, die aus der Platte bei $z = h$ herausgetreten sind. Dann haben wir

$$z = 0, \quad \bar{Z}_0 = e_0 + e_1, \quad \cos nz = -1,$$
$$z = h, \quad \bar{Z}_h = -e_d, \quad \cos nz = +1$$

und die die Platte in der Richtung der z-Axe bewegende Kraft, der Lichtdruck, wird

$$p = e_0 + e_1 - e_d.$$

Bekanntlich ist

$$e_d = e_0 \frac{1 - J_0}{1 + J_0},$$

$$e_0 = e_1 + e_d,$$

woraus folgt

$$p = 2\,e_0 \left(1 - \frac{1 - J_0}{1 + J_0}\right)$$

oder

$$p = e_0 \frac{4\,J_0}{1 + J_0}.$$

Bei $J = \frac{1}{3}$ würde folgen $p = e_0$, gerade wie in dem Falle einer absolut schwarzen Fläche. Da ferner

$$J_0 = \left(\frac{N-1}{N+1}\right)^2$$

ist, so können wir auch schreiben

$$p = 2\,e_0 \frac{(N-1)^2}{N^2+1}.$$

Für das Glas in der Luft ist $N = 1{,}5$; für den Diamanten ist $N = 2{,}5$; das giebt im ersten Falle

$$p = 0{,}15 \,.\, e_0,$$

in dem zweiten

$$p = 0{,}62 \,.\, e_0.$$

Für eine lichtabsorbirende Platte haben wir abgeleitet

$$p = e_0 (1 + J_0);$$

für blankes Platin beträgt J_0 etwa 0,70, daraus folgt

$$p = 1,7 \,.\, e_0 .$$

Wir betrachten dabei die Platte offenbar so dick, dass die Erscheinungen der „dünnen Blättchen" ausser acht gelassen werden können.

13. Für den zweiten Hauptfall der Polarisation müssen wir

$$M = 0, \quad N = 0, \quad X = 0$$

setzen, dann ist:

$$X_x = \frac{\varepsilon}{8\pi}(\quad Y^2 + Z^2) - \frac{\mu}{8\pi} L^2, \quad X_y = 0,$$

$$Y_y = \frac{\varepsilon}{8\pi}(- Y^2 + Z^2) + \frac{\mu}{8\pi} L^2, \quad Y_z = - \frac{\varepsilon}{4\pi} Y Z,$$

$$Z_z = \frac{\varepsilon}{8\pi}(\quad Y^2 - Z^2) + \frac{\mu}{8\pi} L^2, \quad Z_x = 0,$$

und bekommen wir die früheren Werte von $X_x, \ldots$ nur mit dem Unterschiede, dass e einen anderen numerischen Wert darstellt. Daraus ist zu schliessen, dass alle unsere Resultate auch jetzt bestehen bleiben. Dann aber ist auch ein directer Uebergang zu dem Falle des natürlichen Lichtes erlaubt, nur muss man unter e_0, e_r, J_φ die entsprechenden Grössen für natürliches Licht verstehen.

14. Ein ganz besonderes Interesse bietet der Fall dar, wenn das auffallende Licht senkrecht zur Einfallsebene polarisirt unter dem Polarisationswinkel φ auffällt. Dann bekommen wir keine Reflexion, sodass

$$e_d = e_0$$

wird und wir haben folgende Componente der die Platte zu bewegen bez. zu drehen strebenden Kräfte:

$$z = 0, \quad \overline{\Xi}_0 = 0, \quad \overline{\mathrm{H}}_0 = \quad e_0 \sin\varphi \cos\varphi, \quad \overline{\mathrm{Z}}_0 = \quad e_0 \cos^2\varphi,$$

$$z = h, \quad \overline{\Xi}_h = 0, \quad \overline{\mathrm{H}}_h = - e_0 \sin\varphi \cos\varphi, \quad \overline{\mathrm{Z}}_h = - e_0 \cos^2\varphi.$$

Die Resultirende dieser Kräfte ist offenbar Null; es ergiebt sich nur ein Drehungsmoment, dessen Componenten wir

M_x, M_y, M_z bezeichnen wollen. Es seien ferner $\bar{x}_0$, $\bar{y}_0$, $\bar{z}_0$ und $\bar{x}_h$, $\bar{y}_h$, $\bar{z}_h$ die Coordinaten der entsprechenden Punkte der Ebenen $z = 0$ bez. $z = h$, dS_0, dS_h die Flächenelemente; dann ist

$$M_x = \int\int (\bar{y}_0 \bar{Z}_0 - \bar{z}_0 \bar{H}) \, dS_0 + \int\int (\bar{y}_h \bar{Z}_h - \bar{z}_h \bar{H}_h) \, dS_h,$$

analoge Ausdrücke für M_y, M_z; nun haben wir offenbar

$$\bar{x}_h = \bar{x}_0, \quad \bar{y}_h = \bar{y}_0 + h \operatorname{tg} \varphi_1, \quad \bar{z}_h = \bar{z}_0 + h, \quad dS_0 = dS_h.$$

woraus folgt

$$M_x = \int\int [\bar{y}_0 (\bar{Z}_0 + \bar{Z}_h) - \bar{z}_0 (\bar{H}_0 + \bar{H}_h)] \, dS_0 + h \int\int (\bar{Z}_h \operatorname{tg} \varphi_1 - \bar{H}_h) \, dS_0,$$

$$M_y = \int\int [\bar{x}_0 (\bar{H}_0 + \bar{H}_h) - \bar{y}_0 (\bar{\Xi}_0 + \bar{\Xi}_h)] \, dS_0 - h \operatorname{tg} \varphi_1 \bar{\Xi}_h \int\int dS_0.$$

$$M_z = \int\int [\bar{z}_0 (\bar{\Xi}_0 + \bar{\Xi}_h) - \bar{x}_0 (\bar{Z}_0 + \bar{Z}_h)] \, dS_0 + h \bar{\Xi}_h \int\int dS_0,$$

oder

$$M_x = h S_0 (\bar{Z}_h \operatorname{tg} \varphi_1 - \bar{H}_h), \quad M_y = 0, \quad M_z = 0,$$

worin S_0 die beleuchtete Fläche auf der Ebene $z = 0$, φ_1 den Brechungswinkel bedeuten.

Die Substitution der Werthe von $\bar{Z}_h$, $\bar{H}_h$ ergiebt ferner

$$M_x = e_0 S_0 h \cos \varphi (\sin \varphi - \cos \varphi \operatorname{tg} \varphi_1),$$

oder da

$$\operatorname{tg} \varphi = N = \operatorname{ctg} \varphi_1$$

ist, so folgt endlich

$$M_x = e_0 S_0 h \frac{N^2 - 1}{N(N^2 + 1)}.$$

Für Glas in der Luft berechnet man daraus $M_x = 0{,}26 \, e_0 S_0 h$; für den Diamanten $M_x = 0{,}29 \, e_0 S_0 h$. Das gewonnene Drehungsmoment ist offenbar *eine ganz neue Folgerung* der elektromagnetischen Lichttheorie.

15. Wir wollen nun den Fall der *sphärischen* Wellen untersuchen. Es liege der Coordinatenanfang in dem leuchtenden Punkte, die Reflexionsebene sei die Ebene $z = h$; wir behalten

frühere Richtungen der Coordinatenaxen und nehmen die auffallende Kugelwelle elliptisch polarisirt. Setzen wir ferner

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$\theta_n = 2\pi\left(\frac{r}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) + \delta_n, \quad n = 1,\ 2,\ 3,$$

so ist zu nehmen für die auffallende Welle[1]) (mit gewöhnlicher Annäherung)

$$X_0 = \frac{1}{r}\left(\mathfrak{B}\,\frac{\partial r}{\partial z}\cos\theta_2 - \mathfrak{C}\,\frac{\partial r}{\partial y}\cos\theta_3\right),$$

$$Y_0 = \frac{1}{r}\left(\mathfrak{C}\,\frac{\partial r}{\partial x}\cos\theta_3 - \mathfrak{A}\,\frac{\partial r}{\partial z}\cos\theta_1\right),$$

$$Z_0 = \frac{1}{r}\left(\mathfrak{A}\,\frac{\partial r}{\partial y}\cos\theta_1 - \mathfrak{B}\,\frac{\partial r}{\partial x}\cos\theta_2\right),$$

woraus folgt

$$L_0 = \frac{1}{r}\,(\alpha_1\cos\theta_1 + \alpha_2\cos\theta_2 + \alpha_3\cos\theta_3),$$

$$M_0 = \frac{1}{r}\,(\beta_1\cos\theta_1 + \beta_2\cos\theta_2 + \beta_3\cos\theta_3),$$

$$N_0 = \frac{1}{r}\,(\gamma_1\cos\theta_1 + \gamma_2\cos\theta_2 + \alpha_3\cos\theta_3),$$

dabei ist

$$\alpha_1 = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\mathfrak{A}\left\{\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2\right\}, \qquad \alpha_2 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\mathfrak{B}\,\frac{\partial r}{\partial y}\,\frac{\partial r}{\partial x},$$

$$\alpha_3 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\mathfrak{C}\,\frac{\partial r}{\partial z}\,\frac{\partial r}{\partial x},$$

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\mathfrak{A}\,\frac{\partial r}{\partial x}\,\frac{\partial r}{\partial y}, \qquad \beta_2 = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\mathfrak{B}\left\{\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2\right\},$$

$$\beta_3 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\mathfrak{C}\,\frac{\partial r}{\partial z}\,\frac{\partial r}{\partial y},$$

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\mathfrak{A}\,\frac{\partial r}{\partial x}\,\frac{\partial r}{\partial z}, \qquad \gamma_2 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\mathfrak{B}\,\frac{\partial r}{\partial y}\,\frac{\partial r}{\partial z},$$

$$\gamma_3 = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\mathfrak{C}\left\{\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2\right\}.$$

1) P. Volkmann, Vorlesungen über die Theorie des Lichtes p. 65. Leipzig 1891.

Für die reflectirte Kugelwelle müssen wir nehmen

$$r'^2 = x^2 + y^2 + (2h - z)^2,$$

und $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, θ_1, θ_2, θ_3 bez. durch $\mathfrak{A}_r$, $\mathfrak{B}_r$, $\mathfrak{C}_r$, θ_1', θ_2', θ_3' ersetzen; es ist dabei offenbar für $z = h$

$$\overline{\frac{\partial r'}{\partial x}} = \overline{\frac{\partial r}{\partial x}}, \quad \overline{\frac{\partial r'}{\partial y}} = \overline{\frac{\partial r}{\partial y}}, \quad \overline{\frac{\partial r'}{\partial z}} = -\overline{\frac{\partial r}{\partial z}}; \quad \bar{r} = \bar{r}'$$

und die Berechnung von den Mittelwerten $\overline{X^2} = \overline{(X_0 + X_r)^2}, \ldots$, wenn auch langweilig, bietet doch keine Schwierigkeit dar.

In dieser Weise berechnen wir die Normalcomponente des Druckes auf die Ebene $z = h$ zu

$$\overline{Z_h} = (\bar{\varepsilon}_0 + \bar{\varepsilon}_r)\left(\overline{\frac{\partial r}{\partial z}}\right)^2 = (\bar{\varepsilon}_0 + \bar{\varepsilon}_r)\cos^2\varphi,$$

worin $\bar{\varepsilon}_0$, $\bar{\varepsilon}_r$ die mittlere Energie der Volumeneinheit der einfallenden bez. der reflectirten Strahlen bei der Ebene $z = h$ bedeuten; dabei sind natürlich diese Grössen, wie auch φ, für verschiedene Strahlen verschieden.

16. Es sei nun i_0 diejenige Energie, die die auffallende Welle in einer Secunde auf die Einheit der Fläche $z = h$ bringt; die analoge Grösse für die reflectirte Welle sei i_r; bezeichnen wir mit V die Lichtgeschwindigkeit, so folgt, wie leicht zu ersehen ist,

$$\bar{\varepsilon}_0 = \frac{i_0}{V\cos\varphi}, \quad \bar{\varepsilon}_r = \frac{i_r}{V\cos\varphi},$$

$$\overline{Z_h} = \frac{i_0 + i_r}{V}\cos\varphi.$$

Diese Beziehung bleibt auch dann gelten, wenn man eine *strahlende* Fläche hat; dann ist nur $i_0 + i_r$ durch die ausgestrahlte Energie zu ersetzen.

Betrachten wir z. B. eine absolut schwarze Fläche, deren 1 qcm in der Zeiteinheit normal die Energie i ausstrahlt, dann ist für den Winkel, der zwischen φ und $\varphi + d\varphi$ liegt,

$$i_\varphi = i\cos\varphi$$

und die entsprechende Druckcomponente wird

$$\overline{Z_h} = \frac{i_\varphi\cos\varphi}{V} = \frac{i\cos^2\varphi}{V}.$$

Die Menge solcher Strahlen ist bekanntlich $2\pi \sin\varphi\, d\varphi$, und folglich beträgt der Druck, zum Flächenelement dS normal,

$$p_\lambda = \frac{2\pi}{V} i \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2\varphi \sin\varphi\, d\varphi\,, \quad p_\lambda = \frac{2}{3}\frac{\pi i}{V}\,.$$

Stellt nun E_λ das Gesetz der Energieverteilung im Spectrum des absolut schwarzen Körpers dar, so haben wir

$$i = E_\lambda\, d\lambda,$$

$$p_\lambda = \frac{2\pi}{3}\frac{E_\lambda}{V}\, d\lambda.$$

Der Gesamtdruck ergiebt sich daraus zu

$$p = \frac{2\pi}{3}\int\limits_0^\infty \frac{E_\lambda}{V}\, d\lambda\,.$$

Ist V von λ unabhängig, wie es für den Aether der Fall ist, so folgt einfach

$$V = \frac{1}{A}\,, \quad p = \frac{2\pi}{3} E A\,, \quad E = \int\limits_0^\infty E_\lambda\, d\lambda\,.$$

Kasan, December 1900.

(Eingegangen 31. Januar 1901.)

15. *Ueber den Magnetismus des Eisens; von Carl Fromme.*

Hr. P. Holitscher[1]) hat kürzlich in diesen Annalen „Experimentelle Untersuchungen über den remanenten Magnetismus des Eisens" veröffentlicht. Sämtliche Versuche sind mit einem einzigen Eisenkörper ausgeführt, einem Stab aus Juraeisen von 36 cm Länge und 0,288 cm Dicke, der in die Form eines Rotationsellipsoids gebracht war. So verdienstlich es nun auch sonst ist, einen einzelnen, wohl definirten Körper gründlich, statt viele, ihrer Zusammensetzung und Form nach schlecht definirte Körper unvollständig zu untersuchen, so wenig angebracht erscheint es, auf dem Gebiete des Magnetismus, wo nicht allein kleine Unterschiede in den Beimengungen des Eisens, sondern auch Verschiedenheiten der Länge und der Dicke des Körpers ein so wichtiges Wort mit reden, die Aussprache von Gesetzen auf Versuche mit einem einzigen Object zu gründen. Denn jeder folgende Versuch mit einem anderen Object kann die aufgestellten Gesetze wieder umwerfen.

Glücklicherweise sind aber die meisten der Resultate, die Hr. Holitscher erhalten hat, längst bekannt und sicher begründet, und wo sie bekannten nicht zu entsprechen scheinen, da erklärt sich dies zum Teil aus der Beschränkung der Untersuchung auf einen einzigen Körper; zum Teil spielen wohl auch noch andere Ursachen mit.

Bekannt ist erstens „der Einfluss der Anzahl der erfolgten Impulse (der magnetisirenden Kraft) auf das remanente Moment". Ich[2]) habe diesen Einfluss ausführlich untersucht und namentlich auch schon die Abhängigkeit der Erscheinung von der Grösse der Kraft und ihren Zusammenhang mit dem Wendepunkt des remanenten Momentes festgestellt. Das Verhältnis zwischen dem durch den ersten bez. zweiten Impuls erzeugten Moment

1) P. Holitscher, Ann. d. Phys. **3.** p. 683. 1900 (Auszug aus der Inaugural-Dissertation, Zürich 1900).

2) C. Fromme, Pogg. Ann. Ergbd. **7.** p. 390. 1875; Wied. Ann. **4.** p. 78—87. 1878.

zu dem durch eine grosse Anzahl von Impulsen der Kraft erzeugten RM_1/RM bez. RM_2/RM scheint aber in meinen Versuchen mit abnehmender Kraft schliesslich die Eins zu erreichen, während Hr. Holitscher für RM_1/RM eine Convergenz gegen 0,94 annimmt.

Bekannt ist zweitens auch, wie sich das ganze (bei Hrn. Holitscher *momentane*), von einer Kraft inducirte und das verschwindende Moment bei wiederholten Impulsen der Kraft verhalten.

Hr. Holitscher sagt p. 698: „Das momentane magnetische Moment ist in *keiner* Abhängigkeit von der Zahl der Impulse, es bleibt, abgesehen von kleinen Unregelmässigkeiten namentlich bei dem ersten Impuls, constant.“ Dieser Ausspruch wird dann freilich p. 705 dahin modificirt, dass „bei grösseren Kräften das gesamte Moment bei dem ersten Impuls einen um ca. 1 Proc. grösseren Wert anzeige, um erst bei dem zweiten Impuls auf den constant annehmbaren Wert abzusinken“. Dass das ganze Moment durchaus regelmässig mit der Zahl der Impulse variirt, dass es aber je nach der Grösse der vorhergegangenen und der gegenwärtigen Kraft entweder eine Abnahme oder eine Zunahme zeigen kann, habe ich l. c. durch ausführliche Versuche belegt. Dass das verschwindende Moment mit wachsender Impulszahl *stets* abnimmt, ist ebendort auch schon gezeigt.

Bekannt sind drittens durch ausgedehnte Untersuchungen meinerseits[1]) alle diejenigen Resultate Hrn. Holitscher's, die sich auf den Einfluss der Magnetisirungs- und Entmagnetisirungsgeschwindigkeit beziehen. Einen Einfluss der Magnetisirungsgeschwindigkeit hat Hr. Holitscher weder bei dem remanenten noch bei dem gesamten Moment gefunden. Aus meinen Untersuchungen geht dagegen mit voller Deutlichkeit hervor, dass mit steigender Magnetisirungsgeschwindigkeit das Gesamtmoment wächst. Das negative Resultat des Hrn. Holitscher erklärt sich aus der geringen Dicke seines Stabes im Vergleich zur Länge.

Bekannt ist viertens auch[2]), welchen Einfluss eine kleine Kraft, die nach einer grösseren wirkt, auf das von dieser

1) C. Fromme, Wied. Ann. **5.** p. 345. 1878; **18.** p. 442. 1883; **44.** p. 138. 1891.

2) l. c. **43.** p. 181. 1891.

hinterlassene remanente Moment ausübt. Hr. Holitscher findet, „dass wenn das remanente Moment durch genügend oft wiederholte Einwirkung einer gewissen Kraft seinen Grenzwert M_{rm} erreicht hat, nicht nur eine grössere Kraft, sondern auch eine *etwas* kleinere Kraft denselben vergrössern kann". Das ist richtig, aber falsch ist, „dass keine, wie immer geartete, gleichgerichtete Kraft dieses M_{rm} *verkleinern* könne". Vielmehr verhält es sich so, dass die *etwas* kleineren Kräfte das M_{rm} *vergrössern* und die *viel* kleineren es *schwächen*. Zwischen beiden Gruppen von Kräften liegt eine neutrale Kraft, mit der ich besonders interessante Versuche angestellt habe.

Ich komme schliesslich zu einer Frage, welche Hr. Holitscher nach seinen Versuchen bejahen zu müssen glaubt, während sie von Frankenheim im negativen Sinne beantwortet war, zu der Frage nach dem Einfluss der Magnetisirungs*dauer* auf das remanente Moment. Die Versuche Hrn. Holitscher's wurden in der Weise angestellt, dass der Stab zuerst so oft einer Magnetisirungsdauer von 5 sec unterworfen wurde, bis das remanente Moment nicht mehr zunahm. Dann erst wurde die Dauer der Magnetisirung auf 10 sec gesteigert, und dies wieder bis zur Erreichung eines constanten Grenzwertes des remanenten Momentes wiederholt, und so fort bis zur Magnetisirungsdauer von $1^3/_4$ Min. Es ergab sich ein Anwachsen des Grenzwertes mit wachsender Dauer der Kraftwirkung bei kleinen wie bei grossen Kräften. Meine Bedenken gegen die Beweiskraft dieser Versuche gründen sich auf die Nichtbeachtung folgender zwei Punkte.

Bei der zuerst angewandten Magnetisirungsdauer von 5 sec wächst das remanente Moment zunächst stark mit Wiederholung der Impulse an, die Zunahme wird dann bei weiteren Impulsen kleiner und immer kleiner. In dem von Hrn. Holitscher angeführten Beispiel ist eine Zunahme bis zum fünften Impuls bemerkbar, die folgenden 9 Impulse ändern das remanente Moment nicht mehr, daher wird das Mittel aus den letzten (10) Impulsen 17,14 als Maximalwert bei einer Dauer von 5 sec betrachtet. Nunmehr wird zu einer Magnetirungsdauer von 10 sec übergegangen, hier wie bei allen höheren Zeiten werden aber nur 5 Impulse angewandt, und als Maximalwerte für 10, 20, 30, 40, 50, 60, 75 sec Magnetisirungsdauer

17,32, 17,82, 17,96, 18,04, 18,10, 18,15, 18,20 gefunden. Ich glaube nun, dass dieses Anwachsen des remanenten Momentes zum Teil immer noch als Wirkung der vermehrten Impulszahl gedeutet werden kann, denn die 14 Impulse bei je 5 sec Wirkungsdauer haben wohl kaum genügt, den allein durch Vermehrung der Impulse erreichbaren Grenzwert herbeizuführen. An anderer Stelle (p. 697) giebt denn auch Hr. Holitscher an, dass „nicht, wie oft angeführt wird, bei einer geringen Anzahl von Impulsen das Maximum erreicht wird, da selbst nach neuerdings erfolgten 20 Impulsen fernere 100 Impulse eine weitere Steigerung des remanenten Momentes verursachen".

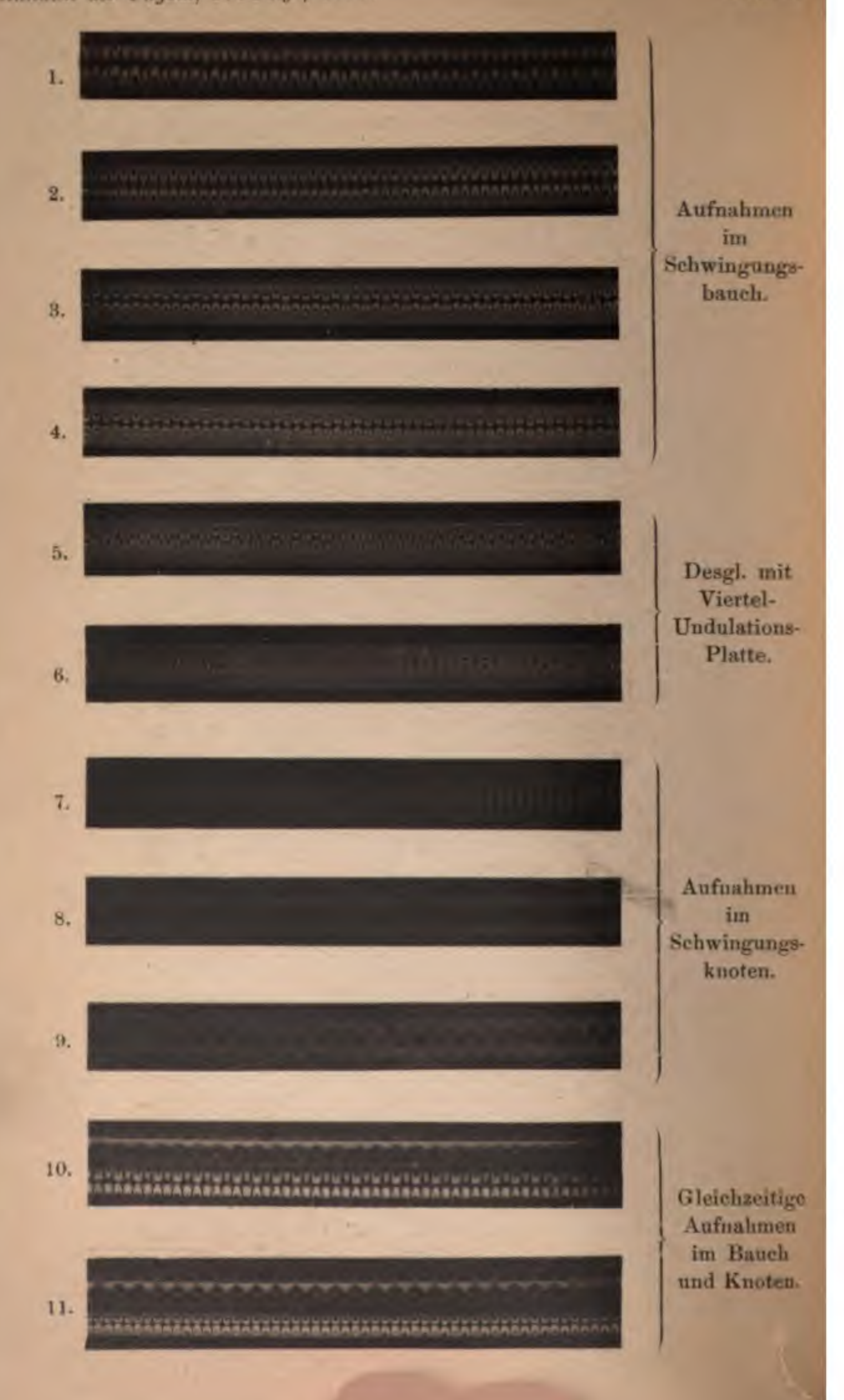
Zweitens geht aus der Beschreibung der Versuche nicht hervor, ob Hr. Holitscher auf die magnetische Nachwirkung Rücksicht genommen hat. Denn es fehlt jede Bemerkung darüber, wieviel Secunden oder Minuten nach Oeffnung des magnetisirenden Stromes bis zur Ablesung des remanenten Momentes verflossen. Vollzog sich aber diese Beobachtung alsbald nach Oeffnung, so steckt in den Werten des remanenten Momentes noch ein Teil der Nachwirkung, und diese wird im allgemeinen um so grösser sein, je grösser die Wirkungsdauer der Kraft war. Um also die Frage einwurfsfrei zu beantworten, wäre es nötig gewesen, mit der Ablesung des remanenten Momentes jedesmal so lange Zeit zu warten, bis sicher alle Nachwirkung verschwunden ist. Merkwürdigerweise findet Hr. Holitscher das ganze während der Wirkung einer Kraft bestehende Moment unabhängig von der Wirkungsdauer der Kraft. Wegen der magnetischen Nachwirkung sollte man aber eine Zunahme mit wachsender Dauer erwarten. Ich vermute deshalb, dass die Nachwirkung bei dem untersuchten Stabe nur klein war, und dass die gefundene Zunahme des remanenten Momentes mit der Dauer der Kraft vorzugsweise durch die bei 5 sec Dauer zu geringe Zahl der Impulse zu erklären ist.

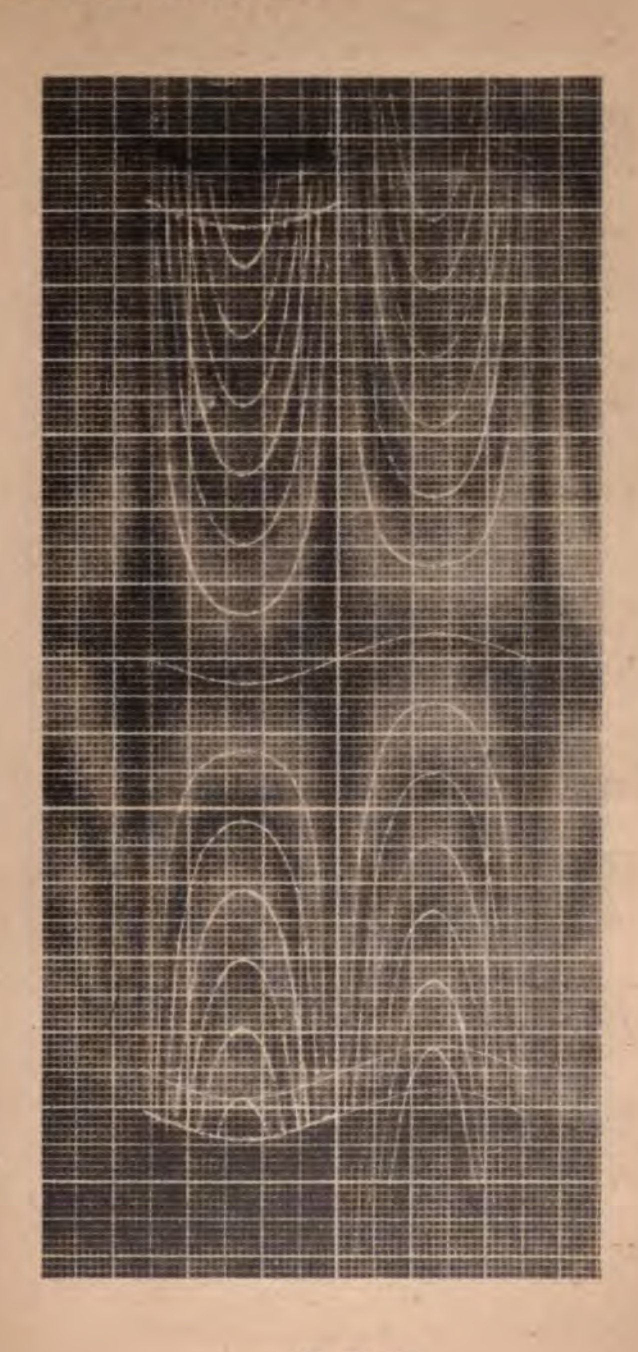
Giessen, Februar 1901.

(Eingegangen 9. Februar 1901.)

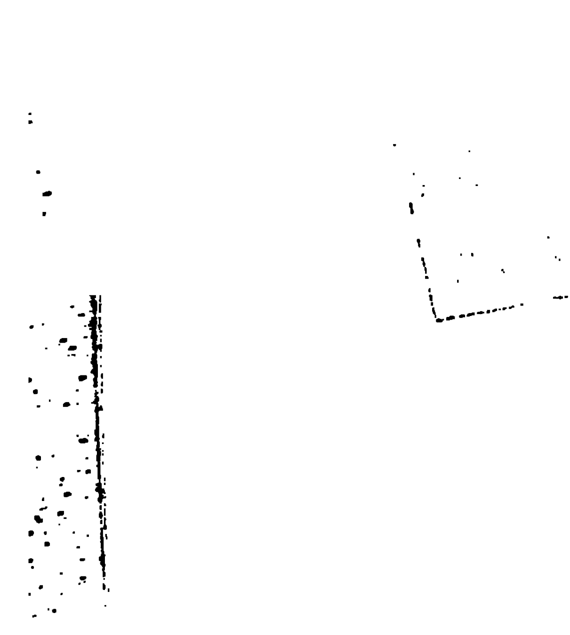
Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

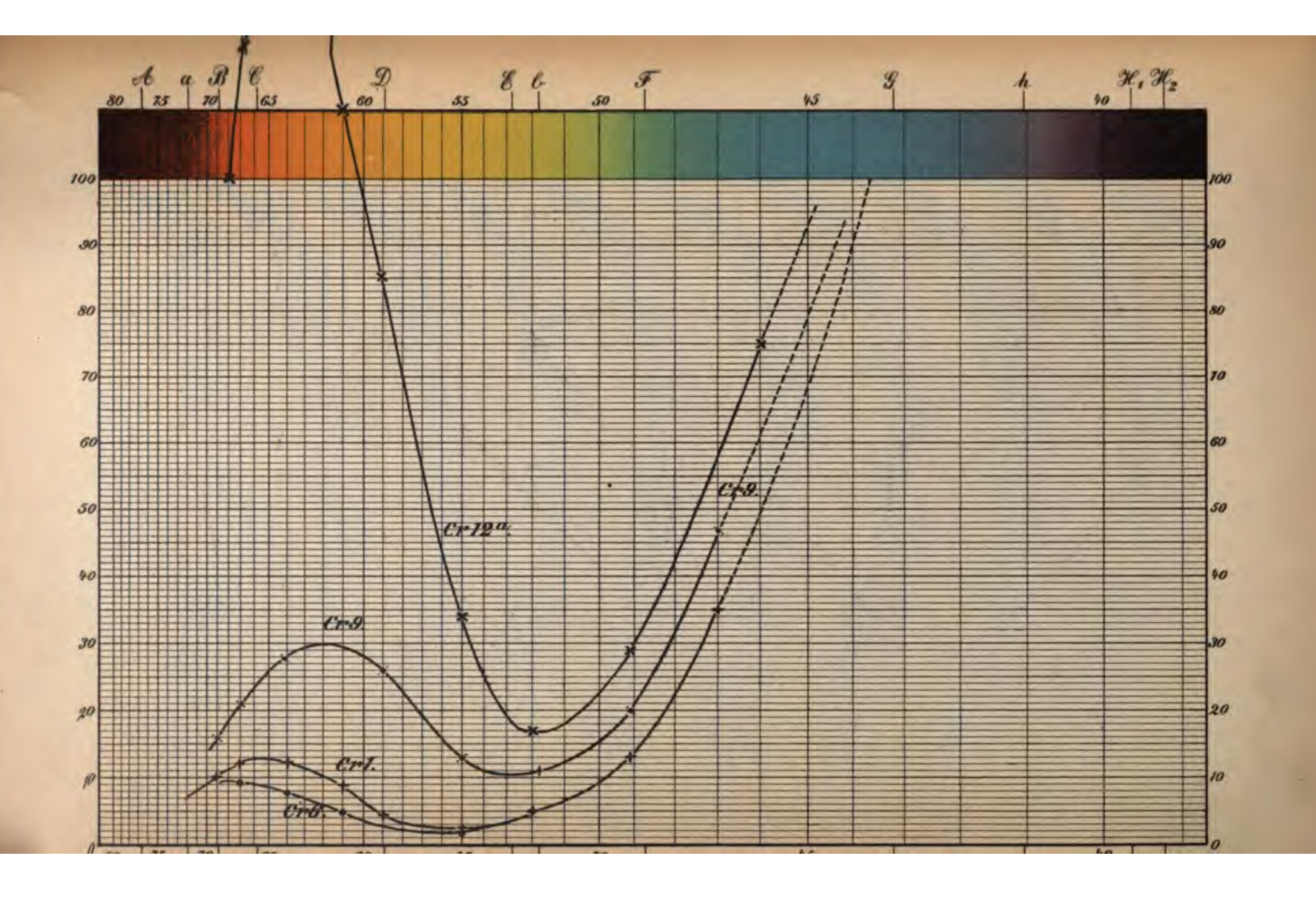



1.
2.
3.
4.
Aufnahmen im Schwingungsbauch.
5.
6.
Desgl. mit Viertel-Undulations-Platte.
7.
8.
9.
Aufnahmen im Schwingungsknoten.
10.
11.
Gleichzeitige Aufnahmen im Bauch und Knoten.

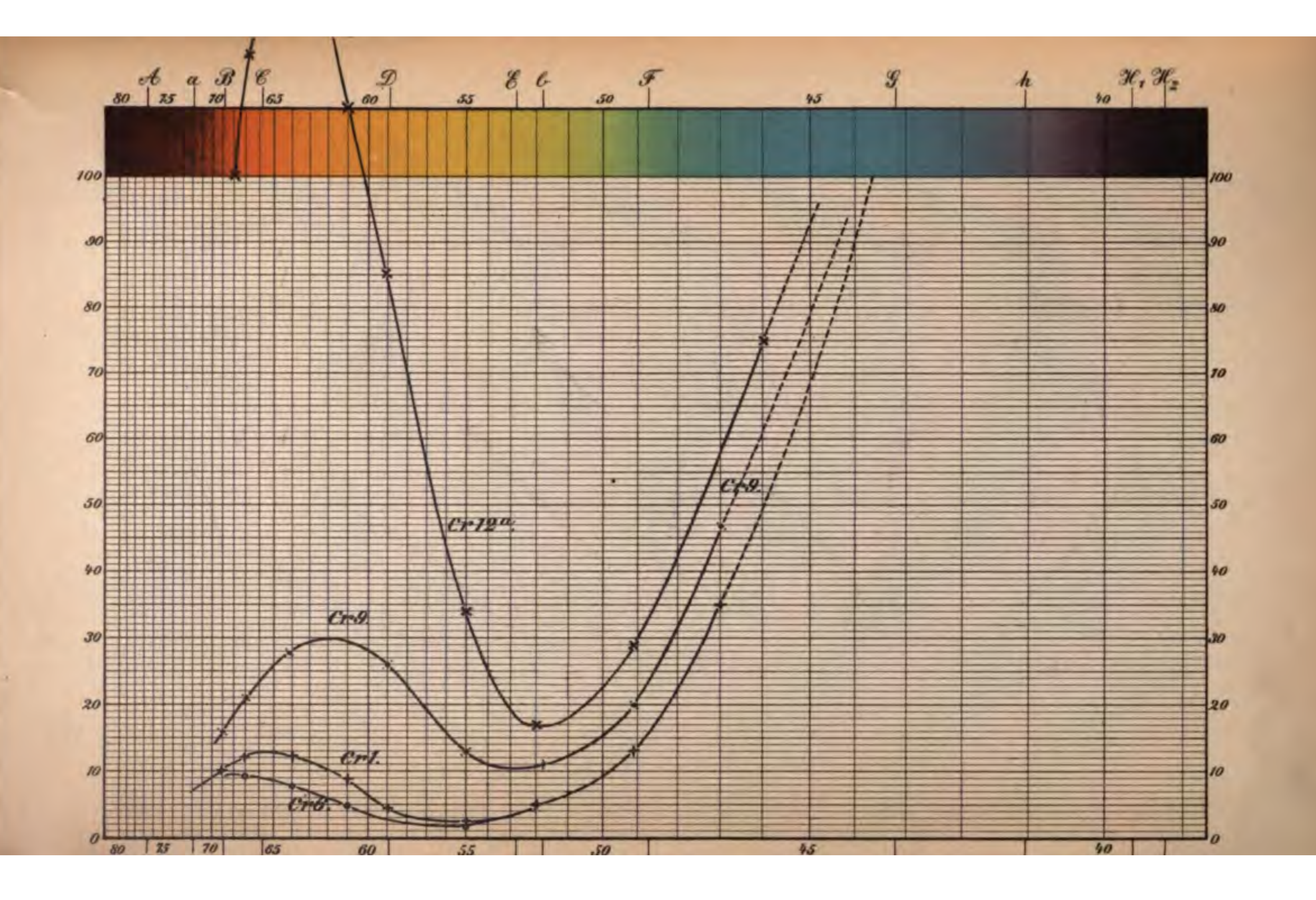


W. König.

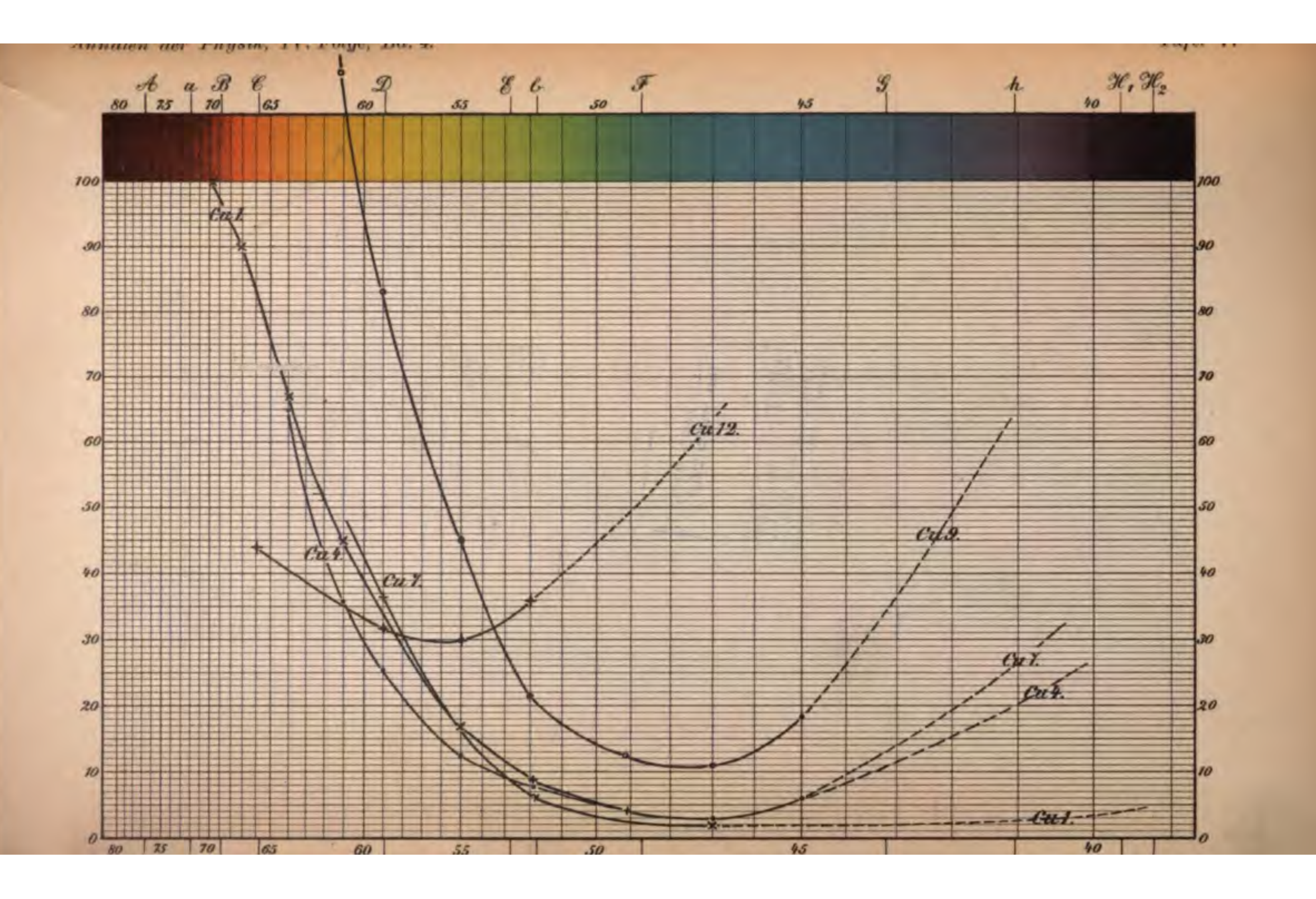




A a B C D E b F G h H₁ H₂
80 75 70 65 60 55 50 45 40
100 90 80 70 60 50 40 30 20 10 0
Cr 12a.
Cr 9.
Cr 9.
Cr 1.
Cr 6.



A a B C D E b F G h H1 H2
80 75 70 65 60 55 50 45 40
100 90 80 70 60 50 40 30 20 10 0
Cr 12a.
Cr 9.
Cr 9
Cr 1.
Cr 6.


A a B C D E b F G h H1, H2
80 75 70 65 60 55 50 45 40
100 90 80 70 60 50 40 30 20 10 0
Cu 1.
Cu 4.
Cu 7.
Cu 9.
Cu 12.



A a B C D E b F G h H1, H2

80 75 70 65 60 55 50 45 40

100 90 80 70 60 50 40 30 20 10 0

Ni 15.

Ni 2.

Ni 4.

Ni 9.

Ni 3.

Ni 12.

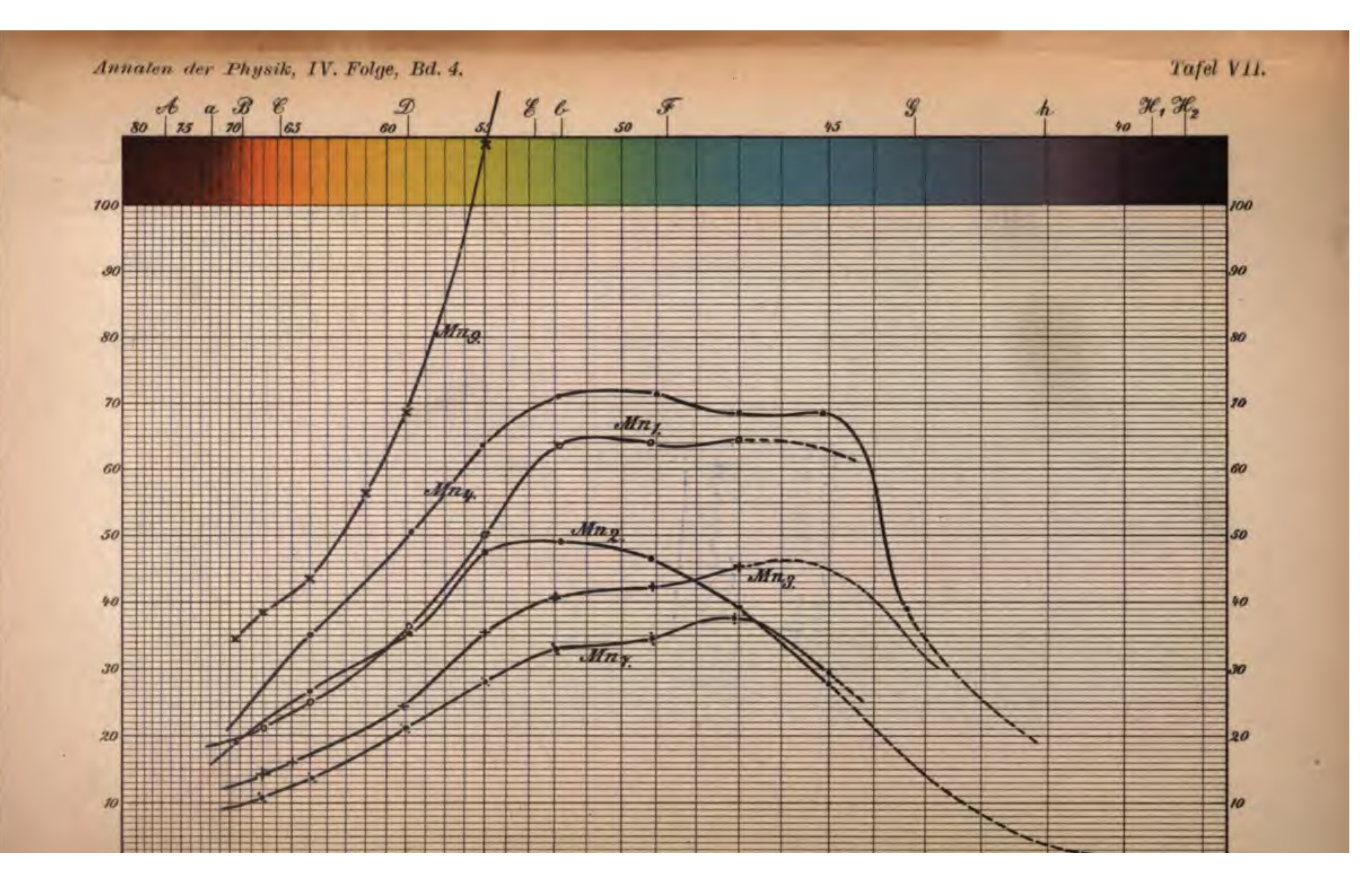
Ni 2.

Ni 3.

Ni 9.

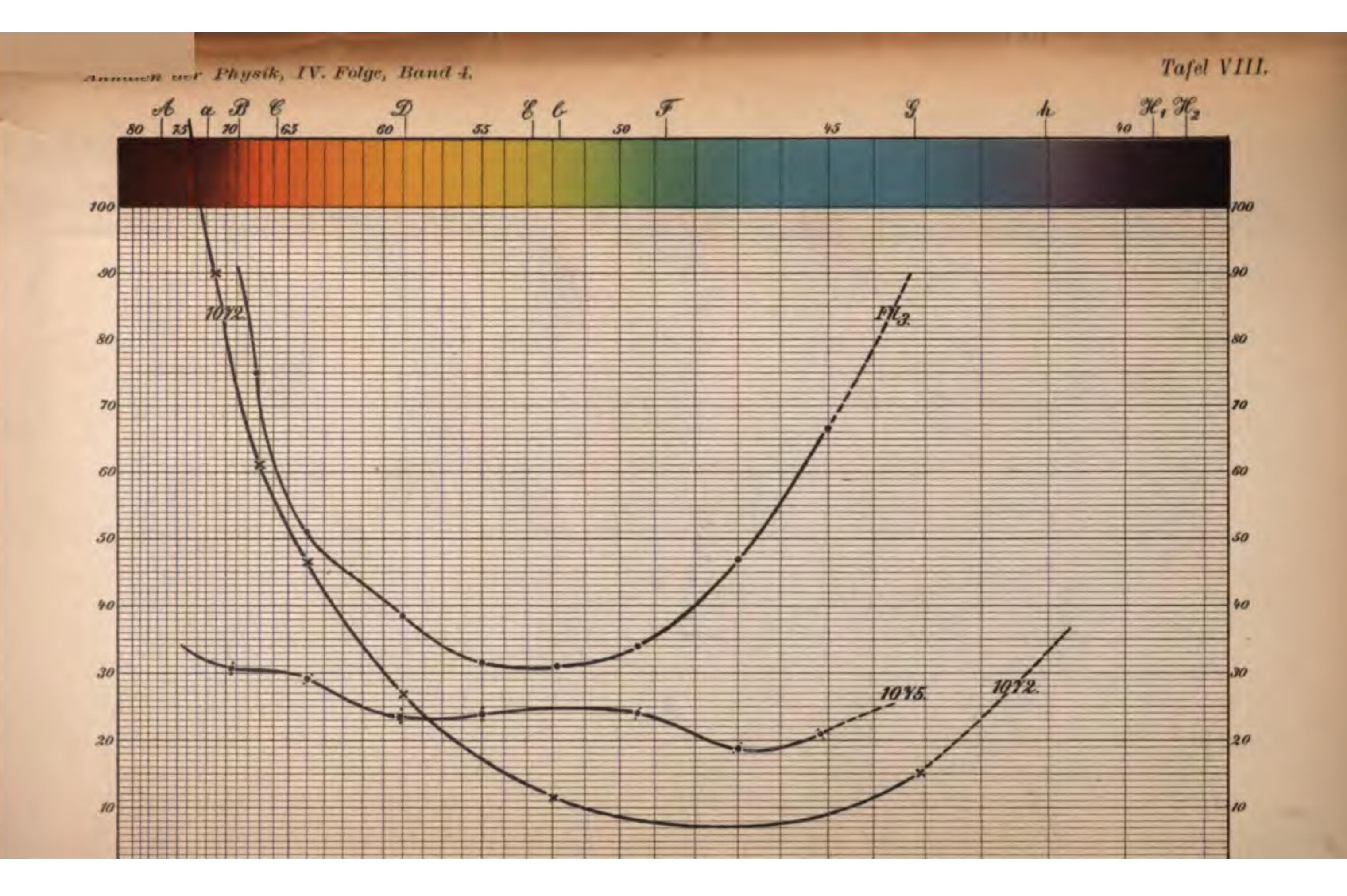
Ni 2.


NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
LENOX
FOUNDATIONS.

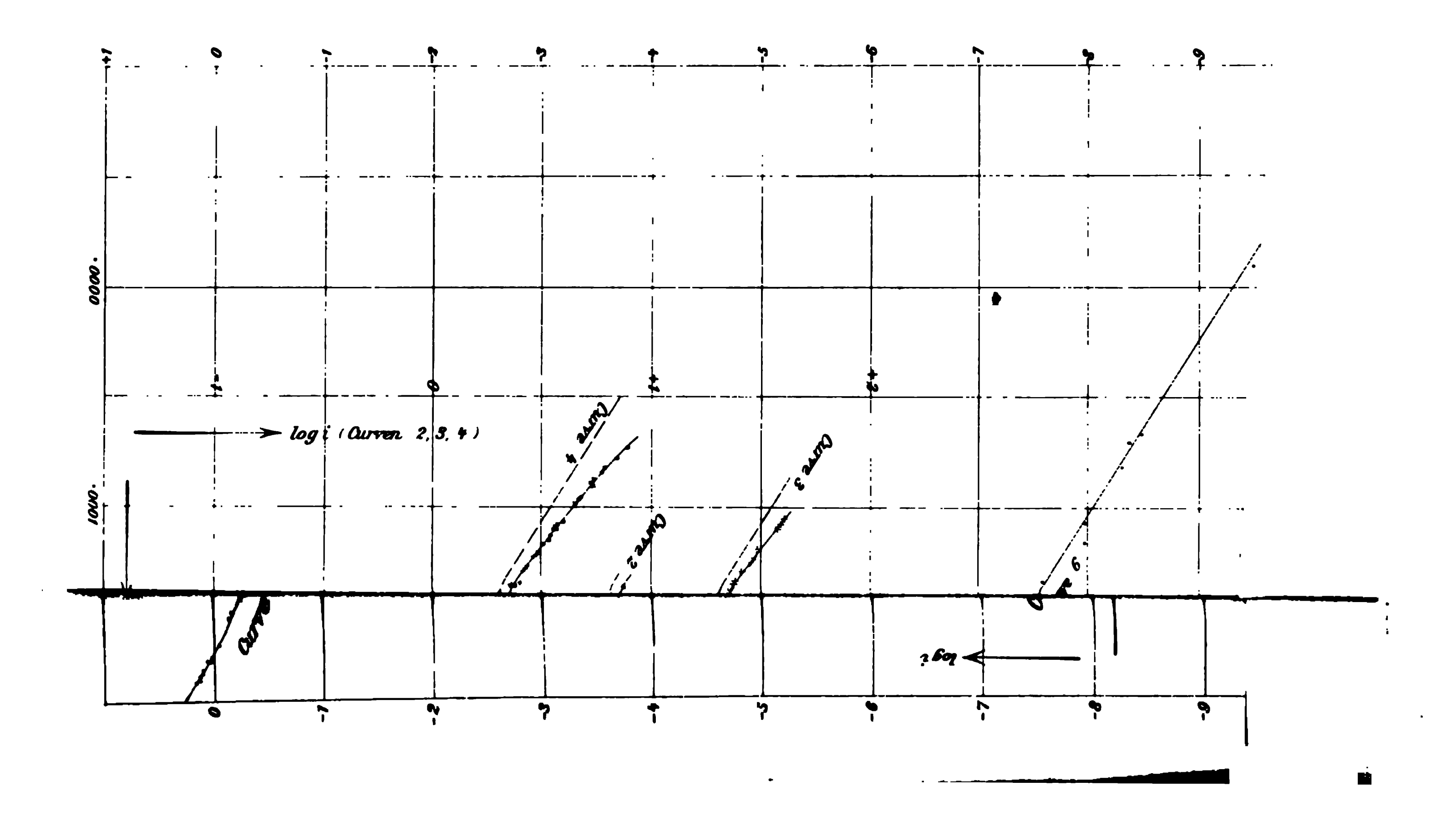

A
a
B
C
D
E
b
F
G
h
H_1, H_2
80
75
70
65
60
55
50
45
40
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
Mn 9.
Mn 4.
Mn 1.
Mn 2.
Mn 3.
Mn 7.


THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS

Tafel VIII.



A a B C D E b F G h H_1 H_2
80 75 70 65 60 55 50 45 40
100 90 80 70 60 50 40 30 20 10
1072.
Pt_3.
1075.
1072.


log i (Curven 2, 3, 4)
log i
Curve 2
Curve 3
Curve 4
Curve 6
1000·
0000·
+1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9

